C.C. FEDIAEVSKI

MÉCANIQUE DES FLUIDES

C.C. FEDIAEVSKI
Ya.I. VOITKOUNSKI
Yu.I. FADDEEV

MÉCANIQUE DES FLUIDES

INTRODUCTION

La mécanique des fluides a pour objet l'étude des lois du mouvement du fluide et des processus de son interaction avec le corps solide. Le fluide est un corps physique possédant la propriété de fluidité, c'est-à-dire la propriété de subir de grandes déformations non élastiques sous l'action de faibles forces extérieures. La fluidité, due à une grande mobilité des particules, est caractéristique non seulement des liquides tels que l'eau, par exemple, mais aussi des gaz. Pour cette raison, en mécanique des fluides la notion de fluide comprend non seulement les liquides mais aussi les gaz.

La différence entre les lois du mouvement des liquides et des gaz se manifeste dans les cas où ces lois sont déterminées non seulement par la fluidité, mais également par des propriétés caractéristiques supplémentaires. Une telle propriété des liquides est leur compressibilité extrêmement faible, à laquelle est liée la faculté du fluide de former une surface libre si une masse déterminée de celui-ci est placée dans un récipient.

Les lois spécifiques du mouvement des fluides gazeux commencent à agir lorsque sur les caractéristiques de l'écoulement influent la compressibilité facile des gaz et la faculté des gaz de varier sensiblement leur volume et leur densité.

Pour décrire les mouvements d'un fluide, en mécanique des fluides on utilise les lois générales de la mécanique du corps solide: les lois de Newton, des quantités de mouvement et de la variation de l'énergie cinétique combinées aux relations supplémentaires conditionnées par la fluidité du milieu. Lorsqu'il est nécessaire de prendre en compte l'influence exercée sur la structure de l'écoulement par la compressibilité du fluide, la tension superficielle, la conductibilité électrique et les autres propriétés supplémentaires, on utilise, pour décrire ses mouvements, les lois physiques qui relient ces propriétés à des forces externes et internes apparaissant dans le fluide.

L'introduction de ces dépendances supplémentaires a rendu nécessaire d'élaborer des parties spéciales de la mécanique des

fluides dont les plus développées sont la dynamique des gaz, où l'on étudie l'écoulement des gaz compte tenu de l'influence exercée sur leur structure par la compressibilité ; l'hydromécanique magnétique, dont l'objet est d'étudier les mouvements des fluides compressibles et incompressibles, conducteurs d'électricité, dans un champ électromagnétique ; l'hydrodynamique physico-chimique qui tient compte de l'influence de divers processus physico-chimiques sur le mouvement des fluides ; l'élasticité hydraulique ; l'hydrodynamique de l'explosion, etc.

En se servant des lois de la mécanique et en utilisant des relations physiques supplémentaires, on ramène généralement le problème de l'étude du mouvement d'un fluide à certains systèmes d'équations différentielles ou intégrales. La possibilité de sa résolution ultérieure dépend en grande partie des progrès du développement et de l'emploi des méthodes mathématiques: de la théorie des équations différentielles et intégrales, de la théorie de la fonction variable complexe et des fonctions spéciales, des méthodes statistiques, de la théorie du potentiel, etc. Parmi ces disciplines mathématiques il y en a celles qui ont été élaborées directement par suite de la nécessité de résoudre les problèmes de la mécanique des fluides.

La résolution des problèmes de la mécanique des fluides est facilitée en grande partie par l'emploi des ordinateurs. Pour l'étude des écoulements de fluide on emploie également avec succès les méthodes des analogies: électrohydrodynamique, magnétohydrodynamique, gazohydraulique, etc.

Cependant, la formulation des problèmes de la mécanique des fluides et l'établissement des équations du mouvement de fluide sont le plus souvent impossibles sans effectuer préalablement les études expérimentales. L'état actuel des sciences mathématiques ne permet toujours pas d'obtenir des solutions analytiques suffisamment exactes des problèmes posés. Pour cette raison dans la mécanique des fluides un large emploi ont reçu les méthodes expérimentales d'étude des écoulements et des forces hydrodynamiques qui prennent naissance en écoulement d'un fluide autour des corps. Ces méthodes permettent de révéler de nouvelles propriétés des écoulements et des phénomènes qui s'y déroulent qui par la suite seront soumis à une analyse théorique détaillée et à une explication physique.

De cette façon la tendance principale du développement actuel de la mécanique des fluides consiste en la combinaison des études théoriques et expérimentales des écoulements des fluides.

Le problème le plus important, aussi bien du point de vue de la théorie que des applications pratiques, est l'interaction du corps solide et du fluide. On peut alors indiquer deux aspects principaux de ce problème.

Le premier aspect est ce qu'on appelle le problème interne de la mécanique des fluides, c'est-à-dire l'étude de l'écoulement d'un fluide limité par des parois solides, par exemple dans les conduites, les canaux, etc. La partie de la mécanique des fluides dont l'objet est l'étude des méthodes de calcul et de recherches de tels écoulements s'appelle l'hydraulique.

Le second aspect du problème est l'étude du problème externe de la mécanique des fluides, c'est-à-dire l'écoulement d'un fluide autour des corps solides ou le mouvement des corps solides dans un fluide. Sa résolution permet de déterminer les forces hydrodynamiques agissant du côté du fluide sur le corps, ce qui est nécessaire pour composer les équations du mouvement d'un corps solide, ainsi que pour le calcul de sa résistance. L'hydromécanique du navire et l'aérodynamique des grandes vitesses, qui étudie les forces aérodynamiques apparaissant en mouvement des avions et des fusées, sont deux tendances du problème externe.

L'objectif de la mécanique des fluides est l'étude des problèmes liés non seulement à la création des méthodes théoriques de calcul des forces externes agissant sur un corps, mais aussi à l'élaboration des principes généraux du modelage hydrodynamique de ces forces. La théorie de la similitude et du modelage constitue la partie la plus importante de la mécanique des fluides. Elle sert de base à la construction de diverses installations expérimentales et à la transposition au prototype des résultats obtenus sur les maquettes.

Dans le présent ouvrage on examine les problèmes de la mécanique d'un fluide incompressible. L'attention principale est faite aux problèmes servant de base théorique pour l'élaboration des méthodes de calcul du mouvement et de la navigabilité des navires.

Le développement et l'accumulation des connaissances dans le domaine de la mécanique des fluides ont commencé depuis longtemps. Bien avant notre ère, on possédait déjà une réserve importante de renseignements empiriques, relatifs au problème interne de la mécanique des fluides, qui ont permis de créer le système de canalisation d'eau dans l'ancienne Rome et les ouvrages d'irrigation dans l'Asie centrale. Les travaux d'Archimède ainsi que de Stevin, Galilée, Pascal ont permis de découvrir et d'étudier les lois de l'équilibre du fluide qui sont utilisées jusqu'à présent sans corrections pour l'étude de la statique des fluides. Les travaux de Léonard de Vinci et de Galilée ont servi de base à l'étude ultérieure de la résistance au mouvement des corps solides.

Newton a posé les fondements de l'élaboration des méthodes théoriques d'étude de l'apparition de la résistance au mouvement des corps. Dans son ouvrage « Principes mathématiques de philosophie naturelle » (1687), il a, pour la première fois, essayé de diviser les forces de résistance en leurs composantes, dont chacune dépend d'une des propriétés caractéristiques du fluide: la densité, la visco-

sité et la cohésion des particules. Pour déterminer la partie de la force, la résistance, dépendante de la masse volumique du fluide, Newton a proposé d'utiliser le schéma suivant lequel son apparition est conditionnée par les chocs des particules isolées sur la surface d'un corps solide. Ce schéma ne tient pas compte du caractère continu de l'écoulement du milieu fluide, de sa fluidité mais établit néanmoins correctement la relation quadratique générale entre la résistance et la vitesse du mouvement d'un corps. Pour étudier l'influence de la viscosité du fluide sur la résistance, Newton a proposé une formule qui correspond parfaitement aux données des expériences. La formule de Newton est largement utilisée de nos jours pour l'élaboration de la théorie des écoulements laminaires d'un fluide visqueux.

Pour la première fois la science Hydrodynamique a reçu son nom dans le traité de l'académicien Daniel Bernoulli, publié à Saint-Pétersbourg en 1738. Actuellement cette science est appelée Mécanique des fluides.

Dans son ouvrage, Bernoulli a formulé l'équation liant la vitesse, la pression et les hauteurs des points de l'écoulement, que l'on utilise jusqu'à présent pour les calculs des écoulements de fluide. Elle s'appelle équation de Bernoulli.

La création de la théorie du mouvement du fluide comme d'un milieu continu déformable et l'élaboration sur la base de ce modèle de fluide des équations de son mouvement, c'est-à-dire la formation des fondements scientifiques et théoriques de la mécanique des fluides, sont liées au nom du célèbre mathématicien et mécanicien, membre de l'Académie des sciences de la Russie, Léonard Euler. Dans ses traités, dont la publication a commencé dès 1749, outre les équations du mouvement d'un fluide non visqueux et les méthodes de leur intégration, sont examinés les problèmes de l'application de la loi des quantités du mouvement aux fluides, les origines de l'apparition de la résistance au mouvement des corps et l'utilisation des méthodes et des formules de la mécanique des fluides pour l'étude de la statique, de la dynamique et du mouvement des navires.

Au milieu de XVIIIe siècle se rapportent les travaux de d'Alembert sur l'équation de la continuité, l'étude de la résistance au mouvement des corps et les problèmes de l'application de la théorie des fonctions d'une variable complexe en mécanique des fluides.

Ainsi, les travaux d'Euler, de Bernoulli et de d'Alembert servirent de base à la création et au développement favorable de la mécanique des milieux continus déformables.

Les équations d'Euler, représentant le fondement analytique de la mécanique des fluides, ont servi de base pour la résolution de différents problèmes relatifs au mouvement du fluide non visqueux et à l'écoulement autour des corps par des mathématiciens célèbres

de la fin du XVIIIe et du XIXe siècle tels que Lagrange, Cauchy, Poisson, Stokes, Kirchhoff, Rankine, Groméko et autres.

Le début de l'élaboration de la théorie de la dynamique du fluide visqueux se rapporte vers le milieu du siècle dernier. Navier, Poisson et Stokes ont généralisé dans leurs traités (de 1822 à 1845) la formule de Newton pour le cas de la théorie générale des contraintes dans un fluide visqueux et ont établi des équations du mouvement du fluide visqueux. Par intégration de ces équations Stokes, Groméko, Pétrov et autres ont réussi à résoudre un certain nombre de problèmes théoriques sur les écoulements laminaires du fluide visqueux.

Les études expérimentales effectuées par Reynolds ont servi de base pour la détermination du critère de passage des courants laminaires aux courants turbulents et pour l'introduction de la notion du mouvement turbulent du fluide.

Au milieu du siècle dernier, la théorie des mouvements turbulents du fluide a reçu un développement considérable ; les nombreuses conclusions importantes dans ce domaine ont été faites par Helmholtz (1858) qui a déterminé également l'analogie entre le champ des tourbillons dans un fluide et le champ magnétique du courant électrique.

L'élaboration de la théorie des ondes dans un fluide, commencée à la fin du XVIIIe siècle par Lagrange, a été poursuivie au XIXe siècle par Cauchy, Poisson, Stokes, Rayleigh. Ces expériences ont abouti à la création de la théorie des ondes d'amplitude relativement faible, des ondes longues, et ont posé des fondements à l'étude des ondes d'amplitude finie.

Le début du XXe siècle voit paraître de nouvelles parties importantes de la mécanique des fluides: la théorie de l'aile et la théorie de la couche limite.

La théorie de l'aile doit sa naissance aux travaux fondamentaux de Joukovski, de Tchaplyguine, ainsi qu'aux travaux de Kutta et de Lanchester. Le rôle le plus important ont joué le célèbre théorème de Joukovski sur la force portante de l'aile, publié en 1906, l'argumentation de la notion d'un tourbillon attaché et le postulat de l'écoulement régulier autour du bord de fuite d'une aile, formulé par Joukovski et Tchaplyguine, permettant de calculer théoriquement la circulation qui apparaît autour d'une aile. La théorie tourbillonnaire de l'hélice de propulsion, créée par Joukovski, a servi de base pour toutes les études ultérieures dans cette branche.

Il est à signaler tout particulièrement que dans les travaux de Joukovski et de Tchaplyguine l'élaboration des formules théoriques pour le calcul des caractéristiques hydrodynamiques des ailes représente un cycle achevé d'expériences, car les auteurs, outre les formules, y proposent également des méthodes de construction des familles de profils d'ailes théoriques qui portent leurs noms.

Le développement ultérieur de la théorie de l'aile est lié aux noms des élèves et des disciples de Joukovski et de Tchaplyguine: V. Goloubev, N. Kotchine, A. Nékrassov, A. Dorodnitsyne, M. Keldyche, M. Lavrentiev, L. Sédov, S. Biélotserkovski, S. Noujine, N. Poliakhov, J. Sérébriiski, C. Fédiaevski, ainsi qu'aux noms des chercheurs étrangers: Prandtl, Glauert, Mises, Carafoli et autres. Dans les travaux de ces savants ont été élaborés la théorie des ailes d'envergure finie et de faible envergure, les méthodes de calcul des profils réels, la théorie des mouvements non stationnaires de l'aile et d'autres problèmes importants.

Les idées qui ont servi de base à la théorie de la couche limite se rencontrent dans les travaux de Rankine, Mendéléev et Joukovski, publiés encore au XIXe siècle, cependant ses bases mathématiques ont été posées par Ludwig Prandtl en 1904. Plus tard, cette théorie, ainsi que la théorie de la turbulence liée à cette dernière, a été développée, outre Prandtl lui-même, par Kármàn, Blasius, Pohlhausen, Schlichting, Tollmien, John Taylor. Une grande contribution à la théorie de la couche limite et à la théorie de la turbulence ont apporté les savants soviétiques N. Kotchine, A. Kolmogorov, M. Millionchtchikov, L. Loïtsianski, A. Monine, K. Fédiaevski, A. Melnikov, G. Abramovitch et autres. Leurs travaux ont permis de créer les méthodes de calcul des couches limites laminaire et turbulente, la théorie de la turbulence semi-empirique et statistique, la théorie des filets, la théorie de l'équilibre hydrodynamique des écoulements, ainsi que d'élaborer les méthodes de commande de la couche limite.

Par suite de l'élaboration de l'hydrodynamique des navires très rapides dans les années vingt de ce siècle, une grande importance a été attribuée à la théorie des écoulements par filets et avec cavitation.

Les méthodes, développées encore à la fin du XIXe siècle par Helmholtz, Kirchhoff et Joukovski et en 1932-1933 par Tchaplyguine et Wagner, ont servi de base à l'élaboration des principes de la théorie du glissement, développée par la suite avec succès par N. Kotchine, L. Sédov, L. Srétenski, M. Gourévitch et autres. Ces derniers temps se développe de façon intense la théorie de l'écoulement autour des corps avec cavitation et avec décollement, cette théorie étant également basée sur les schémas d'écoulements par filets. Une contribution importante dans ce domaine a été apportée par Efros, Riabouchinski, Rochko, Touline et autres.

Une grande importance pour l'étude des problèmes de l'hydrodynamique du navire revient à la théorie du mouvement des corps au voisinage de la surface ainsi que sur la surface libre de l'eau. La naissance de cette théorie se rapporte à la fin du siècle dernier et au commencement du XXe siècle, quand Michell et Joukovski ont pour la première fois posé et étudié dans leurs travaux les problèmes de la résistance ondulatoire et la formation des ondes par des navires

de formes simplifiées. La solution la plus complète du problème des forces qui apparaissent en mouvement des corps sous la surface libre a été obtenue dans les travaux de N. Kotchine publiés en 1936-1940.

Un grand rôle ont également joué les travaux des savants soviétiques M. Keldyche, M. Lavrentiev, L. Sédov, L. Srétenski, M. Khaskind, N. Moïsséev, A. Kostukov relatifs aux problèmes de la théorie de la résistance ondulatoire, de la formation des ondes et de la théorie de l'aile sous-marine, effectués en U.R.S.S. dans les années 1930-1950, ainsi que les travaux des savants étrangers Gavelok, Wechausen, Brard et autres.

Il est à signaler que parallèlement aux études théoriques réalisées dans le domaine de la mécanique du fluide incompressible, on créait des méthodes et procédés expérimentaux. Cependant, la diversité de ces méthodes ne permet pas dans une description succincte de suivre l'histoire de leur développement.

CHAPITRE PREMIER

PROPRIÉTÉS DU FLUIDE ET ÉQUATIONS DE SON MOUVEMENT

§ 1. PROPRIÉTÉS DES FLUIDES

La principale différence entre la mécanique des fluides, c'est-à-dire l'hydromécanique, et la mécanique d'un corps solide réside dans les différentes propriétés de l'objet étudié. Les fluides par suite de leur mobilité ne peuvent pas, comme les corps solides, conserver la forme de leur volume.

Si on place un fluide dans un certain volume limité, alors en se déformant il prend la forme de ce volume ou d'une partie de celui-ci. La durée d'achèvement de ce processus de déformation dépend de la nature du fluide. Une telle différence de comportement des corps fluides de différentes natures, ainsi que des corps fluides et solides est due à leur structure.

Suivant leur structure, les solides peuvent être de deux types: cristallins ou amorphes. La structure cristalline est caractérisée par une disposition régulière des atomes oscillant autour de leur position d'équilibre et par une périodicité dans l'espace de toutes les propriétés. Dans les corps amorphes, les atomes oscillent autour de points fixes, disposés chaotiquement dans l'espace. Dans les deux cas, les forces d'attraction entre les molécules, malgré le mouvement thermique, les maintiennent près de leur position d'équilibre.

Dans les liquides et les gaz, la structure moléculaire est différente. La particularité des gaz consiste en ce que leurs particules, qui sont libres de se déplacer les unes par rapport aux autres, ne sont pas liées entre elles par les forces moléculaires d'attraction et tendent à occuper uniformément tout le volume qui leur est offert, c'est-à-dire qu'elles ne forment pas de surface de séparation ou de surface libre. De plus, la distance moyenne entre les particules est de beaucoup supérieure à leur dimension. La description des lois du mouvement des particules et l'étude des gaz liée avec cette propriété constituent l'objet de la théorie cinétique des gaz.

La structure moléculaire des liquides est caractérisée par un ordre déterminé de la disposition des molécules voisines. Cependant cet ordre est perturbé à mesure que la distance séparant les molécules augmente. L'existence d'un tel « ordre proche » détermine les pro-

priétés caractéristiques des liquides, qui, de plus, dépendent des particularités individuelles des molécules du liquide et des processus de leur interaction. La nature du mouvement thermique de ces fluides consiste en ce que les molécules oscillent autour de leur position d'équilibre pendant un court laps de temps, après quoi le centre de cet équilibre change brusquement sa position dans l'espace.

Sous l'influence d'une force extérieure, la direction de ces changements brusques peut changer, en adoptant un sens déterminé quelconque, ce qui provoque un écoulement du liquide dans le sens d'action de la force. L'étude détaillée de ces phénomènes compliqués est de ressort de la théorie cinétique des liquides. Grâce à l'existence dans les liquides de forces d'attraction moléculaires notables, bien que moindres que dans les corps solides, la grandeur de leur volume change peu sous l'action des forces extérieures, c'est-à-dire qu'ils sont peu compressibles. A la pression atmosphérique, la compressibilité de l'eau est de 14 000 fois moindre que celle de l'air.

Ainsi la propriété caractéristique des liquides est leur faculté de former une surface libre ou une surface de séparation avec un gaz ou un autre liquide. Le long de cette surface agissent des forces de tension superficielle.

Malgré que les structures moléculaires des gaz et des liquides diffèrent du point de vue des lois de leur mouvement, ils ont beaucoup de commun dans un grand nombre de cas. Les expériences montrent que les formules de la mécanique des fluides déduites pour les fluides incompressibles sont valables aussi pour les gaz, si la vitesse de leur mouvement ne dépasse pas une certaine limite. Cette limite dépend du rapport de la vitesse de déplacement du gaz à la vitesse du son; lorsque ce rapport est égal à 0,2, l'erreur possible de détermination de la pression du gaz suivant les formules des fluides incompressibles ne dépasse pas 1%. Etant donné que la vitesse du son dans l'air est d'environ 350 m/s, il résulte de ce qui a été dit ci-dessus, que pour les vitesses de l'air jusqu'à 70-75 m/s les lois du mouvement des liquides et des gaz sont les mêmes. En partant de ce fait, on remplace en constructions navales les essais des modèles profondément immergés se déplaçant dans l'eau par leur essai dans un courant d'air, par exemple dans une soufflerie aérodynamique.

Malgré la différence des structures des liquides et des gaz, en mécanique des fluides on utilise un modèle de fluide unique conventionnel. Ce modèle de fluide conventionnel est considéré comme un milieu déformable continu, dont n'importe quel volume infiniment petit possède les mêmes propriétés qu'un volume de dimensions finies.

L'introduction de la notion du milieu continu permet de considérer toutes les grandeurs caractéristiques qui décrivent ses propri-

tés, les particularités du mouvement et les forces qui y agissent comme fonctions continues des coordonnées de l'espace dans lequel se trouve le fluide. Comme les propriétés physiques du fluide et les paramètres de son écoulement sont décrits par différentes grandeurs scalaires, vectorielles et parfois tensorielles, la propriété de continuité des fluides permet d'employer largement en mécanique des fluides l'appareil mathématique de la théorie des fonctions continues, y compris la théorie des champs scalaires et vectoriels.

En partant de la notion de continuité d'un fluide et de sa propriété de mobilité, il faut, dans le cas général, considérer l'écoulement du fluide, par exemple dans le cas de l'écoulement autour d'un obstacle, comme un processus de sa déformation continue, pendant lequel le phénomène de choc du fluide contre le solide n'a pas lieu. Des écartements de ceci ne peuvent avoir lieu que lors de l'étude de la dynamique des gaz extrêmement raréfiés, dans lesquels les distances entre les molécules sont très grandes.

La caractéristique principale d'un fluide est sa masse volumique ρ. Dans un espace occupé par le fluide il se forme un champ de densité scalaire.

Un fluide dont la masse volumique varie en différents points, c'est-à-dire $\rho = f(x, y, z)$, s'appelle fluide hétérogène. L'hétérogénéité du champ de densité peut être due à des impuretés contenues dans l'eau (par exemple, à une différente salinité), à des températures différentes dans diverses régions du fluide, etc. Pour définir la masse volumique d'un fluide hétérogène en un point donné, on doit isoler un volume élémentaire ΔV entourant ce point et contenant une masse de fluide Δm. Alors en supposant la surface du volume ΔV concentrée en ce point, on détermine la masse volumique comme la limite

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} . \tag{I.1}$$

Le passage à la limite dans cette formule est possible grâce à la continuité admise du fluide. La masse volumique d'un fluide homogène est constante en tous ses points et peut être déterminée au moyen d'une relation simple

$$\rho = \frac{m}{V} , \tag{I.2}$$

où m est la masse du fluide contenue dans son volume V. La formule de dimension de la masse volumique est $[\rho] = ML^{-3}$.

Pratiquement on peut considérer que la masse volumique des liquides ne dépend pas de la pression. Elle n'est fonction que de la température.

La masse volumique des fluides compressibles dépend de la température et de la pression p. Si l'on connaît la valeur de la masse

volumique d'un gaz à la température t_0° et à la pression p_0, alors quelles que soient la température t° et la pression p, on peut toujours déterminer sa masse volumique d'après la formule

$$\rho = \rho_0 \frac{p\,(273 + t_0^\circ)}{p_0\,(273 + t^\circ)}\,. \qquad \text{(I.3)}$$

Cette formule peut être obtenue à partir de l'équation d'état des gaz.

Dans les calculs pratiques on prend habituellement la masse volumique de l'eau douce égale à $\rho = 1000$ kgp/m³, ce qui correspond dans le système MKpS à $\rho = 102$ kgf s²/m⁴.

La masse volumique de l'air à une température normale de 20 °C et à une pression de 760 mm de mercure est $\rho = 1{,}293$ kgp/m³. Dans les calculs on prend souvent la valeur moyenne de la masse volumique de l'air $\rho = 1{,}228$ kgp/m³ ou $\rho = 0{,}125$ kgf s²/m⁴.

La seconde caractéristique importante d'un fluide est son poids spécifique γ qui est lié à la masse volumique par la relation

$$\gamma = \rho g, \qquad \text{(I.4)}$$

où $g = 9{,}81$ m/s² est l'accélération de la pesanteur.

La formule de dimension du poids spécifique est $[\gamma] = ML^{-2}T^{-2}$.

Le poids spécifique de l'eau douce est pris généralement dans les calculs égal à $\gamma = 9810$ N/m³ ou $\gamma = 1000$ kgp/m³. Respectivement on a pour l'air $\gamma = 12{,}04$ N/m³ ou $\gamma = 1{,}226$ kgp/m³.

Outre la masse volumique, une caractéristique importante d'un fluide est sa viscosité. Cependant lorsqu'on étudie les courants d'un fluide, on doit toujours tenir compte de l'influence de sa masse volumique, tandis que la prise en compte de l'influence de la viscosité n'est pas toujours obligatoire.

Dans un grand nombre de problèmes on peut se faire une idée suffisamment complète du caractère de courant sans tenir compte de l'influence de la viscosité sur sa structure, dont l'introduction complique notablement l'équation de mouvement du fluide et impose des conditions aux frontières supplémentaires. Pour parer à cette difficulté, on examine en mécanique des fluides deux modèles de fluides.

Un fluide dont la viscosité n'est pas prise en compte lors de l'étude de ses mouvements est dit non visqueux ou parfait. Le mouvement de tel fluide ne s'accompagne d'aucune force de frottement. Le fluide est dit visqueux ou réel si en étudiant son mouvement on tient compte de sa viscosité.

Suivant les deux modèles de fluide adoptés, on distingue deux parties de la mécanique des fluides: mécanique d'un fluide parfait et celle d'un fluide réel. Ces deux parties de la mécanique sont étudiées aussi bien pour les fluides incompressibles que pour les fluides compressibles.

§ 2. CLASSIFICATION DES FORCES AGISSANT DANS UN FLUIDE

En étudiant la mécanique d'un corps solide, on considère ordinairement deux catégories de forces: ponctuelles et réparties. Dans un fluide, il n'est généralement nécessaire d'étudier que l'action des forces réparties, car l'application à un fluide de forces ponctuelles entraîne l'apparition de discontinuité dans ce fluide.

Pour classer les forces agissant dans un fluide, utilisons la méthode des sections, connue du cours de la résistance des matériaux.

Isolons dans un fluide en mouvement un volume quelconque V limité par une surface S (fig. I.1) et rejetons par la pensée tout le fluide en dehors de ce volume. Alors les forces intérieures agissant entre les parties isolée et rejetée du fluide passeront dans la catégorie des forces extérieures distribuées sur la surface S. Ainsi l'action exercée par le fluide rejeté se manifeste sous forme de forces superficielles appliquées à une surface de séparation S.

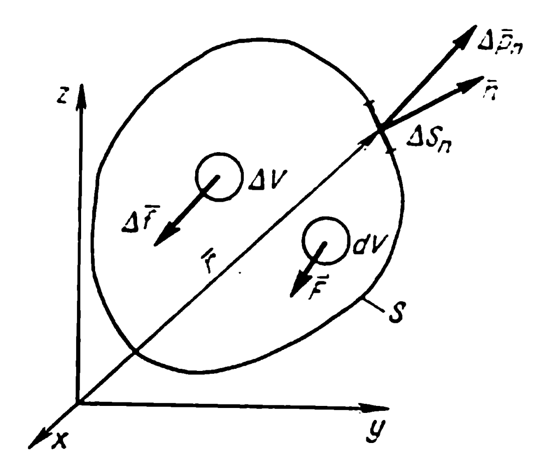


Fig. I.1

En sus de ces forces, en n'importe quel point du volume V agissent des forces de masse proportionnelles à la masse du fluide contenue dans le volume élémentaire ΔV entourant le point donné (fig. I.1). Examinons plus en détail ces deux catégories de forces.

On appelle forces de masse les forces qui s'exercent sur chaque particule de fluide et sont proportionnelles à sa masse. Désignons par $\Delta\bar{f}$ la force de masse appliquée à une particule fluide de masse $\rho\Delta V$ et introduisons la notion de contrainte de la force de masse, caractérisée au point donné par le vecteur $\bar{F}$ déterminé comme une limite de rapport du vecteur de la force de masse à la masse de la particule

$$\bar{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\bar{f}}{\rho\Delta V}. \tag{I.5}$$

Si le vecteur $\bar{F}$ est constant, alors la contrainte des forces de masse est égale au rapport de la force de masse agissant sur le volume à la masse de ce volume.

De (I.5) il s'ensuit que la contrainte des forces de masse possède la dimension de l'accélération $[\bar{F}] = LT^{-2}$.

Désignons par F_x, F_y, F_z les composantes du vecteur $\bar{F}$ sur les axes des coordonnées cartésiennes. Dans le cas général $\bar{F}$ est fonction du rayon vecteur du point $\bar{r}$ et du temps t; $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}, t)$.

Parmi les forces qui se rapportent aux forces de masse citons, par exemple, les forces de pesanteur, les forces d'inertie et les forces électromagnétiques.

Déterminons le vecteur de la contrainte des forces de masse dans le cas particulier le plus important de l'action de la force de pesanteur. Le poids d'une particule élémentaire $\Delta P = \rho \Delta V g$. Si on choisit la direction de l'axe de z vers le haut, la force de masse $\Delta\bar{f} = -\bar{k}\Delta P$, où $\bar{k}$ = vecteur unité de l'axe z.

En utilisant (I.5), nous obtenons

$$\bar{F} = -\bar{k}g \tag{I.6}$$

ou

$$F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z = -g. \tag{I.7}$$

Dans un certain nombre de cas pratiquement importants, les forces de masse sont potentielles. Désignons par U le potentiel de la contrainte des forces de masse. Avec cela, le vecteur de leur contrainte $\bar{F}$ peut être déterminé comme le gradient de la fonction scalaire U

$$\bar{F} = \operatorname{grad} U \tag{I.8}$$

ou

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \; F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \; F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{I.9}$$

Dans le cas où la force de masse est la force de pesanteur, on a suivant (I.8) et (I.9)

$$F_z = \frac{dU}{dz} = -g,$$

d'où il suit que

$$U = -gz + C. \tag{I.10}$$

La constante arbitraire C peut être rejetée car sa valeur n'influe pas sur la détermination du vecteur $\bar{F}$.

De cette façon le potentiel de la force de pesanteur se détermine par l'expression

$$U = -gz. \tag{I.11}$$

On appelle forces superficielles celles qui sont réparties suivant la surface S limitant le volume de fluide séparé.

Désignons par $\Delta\bar{p}_n$ la force superficielle appliquée à l'aire ΔS avec une normale extérieure $\bar{n}$. Dans le cas général, $\Delta\bar{p}_n$ agit sous

un certain angle par rapport à la normale extérieure. Introduisons la notion de vecteur de la contrainte des forces superficielles en un point donné d'une surface, en le déterminant comme une limite de la relation

$$\bar{p}_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \bar{p}_n}{\Delta S} . \tag{I.12}$$

De (I.12) il suit que le vecteur contrainte des forces superficielles représente le rapport de la force superficielle à la grandeur de l'aire élémentaire. Par conséquent $\bar{p}_n$ a les dimensions $L^{-1}MT^{-2}$.

Dans le cas général $\bar{p}_n$ n'est pas un vecteur ordinaire. Sa grandeur en un point donné dépend de l'orientation de l'aire, séparée à l'intérieur du volume de fluide. Autrement dit, si on trace par un point donné des aires de même grandeur, mais orientées différemment, alors les vecteurs contraintes des forces superficielles $\bar{p}_n$ agissant sur elles seront différents. Pour cette raison, dans le cas général $\bar{p}_n$ dépend du rayon vecteur du point, de l'orientation de l'aire et du temps

$$\bar{p}_n = \bar{p}_n (\bar{r}, \bar{n}, t). \tag{I.13}$$

La grandeur physique caractérisée au point donné par le vecteur $\bar{p}_n$ qui prend un nombre infini de valeurs suivant l'orientation de l'aire est dite tensorielle.

L'un des problèmes les plus importants en mécanique des fluides est la détermination des réactions hydrodynamiques agissant du côté du fluide sur le corps solide. Quand la surface S dans un fluide coïncide avec la surface du corps solide, cela indique que celle-ci éprouve de la part du fluide une contrainte $\bar{p}_n$. Par conséquent, la force élémentaire $d\bar{R}$ exercée par le fluide sur l'aire de la surface du solide dS s'exprime par l'expression

$$d\bar{R} = \bar{p}_n \, dS,$$

et le moment élémentaire par rapport à l'origine des coordonnées

$$d\bar{M} = \bar{r} \times d\bar{R} = \bar{r} \times \bar{p}_n \, dS,$$

où $\bar{r}$ est le rayon vecteur du centre de l'aire. En intégrant $d\bar{R}$ et $d\bar{M}$ sur la surface S du corps solide on obtient les formules générales de la résultante $\bar{R}$ et du moment $\bar{M}$ des forces hydrodynamiques agissant sur le corps solide

$$\bar{R} = \oint_S \bar{p}_n \, dS; \tag{I.14}$$

$$\bar{M} = \oint_S \bar{r} \times \bar{p}_n \, dS. \tag{I.15}$$

Pour l'utilisation des expressions générales (I.14) et (I.15) on doit trouver les relations qui existent entre les contraintes $\overline{p}_n$ et la vitesse d'écoulement du fluide, la forme du corps solide et les propriétés physiques du fluide. L'étude de ces dépendances constitue l'objet principal de ce cours.

Notons que les forces de masse agissant dans un fluide influent sur les réactions hydrodynamiques qui apparaissent sur un corps solide seulement par l'intermédiaire des contraintes des forces superficielles.

§ 3. PROPRIÉTÉS DES CONTRAINTES DES FORCES INTÉRIEURES AGISSANT DANS UN FLUIDE

Avant d'étudier les contraintes des forces intérieures dans un fluide, établissons le lien qui existe entre les contraintes agissant sur une aire orientée arbitrairement et les trois autres aires perpendiculaires entre elles qui passent par le point donné.

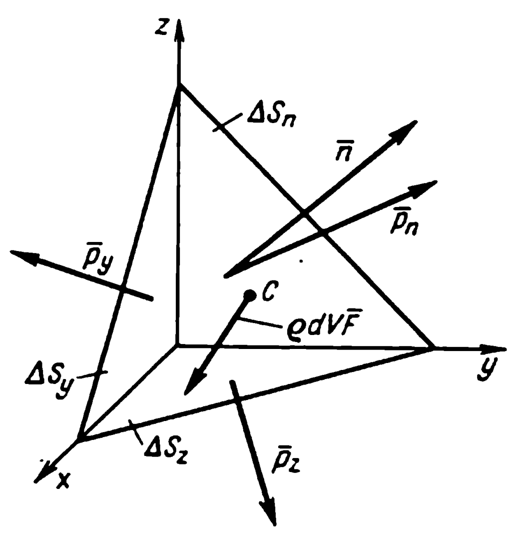


Fig. I.2

Isolons dans un fluide en mouvement une portion de fluide sous la forme d'un tétraèdre (fig. I.2). Au lieu des forces superficielles, sur les faces du tétraèdre figurent les vecteurs des contraintes dirigées arbitrairement par rapport aux faces correspondantes. Désignons l'accélération du centre de gravité de la particule par $\frac{d\overline{v}}{dt}$; la contrainte des forces de masse par $\overline{F}$. Ecrivons l'équation de mouvement de cette particule fluide sous la forme vectorielle

$$\rho\Delta V\frac{d\overline{v}}{dt}=\rho\Delta V\overline{F}+\overline{p}_n\Delta S_n-\overline{p}_x\Delta S_x-\overline{p}_y\Delta S_y-\overline{p}_z\Delta S_z, \qquad (I.16)$$

où ΔS_x, ΔS_y et ΔS_z sont les aires des faces du tétraèdre, perpendiculaires aux axes correspondants des coordonnées; $\overline{p}_n$, $\overline{p}_x$, $\overline{p}_y$, $\overline{p}_z$ les vecteurs contraintes aux centres des aires, dont les notations correspondent à la direction des normales à ces dernières; les signes moins devant les derniers termes indiquent que les normales aux aires correspondantes sont dirigées à l'inverse des axes des coordonnées.

On sait de la géométrie analytique que

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta S_x}{\Delta S_n} &= \cos(n, x);\\ \frac{\Delta S_y}{\Delta S_n} &= \cos(n, y);\\ \frac{\Delta S_z}{\Delta S_n} &= \cos(n, z).\end{aligned}\right\} \qquad (I.17)$$

Divisons les deux membres de l'équation (I.16) par ΔS_n et utilisons (I.17)

$$\rho\frac{\Delta V}{\Delta S_n}\left(\frac{d\bar{v}}{dt} - \bar{F}\right) = \bar{p}_n - \bar{p}_x\cos(n, x) - \\ - \bar{p}_y\cos(n, y) - \bar{p}_z\cos(n, z). \qquad (I.18)$$

Pour obtenir une relation entre les contraintes en un point, faisons tendre le volume du tétraèdre vers zéro, en le supposant concentré à l'origine des coordonnées. Il est évident que $\lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta S_n} = 0$, en tenant compte de ce que la relation entre les contraintes s'écrira sous la forme

$$\bar{p}_n = \bar{p}_x\cos(n, x) + \bar{p}_y\cos(n, y) + \bar{p}_z\cos(n, z). \qquad (I.19)$$

En projetant $\bar{p}_n$ sur les axes des coordonnées, on obtient

$$\left.\begin{aligned}p_{nx} &= p_{xx}\cos(n, x) + p_{yx}\cos(n, y) + p_{zx}\cos(n, z);\\ p_{ny} &= p_{xy}\cos(n, x) + p_{yy}\cos(n, y) + p_{zy}\cos(n, z);\\ p_{nz} &= p_{xz}\cos(n, x) + p_{yz}\cos(n, y) + p_{zz}\cos(n, z).\end{aligned}\right\} \qquad (I.20)$$

Le premier index des projections des contraintes dans ces relations correspond à l'aire sur laquelle agit cette contrainte donnée et le second, à l'axe sur lequel il est projeté. Les grandeurs scalaires p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} représentent les contraintes normales et p_{xy}, p_{xz}, . . ., les contraintes tangentielles agissant sur les aires déterminées.

Dans la suite, nous désignerons les contraintes tangentielles par τ

$$p_{xy} = \tau_{xy}\ ; \quad p_{xz} = \tau_{xz}\ ; \quad p_{yz} = \tau_{yz}, \ \ldots \qquad (I.21)$$

En tenant compte de ceci, récrivons (I.20) sous la forme

$$\left.\begin{aligned}p_{nx} &= p_{xx}\cos(n, x) + \tau_{yx}\cos(n, y) + \tau_{zx}\cos(n, z)\ ;\\ p_{ny} &= \tau_{xy}\cos(n, x) + p_{yy}\cos(n, y) + \tau_{zy}\cos(n, z)\ ;\\ p_{nz} &= \tau_{xz}\cos(n, x) + \tau_{yz}\cos(n, y) + p_{zz}\cos(n, z).\end{aligned}\right\} \qquad (I.22)$$

Les contraintes normales et tangentielles agissant sur les trois faces réciproquement perpendiculaires d'un parallélépipède isolé dans

le fluide sont montrées sur la fig. I.3. En appliquant le théorème des moments, pris par rapport à l'origine des coordonnées, aux contraintes agissant sur les faces du parallélépipède, on démontre facilement la propriété de la réciprocité des contraintes tangentielles suivant laquelle

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}\,; \qquad \tau_{xz}=\tau_{zx}\,; \qquad \tau_{yz}=\tau_{zy}. \tag{I.23}$$

En vertu de ce qui a été dit, on peut déduire que les contraintes des forces intérieures en un point donné du fluide, c'est-à-dire l'état de contrainte d'un fluide, sont caractérisées par l'ensemble de neuf grandeurs scalaires qui forment ce que l'on appelle tenseur des contraintes. Par suite de la propriété de réciprocité (I.23), le nombre de grandeurs indépendantes contenu dans celui-ci se ramène à six.

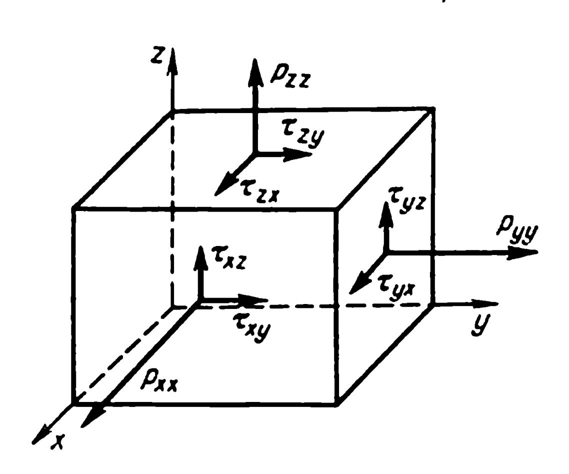


Fig. I.3

Considérons maintenant les propriétés principales des contraintes dans le fluide.

L'apparition dans un fluide de contraintes tangentielles τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} est provoquée à la fois par l'influence de deux facteurs : le mouvement du fluide et sa viscosité.

Si le fluide est au repos, les contraintes tangentielles y sont absentes, ce qui est caractéristique aussi bien pour un fluide visqueux que non visqueux. Ainsi, dans un fluide au repos (visqueux et non visqueux) et dans un fluide non visqueux en mouvement

$$\tau_{xy}=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0, \tag{I.24}$$

c'est-à-dire seules les contraintes normales p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} qui agissent. Les vecteurs de contraintes correspondants sont

$$\bar{p}_n=\bar{n}p_{nn}\,; \quad \bar{p}_x=\bar{i}p_{xx}\,; \quad \bar{p}_y=\bar{j}p_{yy}\,; \quad \bar{p}_z=\bar{k}p_{zz}. \tag{I.25}$$

En portant (1.25) dans l'équation (I.19) nous obtenons

$$\bar{n}p_{nn}=\bar{i}p_{xx}\cos(n,\,x)+\bar{j}p_{yy}\cos(n,\,y)+\bar{k}p_{zz}\cos(n,\,z). \tag{I.26}$$

On sait que

$$\bar{n}=\bar{i}\cos(n,\,x)+\bar{j}\cos(n,\,y)+\bar{k}\cos(n,\,z). \tag{I.27}$$

En portant (I.27) dans le premier membre de (I.26) on obtient

$$p_{nn}\,[\bar{i}\cos(n,\,x)+\bar{j}\cos(n,\,y)+\bar{k}\cos(n,\,z)]=$$
$$=\bar{i}p_{xx}\cos(n,\,x)+\bar{j}p_{yy}\cos(n,\,y)+\bar{k}p_{zz}\cos(n,\,z). \tag{I.28}$$

En comparant dans cette expression les coefficients des vecteurs unités, on trouve:

$$p_{nn} = p_{xx}; \quad p_{nn} = p_{yy}; \quad p_{nn} = p_{zz} \tag{I.29}$$

ou

$$p_{nn} = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}. \tag{I.30}$$

Ces égalités permettent de formuler le théorème de la propriété des contraintes normales: si les contraintes tangentielles sont absentes dans un fluide, alors la contrainte normale en un point donné ne dépend pas de l'orientation de l'aire. La relation (I.30) est valable pour un fluide visqueux au repos et pour un fluide non visqueux en mouvement et au repos.

Examinons une des principales propriétés du fluide liée à la contrainte normale. Comme on le voit de la fig. I.3, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} sont dirigés dans le sens de la normale extérieure, c'est-à-dire les contraintes normales sont celles de traction, on leur attribue le signe plus.

Un corps solide subit d'une façon égale les contraintes normales de traction et de compression sans changer son état, il ne s'y forme pas avec cela de discontinuité. Un liquide, comme le montre l'expérience, est capable de subir des efforts de compression arbitraires (contraintes normales négatives) sans que la continuité soit rompue. Cependant, l'expérience montre qu'en traction le fluide est pratiquement rompu, c'est-à-dire que seuls des efforts de compression normaux y peuvent apparaître, appelés pressions.

Appelons pression p dans un fluide, en l'absence de contraintes tangentielles, la valeur de la contrainte normale prise avec le signe contraire; alors d'après (I.30)

$$p = -p_{nn} = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz}, \tag{I.31}$$

d'où il résulte que la valeur de la pression ne dépend pas de l'orientation de l'aire.

Dans le système MKpS la pression (et généralement la contrainte) est mesurée en kgf/m² et souvent en atmosphères (at)

$$1 \text{ at} = 1 \text{ kgf/cm}^2 = 10\,000 \text{ kgf/m}^2.$$

Dans le système d'unité international la pression est mesurée en newtons par mètre carré

$$1 \text{ kgf/m}^2 = 9{,}806 \text{ N/m}^2.$$

Suivant (I.25) la contrainte normale s'exprime par une pression à l'aide des formules

$$\bar{p}_n = -p\bar{n}; \quad \bar{p}_x = -p\bar{i}; \quad \bar{p}_y = -p\bar{j}; \quad \bar{p}_z = -p\bar{k}, \tag{I.32}$$

où le signe moins signifie que la contrainte normale dans le fluide est toujours dirigée en sens inverse à la normale extérieure et est une contrainte de compression.

La pression dans un fluide sans porter atteinte à sa continuité, comme le montrent les expériences, ne descend pas au-dessous de la pression p_s de la vapeur saturée

$$p \geqslant p_s > 0. \tag{I.33}$$

La définition de la pression donnée ci-dessus est valable pour un fluide visqueux et non visqueux au repos ainsi que pour un fluide non visqueux en mouvement. Sa définition plus générale pour un fluide visqueux en mouvement est donnée dans le chapitre VIII. Notons seulement ici que la définition de la pression donnée ci-dessus peut avec une précision pratiquement suffisante s'employer aussi pour l'étude du mouvement d'un fluide peu visqueux, par exemple de l'eau ou de l'air.

§ 4. ÉQUATIONS DE MOUVEMENT D'UN FLUIDE EN CONTRAINTES

Etablissons les équations générales de mouvement d'un fluide qui déterminent la relation entre les forces extérieures et intérieures agissant sur celui-ci.

Délimitons dans un fluide en mouvement par une surface S un volume fluide quelconque V (fig. I.1) et à l'intérieur de celui-ci une particule élémentaire fluide de masse $\rho\,dV$ et d'aire dS. A cette particule sont appliquées des forces de masse de contrainte $\bar{F}$ et des forces superficielles de contrainte $\bar{p}_n$. Ecrivons l'équation de mouvement de cette particule en désignant l'accélération de son centre de gravité par $\frac{d\bar{v}}{dt}$

$$\rho\,dV\,\frac{d\bar{v}}{dt} = \rho\,dV\bar{F} + \bar{p}_n\,dS. \tag{I.34}$$

Faisons la somme du premier et du second membres de l'équation (I.34). La sommation des deux premiers termes consiste à intégrer sur le volume et du troisième terme sur les aires de contact des particules élémentaires.

Suivant la troisième loi de Newton, les forces superficielles s'annulent mutuellement sur toutes les aires intérieures et il ne reste que les forces superficielles sur l'aire S qui délimite le volume V

$$\int_V \frac{d\bar{v}}{dt}\,\rho\,dV = \int_V \bar{F}\rho\,dV + \oint_S \bar{p}_n\,dS. \tag{I.35}$$

Ici et plus loin, les intégrales multiples ne seront distinguées que par l'indice suivant lequel on effectue la sommation. Transformons le troisième terme de l'équation (I.35) en utilisant pour cela la relation (I.19)

$$\oint_S \bar{p}_n \, dS = \oint_S [\bar{p}_x \cos(n, x) + \bar{p}_y \cos(n, y) + \bar{p}_z \cos(n, z)] \, dS. \qquad (I.36)$$

Appliquons au second membre de cette égalité la transformation de Gauss-Ostrogradski qui détermine la relation entre les intégrales de volume et de surface

$$\oint_S [\bar{p}_x \cos(n, x) + \bar{p}_y \cos(n, y) + \bar{p}_z (\cos(n, z)] \, dS =$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) dV. \qquad (I.37)$$

En substituant le second membre de (I.37) dans l'équation (I.35) nous obtenons

$$\int_V \frac{d\bar{v}}{dt} \rho \, dV = \int_V \bar{F} \rho \, dV + \int_V \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) dV. \qquad (I.38)$$

Tous les termes de l'équation (I.38) sont intégrés sur le volume. Les équations (I.35) et (I.38) sont les équations de mouvement d'un volume fluide sous la forme intégrale. Leur premier membre représente le vecteur principal des forces d'inertie, le premier terme du second membre est le vecteur principal des forces de masse et le second terme le vecteur principal des forces superficielles.

Trouvons la forme différentielle de l'équation de mouvement qui sera plus commode pour l'étude du mouvement de fluide. Regroupons tous les termes de l'équation (I.38) sous le signe somme, en transférant la force d'inertie dans le second membre,

$$\int_V \left[-\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{F} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) \right] \rho \, dV = 0. \qquad (I.39)$$

Le volume étant arbitraire, cette intégrale ne s'annule que dans le cas où la fonction sous le signe somme

$$-\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{F} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) = 0. \qquad (I.40)$$

est identiquement nulle.

Finalement, nous obtenons l'équation différentielle de mouvement du fluide en contraintes

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) \qquad (I.41)$$

qui lie les accélérations aux contraintes des forces de masse et superficielles en un point donné du courant et qui est valable aussi bien pour un fluide visqueux que pour celui non visqueux.

En projetant l'équation vectorielle (I.41) sur les axes des coordonnées nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt}&=F_x+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right);\\\frac{dv_y}{dt}&=F_y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right);\\\frac{dv_z}{dt}&=F_z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(I.42)$$

Le système d'équations (I.42) sert de base pour l'élaboration de l'hydrodynamique d'un fluide visqueux et non visqueux.

CHAPITRE II

STATIQUE DES FLUIDES

§ 5. ÉQUATIONS DE L'HYDROSTATIQUE ET LEUR INTÉGRATION

L'hydrostatique est la partie de la mécanique des fluides qui étudie l'équilibre d'un fluide. On distingue l'équilibre absolu d'un fluide quand agit seulement la force de pesanteur et l'équilibre relatif, quand le fluide subit, en sus de la force de pesanteur, l'action des forces d'inertie. Dans ce cas, le volume du fluide peut se déplacer sans se déformer, c'est-à-dire se comporter comme un corps absolument rigide, tandis que le mouvement des particules d'un fluide les unes par rapport aux autres n'a pas lieu. Ici nous examinerons seulement l'hydrostatique d'un fluide incompressible. Par conséquent, les résultats obtenus ne seront complètement valables que pour les fluides aqueux pratiquement incompressibles. Pour l'air (gaz), les relations obtenues pourront être utilisées à condition que les différences des hauteurs dans le volume de fluide considéré soient insignifiantes. Dans le cas contraire, on doit tenir compte de la variation de la masse volumique en fonction de l'altitude et de la température.

La relation entre les forces de masse et les pressions dans le fluide en équilibre est déterminée à l'aide des équations de l'hydrostatique. L'obtention de ces dernières devient possible si dans la formule (I.41) on rend nulle la dérivée de la vitesse par rapport au temps. Dans un fluide au repos, les contraintes tangentielles sont nulles et les conditions (I.24) sont vérifiées. En posant $\frac{d\bar{v}}{dt}=0$ et en tenant compte de (I.24), l'équation de l'hydrostatique peut s'écrire

$$\bar{F}-\frac{1}{\rho}\left(\bar{i}\,\frac{\partial p}{\partial x}+\bar{j}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\bar{k}\,\frac{\partial p}{\partial z}\right)=0.$$

En utilisant la notion de gradient de la fonction scalaire p, on peut présenter cette équation sous la forme d'une relation

$$\rho\bar{F}=\operatorname{grad} p \qquad \text{(II.1)}$$

qui est une équation d'équilibre d'un fluide sous la forme vectorielle. L'équation (II.1) est valable aussi bien pour l'équilibre absolu que pour l'équilibre relatif du fluide.

Elucidons les conditions d'intégration de cette équation. Pour cela, utilisons l'opération différentielle rot, en considérant $\rho =$ const,

$$\text{rot}\, \rho\overline{F} = \rho\, \text{rot}\, \overline{F} = \text{rot}\, \text{grad}\, p.$$

On sait que le tourbillon d'un vecteur potentiel est égal à zéro, c'est-à-dire

$$\text{rot}\, \text{grad}\, p \equiv 0,$$

d'où nous obtenons

$$\text{rot}\, \overline{F} = 0. \qquad \text{(II.2)}$$

La condition (II.2) montre que $\overline{F}$ est un vecteur potentiel, c'est-à-dire que le champ de contraintes des forces de masse possède dans ce cas le potentiel U

$$\overline{F} = \text{grad}\, U. \qquad \text{(II.3)}$$

Ainsi l'équilibre d'un fluide incompressible n'est possible que dans le cas où il est soumis à l'action des forces de masse potentielles.

Pour intégrer les équations d'équilibre, substituons dans (II.1) la valeur de $\overline{F}$ exprimée par le potentiel U

$$\rho\, \text{grad}\, U = \text{grad}\, p$$

ou

$$\text{grad}\, (p - \rho U) = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

L'opération de calcul du gradient est analogue à une différentiation suivant les coordonnées x, y, z. Suivant (II.4) l'expression sous le signe du gradient est constante et ne dépend pas des coordonnées x, y, z. On en déduit l'équation d'équilibre

$$p - \rho U = C, \qquad \text{(II.5)}$$

où la constante C ne dépend pas des coordonnées, c'est-à-dire elle est la même pour tous les points de l'espace. Déterminons cette constante à partir des conditions aux frontières. Supposons que pour x_0, y_0, z_0 on connaisse les valeurs de U et de p, c'est-à-dire que $U = U_0$; $p = p_0$. En portant ces valeurs dans (II.5) nous obtenons

$$p - p_0 = \rho\, (U - U_0),$$

d'où

$$p = p_0 + \rho\, (U - U_0). \qquad \text{(II.6)}$$

La grandeur $\rho\, (U - U_0)$ résulte de l'action produite sur le fluide par les forces de masse seules et ne dépend pas de la pression p_0. Pour cette raison, si aux points situés à la frontière du fluide on augmente la pression p_0 d'une certaine valeur, sans perturber l'équilibre du fluide, alors en vertu de (II.6) en tous les points du volume occupé par le fluide la pression augmentera de cette

même valeur. Ceci constitue le principe bien connu de Pascal, suivant lequel la pression extérieure appliquée à la surface d'un fluide est transmise par le fluide intégralement dans toutes les directions.

Examinons un cas particulier important, quand le fluide n'est soumis qu'à la force de pesanteur. Suivant (I.11) $U = -gz$; par conséquent, on peut représenter (II.6) sous la forme

$$p - p_0 = \rho g (z_0 - z) = \gamma (z_0 - z)$$

ou

$$p + \gamma z = p_0 + \gamma z_0 = C. \qquad \text{(II.7)}$$

La formule (II.7) exprime la loi fondamentale de l'hydrostatique.

Faisons coïncider le plan z_0 avec la surface libre du fluide $z_0 = 0$ (fig. II.2); la pression régnant à la surface libre est atmosphérique p_a. En portant ces conditions dans (II.7) nous obtenons

$$p = p_a - \gamma z. \qquad \text{(II.8)}$$

En introduisant dans cette égalité la profondeur d'immersion du point au-dessous de la surface libre $h = -z$, représentons-la sous une forme plus commode

$$p = p_a + \gamma h, \qquad \text{(II.9)}$$

où p_a est la pression absolue; $\gamma h = p_s$ la pression de surcharge, car ce terme montre qu'en ce point à la profondeur h la pression est supérieure à celle atmosphérique; parfois $p_s = \gamma h$ est appelée pression de surcharge hydrostatique.

En technique, la pression de surcharge est souvent exprimée conventionnellement par la hauteur de la colonne de fluide. Il résulte de (II.9) que la hauteur de la colonne de fluide créant la pression de surcharge p_s

$$h_s = \frac{p_s}{\gamma}. \qquad \text{(II.10)}$$

La pression de surcharge de 1 at $= 10\,000$ kgf/m² est créée par une colonne d'eau douce d'une hauteur de 10 m ou par 0,736 m de mercure.

Introduisons la notion de surface d'égale pression, c'est-à-dire d'une surface en chaque point de laquelle la pression est identique. L'équation d'une surface d'égale pression est $p =$ const. En posant dans (II.8) $p =$ const, nous obtenons

$$z = \frac{p_a - \text{const}}{\gamma} = C.$$

En vertu de cette dernière égalité, on peut conclure que dans un fluide en équilibre absolu, les surfaces d'égale pression sont des plans horizontaux parallèles à la surface libre.

L'équation (II.7) admet une interprétation géométrique simple. Pour cela divisons les deux membres de cette équation par le poids spécifique γ

$$\frac{p}{\gamma}+z=\frac{C}{\gamma}=H_{\text{abs}}, \qquad \text{(II.11)}$$

où z est la hauteur géométrique ; p/γ la hauteur piézométrique correspondant à la pression absolue p ; H_{abs} la charge hydrostatique (correspondant à la pression absolue) qui, comme il le suit de (II.11),

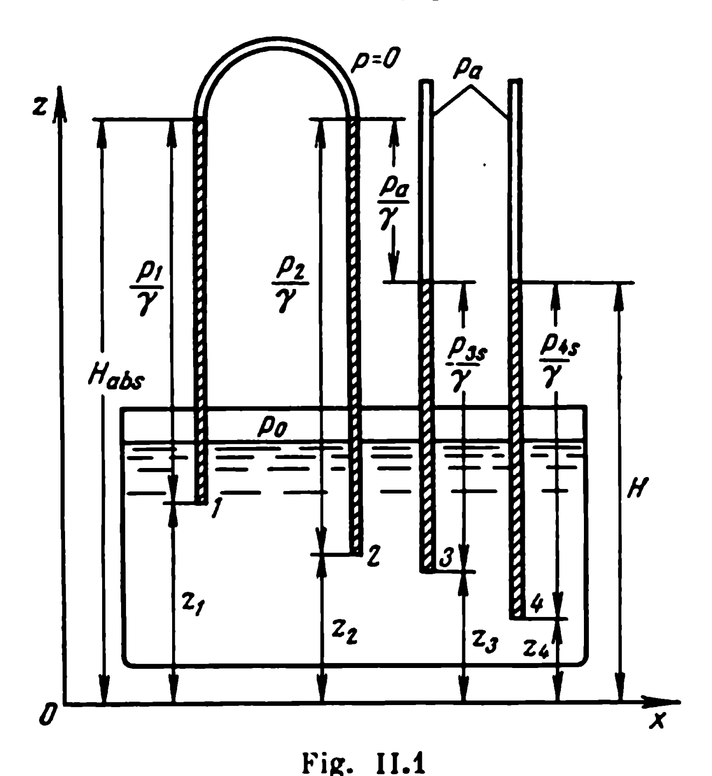


Fig. II.1

dans un liquide en l'équilibre absolu est constante en tous ses points. Elucidons ces notions par un exemple. Une cuve est remplie d'un liquide à la surface duquel règne la pression p_0 (fig. II.1). Considérons le plan ox comme plan de référence à partir duquel on compte les hauteurs géométriques. Faisons sortir de la cuve un tube en U, en prenant la pression dans sa partie supérieure $p = 0$. Sous l'action de la pression, le liquide dans les branches du tube en U s'élève à une certaine hauteur. De (II.11) il résulte que

$$\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+z_2=H_{\text{abs}}$$

c'est-à-dire que la hauteur des niveaux du liquide dans les deux branches du tube sera identique.

En soustrayant des deux membres de (II.11) la grandeur p_a/γ et en introduisant la notion de pression de surcharge, réduisons

cette expression à la forme

$$\frac{p_s}{\gamma}+z=H\ ;$$

$$H=H_{\text{abs}}-\frac{p_a}{\gamma}\ , \qquad \text{(II.12)}$$

où p_s/γ est la hauteur piézométrique correspondant à la pression de surcharge; H la charge hydrostatique, correspondant également à p_s.

Faisons sortir de la cuve (fig. II.1) les tubes communiquant avec l'atmosphère, nommés piézométriques. Sous l'action de la pression, le liquide s'élèvera dans ces tubes (*3*, *4*) à une hauteur H identique, en vertu de l'expression (II.12).

Arrêtons-nous brièvement sur l'équilibre relatif d'un fluide. Transformons les équations générales de l'équilibre relatif (II.1) en leur donnant la forme scalaire, plus commode pour l'utilisation

$$\rho F_x=\frac{\partial p}{\partial x}\ ;\quad \rho F_y=\frac{\partial p}{\partial y}\ ;\quad \rho F_z=\frac{\partial p}{\partial z}\ .$$

En multipliant les deux membres de ces équations respectivement par dx, dy et dz et en additionnant, nous obtenons l'équation différentielle de l'équilibre relatif

$$\rho\,(F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz)=\frac{\partial p}{\partial x}\,dx+\frac{\partial p}{\partial y}\,dy+\frac{\partial p}{\partial z}\,dz=dp. \qquad \text{(II.13)}$$

En se servant des projections du vecteur de contrainte des forces de masse F_x, F_y et F_z et en intégrant (II.13), on peut obtenir l'expression de la pression en un point quelconque d'un fluide en équilibre relatif.

En admettant dans le second membre de (II.13) $dp = 0$, nous obtenons l'équation différentielle des surfaces d'égale pression.

§ 6. DÉTERMINATION DES FORCES ET DES MOMENTS AGISSANT SUR LES SURFACES ET LES CORPS QUI SE TROUVENT DANS UN FLUIDE AU REPOS

En résolvant des problèmes pratiques, il faut savoir déterminer les forces résultantes et les moments des forces de pression agissant sur les surfaces et sur les corps qui se trouvent dans un fluide au repos.

Examinons une surface non fermée quelconque S se trouvant dans un fluide au repos (fig. II.2). L'origine des coordonnées se trouve à la surface libre du fluide, où la pression est atmosphérique. Sans restreindre la généralité de la déduction, on peut considérer la surface comme étant cylindrique avec une génératrice perpendiculaire au plan de la figure. Isolons une aire élémentaire dS et désignons par p la pression hydrostatique en son centre. L'aire dS peut

être considérée comme plane. La force de pression élémentaire s'exerçant sur l'aire $d\bar{R}_1$ sera

$$d\bar{R}_1 = -p\bar{n}\,dS,$$

où $\bar{n}$ est le vecteur unité de la normale extérieure.

Pour obtenir la résultante des forces de pression, il faut les intégrer sur la surface

$$\bar{R}_1 = -\int_S p\bar{n}\,dS.$$

En substituant dans la formule de $\bar{R}_1$ l'expression de la pression suivant (II.8) nous obtenons

$$\bar{R}_1 = -\int_S (p_a - \gamma z)\,\bar{n}\,dS =$$

$$= -p_a \int_S \bar{n}\,dS + \gamma \int_S z\bar{n}\,dS.$$

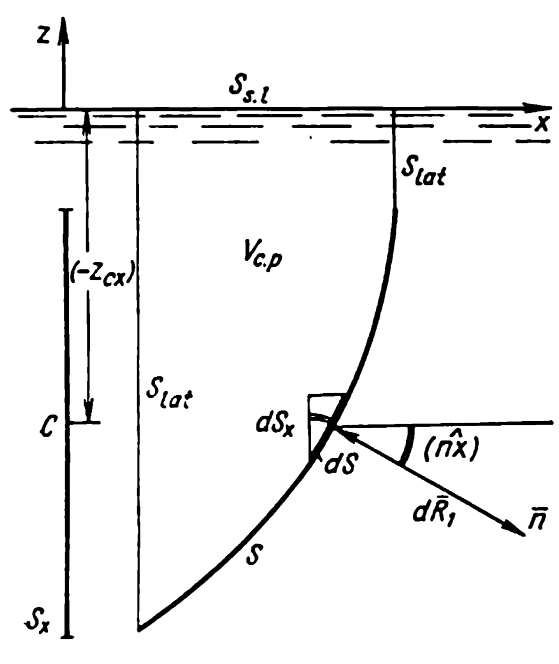


Fig. II.2

Le premier terme du second membre de cette formule traduit l'action de la pression constante à la surface libre et le second, de la pression de surcharge.

Dans la majorité des cas, seule présente un intérêt la partie de la résultante qui apparaît à la suite d'une pression de surcharge hydrostatique

$$\bar{R} = \gamma \int_S z\bar{n}\,dS. \quad \text{(II.14)}$$

En projetant (II.14) sur les axes des coordonnées, on obtient suivant la fig. II.2, l'expression pour les composantes de la force résultante

$$\bar{R} = \bar{i}R_x + \bar{k}R_z = \bar{i}\left(\gamma \int_S z\cos(n, x)\,dS\right) + \bar{k}\left(\gamma \int_S z\cos(n, z)\,dS\right),$$

d'où

$$R_x = \gamma \int_S z\cos(n, x)\,dS\,; \quad R_z = \gamma \int_S z\cos(n, z)\,dS. \quad \text{(II.15)}$$

Etudions l'expression pour la composante horizontale R_x des forces de pression agissant sur une surface gauche.

D'après la fig. II.2, $dS \cos(n, x) = dS_x$, où dS_x est une projection verticale de l'aire inclinée ; en tenant compte de ce fait on a

$$R_x = \gamma \int_S z\, dS_x.$$

L'expression sous le signe de l'intégrale représente le moment statique élémentaire de l'aire dS_x par rapport à l'axe oy. Si l'on désigne par S_x l'aire de la projection verticale de la surface S et par z_{C_x} la coordonnée de son centre de gravité, alors suivant la définition du moment statique

$$\int_S z\, dS_x = S_x z_{C_x}$$

et par conséquent l'expression pour R_x peut être présentée sous la forme

$$R_x = \gamma z_{C_x} S_x. \tag{II.16}$$

Etant donné que z_{C_x} est négative, il est évident que R_x est dirigée en sens contraire au sens positif de l'axe des x. L'expression (II.16) permet de formuler la thèse suivante : la composante horizontale des forces de pression de surcharge s'exerçant sur une paroi courbe est égale au produit de l'aire S_x de la projection verticale de cette paroi par la pression hydrostatique régnant au centre de gravité de l'aire de cette projection γz_{C_x}.

Trouvons l'expression pour la composante verticale R_z des forces de pression agissant sur une surface courbe. On peut l'écrire sous la forme d'une intégrale de surface fermée $S + S_{\text{lat}} + S_{\text{s.l.}}$ (fig. II.2), où S_{lat} est la surface latérale (deux secteurs) et $S_{\text{s.l.}}$ la surface libre. En effet,

$$R_z = \gamma \int_S z \cos(n, z)\, dS + \gamma \int_{S_{\text{lat}}} z \cos(n, z)\, dS + \gamma \int_{S_{\text{s.l.}}} z \cos(n, z)\, dS$$

et les deux dernières intégrales sont égales à zéro par suite de ce qu'à la S_{lat} on a $\cos(n, z) = 0$ et à la $S_{\text{s.l.}}$, $z = 0$. Appliquons à l'intégrale de surface fermée la formule de Gauss-Ostrogradski

$$\oint_{S+S_{\text{lat}}+S_{\text{s.l.}}} z \cos(n, z)\, dS = \int_{V_{\text{c.p.}}} \frac{\partial z}{\partial z}\, dV = V_{\text{c.p.}}.$$

Le volume $V_{\text{c.p.}}$, limité par les surfaces indiquées, s'appelle volume du corps de pression. Autrement dit, il représente le volume se trouvant au-dessus de la surface gauche et limité en haut par la surface libre. En tenant compte de cette expression, on peut écrire

$$R_z = \gamma V_{\text{c.p.}}. \tag{II.17}$$

Ainsi, la composante verticale de la poussée hydrostatique s'exerçant sur une surface gauche est égale au poids du volume de fluide de ce corps de pression. Suivant la formule (II.15), R_z est dirigée verticalement vers le haut.

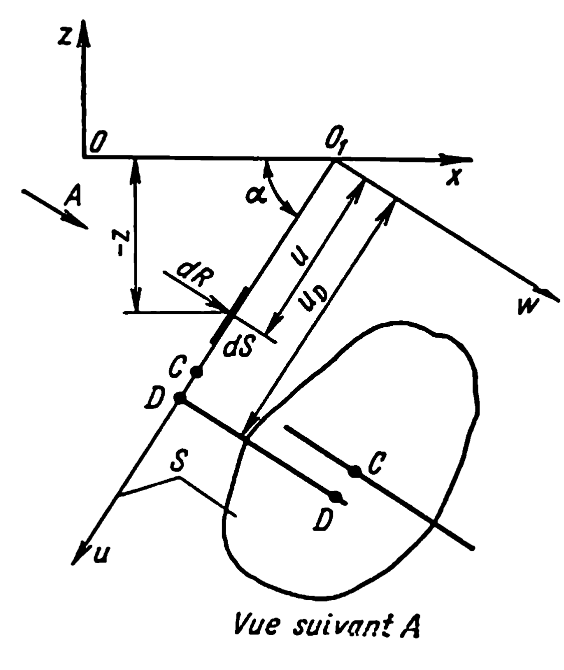


Fig. II.3

Les raisonnements précédents peuvent être complètement appliqués à un navire flottant. Dans ce cas $V_{c.p.}$ est égal au volume déplacé par la partie immergée du navire et se nomme le volume de déplacement. La poussée s'exerçant sur les parois du navire flottant est égale au poids du volume de liquide déplacé par le navire et est dirigée verticalement. Ceci est valable pour un navire au repos. En mouvement, des pressions hydrodynamiques supplémentaires apparaissent qui dépendent de la vitesse, et la grandeur de la poussée changera. Cependant, pour les navires se déplaçant à de faibles vitesses, la composante de la poussée qui dépend du mouvement est faible.

Dans le cas d'un corps totalement immergé dans un fluide, la surface S limitant le volume V est fermée et la réaction $\bar{R}$ peut être représentée sous la forme

$$\bar{R}=\gamma \oint_S z\,[\bar{i}\cos(n, x)+\bar{k}\cos(n, z)]\,dS=$$

$$=\bar{k}\gamma \int_V \frac{\partial z}{\partial z}\,dV=\bar{k}\gamma V. \qquad \text{(II.18)}$$

De l'expression (II.18), obtenue à l'aide de la formule de Gauss-Ostrogradski, il suit l'énoncé de la loi d'Archimède: la force résultante de la poussée hydrostatique s'exerçant sur un corps immergé est égale au poids du fluide contenu à l'intérieur de ce corps et est dirigée vers le haut.

Examinons d'une façon plus détaillée le cas d'une paroi plane (fig. II.3). La paroi plane est un cas particulier de la paroi gauche et pour la détermination des composantes de la résultante R_x et R_z, les formules (II.15) sont valables. Cependant dans ce cas on peut obtenir immédiatement l'expression de la résultante $\bar{R}$. Utilisons la formule générale (II.14); la direction de la normale est

identique pour tous les points de la paroi plane; pour cette raison d'après la définition du moment statique de la surface nous obtenons

$$\overline{R}=\gamma\int_S z\overline{n}\,dS=\overline{n}\gamma\int_S z\,dS=\overline{n}\gamma z_cS. \qquad \text{(II.19)}$$

De la formule (II.19) il suit que la résultante $\overline{R}$ est normale à la paroi. La grandeur de la résultante $R = \gamma z_cS$ est égale à la poussée hydrostatique régnant au centre de gravité de la paroi γz_c multipliée par sa surface.

Déterminons le point d'application D de la résultante, appelé centre de poussée. Introduisons le système de coordonnées liées à une paroi plane (fig. II.3). L'axe u, qui a pour origine la surface libre, se trouve dans le plan de la plaque, l'axe w est parallèle à l'axe y. De la figure on voit que $-z = u \sin \alpha$, où α est l'angle d'inclinaison du plan de la paroi sur l'horizontale. Le moment élémentaire des forces de la poussée hydrostatique par rapport à l'axe ow est égal à

$$dM=u\,dR=u\gamma(-z)\,dS=\gamma\sin\alpha u^2\,dS.$$

Le moment par rapport à l'axe ow s'obtient en intégrant sur la surface de la paroi plane $M = \int_S dM$.

Pour déterminer le point d'application de la résultante, dont la coordonnée sera désignée par u_D, servons-nous du théorème du moment de la résultante

$$Ru_D=M=\gamma\sin\alpha\int_S u^2dS. \qquad \text{(II.20)}$$

L'expression de R peut s'écrire sous la forme

$$R=\gamma\sin\alpha u_cS, \qquad \text{(II.21)}$$

où u_c est la coordonnée du centre de gravité.

De (II.20) il résulte que la coordonnée du centre de poussée se déterminera comme

$$u_D=\frac{\gamma\left(\int_S u^2\,dS\right)\sin\alpha}{R}=\frac{\int_S u^2\,dS}{Su_c}. \qquad \text{(II.22)}$$

En employant la notion du moment d'inertie de la surface, désignons $I_w = \int_S u^2dS$. En passant, suivant le théorème de Jouravski, au moment central d'inertie de la surface $I_c = I_w - Su_c^2$, on obtient l'expression finale de u_D sous la forme

$$u_D=u_c+\frac{I_c}{Su_c}. \qquad \text{(II.23)}$$

Etant donné que les grandeurs I_c, S et u_c sont essentiellement positives, on déduit de cette formule que le centre de poussée est situé au-dessous du centre de gravité, à une distance I_c/Su_c. Seulement quand la paroi plane est disposée parallèlement à la surface libre, le centre de poussée et le centre de gravité coïncident.

Il résulte de ce qui a été dit que la poussée s'exerçant sur un fond plan d'un vase n'est égale qu'au poids d'une colonne verticale de fluide $R = \gamma hS$ et ne dépend pas de la forme du vase. Ce phénomène, découvert au XVII[e] siècle par Pascal, a reçu le nom de paradoxe hydrostatique. Ce phénomène trouve son application en construction navale, lorsqu'il faut obtenir de grandes pressions avec une petite quantité de liquide. Par exemple, pour essayer les citernes ou les soutes à la résistance on y adapte des tubes de charge ; ayant rempli la citerne d'eau et ajouté une quantité insignifiante de liquide dans le tube de charge, on augmente considérablement la pression s'exerçant sur les parois et le fond de la citerne en l'amenant, pour une valeur déterminée du niveau de liquide dans le tube, aux valeurs requises.

CHAPITRE III

CINÉMATIQUE DES FLUIDES

§ 7. MÉTHODES D'ÉTUDE DU MOUVEMENT DES FLUIDES

La cinématique des fluides est une partie de la mécanique des fluides qui étudie seulement les propriétés géométriques du mouvement des fluides. Par conséquent, toutes les conclusions principales de la cinématique sont valables pour tout fluide, aussi bien visqueux que non visqueux.

L'étude de la cinématique des fluides est basée sur l'hypothèse de la continuité de variation des paramètres cinématiques (vitesses, accélérations). Autrement dit, la vitesse d'un fluide est supposée une fonction continue des coordonnées.

Nous admettrons également que les fonctions utilisées sont non seulement continues mais aussi différentiables; ceci permet d'employer pour l'étude du mouvement des fluides l'appareil mathématique de la théorie des fonctions continues. Parfois la propriété de continuité des paramètres cinématiques se trouve enfreinte en un point, sur une ligne, à la surface. Ces régions de discontinuité des vitesses sont appelées respectivement points singuliers, lignes et surfaces de discontinuité.

Pour la commodité de l'étude, tout volume fluide peut être considéré comme étant composé d'un grand nombre de particules fluides. Par conséquent, l'étude du mouvement d'une particule fluide peut être abordée du même point de vue que celle du mouvement d'un point en mécanique, en identifiant la particule avec un point matériel qui intervient en mécanique générale. Examinons brièvement les principales thèses de cette méthode dite méthode de Lagrange. A un moment initial de temps, isolons dans un fluide une particule fixée de coordonnées x_0, y_0, z_0. Le mouvement de cette particule est connu si l'on connaît la loi de variation des coordonnées qui caractérisent la position de la particule au cours du temps

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0); \\ y &= y(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0); \\ z &= z(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.1)}$$

En éliminant de ces équations le temps t, nous obtiendrons l'équation de la trajectoire, c'est-à-dire la trace du mouvement de la particule dans l'espace. Les projections des vitesses des particules du fluide sont déterminées par les relations

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \qquad \text{(III.2)}$$

En calculant les dérivées dans (III.2) x_0, y_0, z_0 sont considérés comme des paramètres. Dans ce cas au lieu de dérivées ordinaires, on écrit les dérivées partielles par rapport au temps

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t}; \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}; \quad v_z = \frac{\partial z}{\partial t}. \qquad \text{(III.3)}$$

Les projections du vecteur accélération $\bar{a}$ de la particule fluide sont

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \quad a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \quad a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Il est important de noter que dans l'équation (III.1) x, y, z sont les coordonnées de la particule fluide. Les coordonnées initiales x_0, y_0, z_0 qui déterminent la position de la particule choisie pour $t = t_0$, caractérisent l'individualité de cette particule.

Pour décrire le mouvement d'un volume fluide contenant N particules, on doit poser un nombre correspondant de systèmes d'équations du type (III.1) ; du point de vue mathématique, un tel problème est extrêmement compliqué, ce qui oblige à chercher d'autres méthodes d'étude.

Sous sa forme générale, la méthode de Lagrange est rarement utilisée. Cependant elle est utilisée partiellement lors de l'étude du mouvement des particules fluides.

Notons qu'en utilisant la méthode de Lagrange on peut obtenir beaucoup de renseignements sur le mouvement d'un fluide, en particulier on peut observer le mouvement de n'importe quelle particule fluide fixée, en tenant compte par cela même de son individualité. Cependant, dans la majorité des cas, il est superflu de tenir compte de l'individualité de chaque particule d'un fluide homogène, étant donné que toutes ses particules sont pratiquement identiques.

Dans l'étude du mouvement des fluides, un large emploi a reçu la méthode d'Euler. Suivant cette méthode, on examine le champ des vitesses aux points de l'espace occupé par le fluide en mouvement et on étudie le caractère de variation de la vitesse en ces points en fonction du temps. Par vitesse d'un point dans l'espace on entend la vitesse d'une particule fluide qui à l'instant donné se trouve en ce point. D'après cette méthode, le champ de vitesses est donné sous la

forme

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_x(x, y, z, t); \quad v_y = v_y(x, y, z, t); \\ v_z = v_z(x, y, z, t); \end{array}\right\} \tag{III.4}$$

ou

$$\bar{v} = \bar{v}(\bar{r}, t),$$

où x, y, z représentent les coordonnées des points de l'espace et non de la particule fluide comme dans la méthode de Lagrange.

On sait que pour décrire le mouvement d'un corps solide, il est indispensable de connaître les vitesses de ses trois points (ne se trouvant pas sur une même droite). Si l'on doit décrire le mouvement d'un fluide, c'est-à-dire d'un corps facilement déformable, il faut connaître les vitesses en tous les points de l'espace occupé. Le nombre de ces points est évidemment infini à la limite. Cette méthode de description du mouvement d'un fluide est plus simple que celle de Lagrange, car elle fait appel à l'appareil mathématique de la théorie du champ bien connu. En employant la méthode d'Euler, qui ne permet pas de tenir compte de l'individualité d'une particule séparée, on suit le comportement de différentes particules qui passent par un point fixe de l'espace.

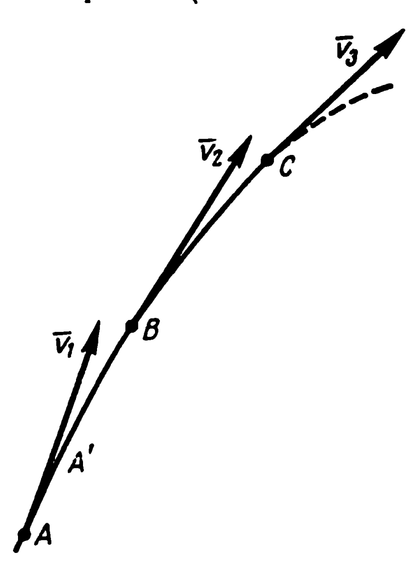


Fig. III.1

La méthode d'Euler est intimement liée à la notion de lignes de courant. Isolons dans un écoulement, à un instant déterminé, un certain nombre de points (fig. III.1). Traçons une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse de la particule fluide en ce point. On appelle cette courbe ligne de courant. Elle réunit les différentes particules fluides à un instant donné, ce qui la distingue sensiblement de la trajectoire qui est une trace du mouvement d'une particule.

Trouvons les équations différentielles des lignes de courant en tenant compte de ce que leur élément vectoriel $d\bar{r}$ coïncide avec la direction du vecteur de vitesse $\bar{v}$, c'est-à-dire $d\bar{r} \parallel \bar{v}$.

En utilisant le fait que le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est égal à zéro, écrivons l'équation différentielle des lignes de courant sous la forme vectorielle

$$\bar{v} \times d\bar{r} = 0. \tag{III.5}$$

En développant le produit vectoriel nous obtenons

$$\bar{i}\,(v_y\,dz - v_z\,dy) + \bar{j}\,(v_z\,dx - v_x\,dz) + \bar{k}\,(v_x\,dy - v_y\,dx) = 0$$

ou, en égalisant les multiplicateurs des vecteurs unités à zéro,

$$v_y\,dz - v_z\,dy = 0; \quad v_z\,dx - v_x\,dz = 0; \quad v_x\,dy - v_y\,dx = 0.$$

En divisant la première équation de ce système par $v_y v_z$, la seconde par $v_x v_z$, la troisième par $v_x v_y$, nous pouvons le présenter sous la forme

$$\frac{dz}{v_z} = \frac{dy}{v_y}; \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z}; \quad \frac{dy}{v_y} = \frac{dx}{v_x}.$$

Ces relations peuvent être écrites d'une manière plus condensée sous la forme d'un système de deux équations différentielles

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \qquad \text{(III.6)}$$

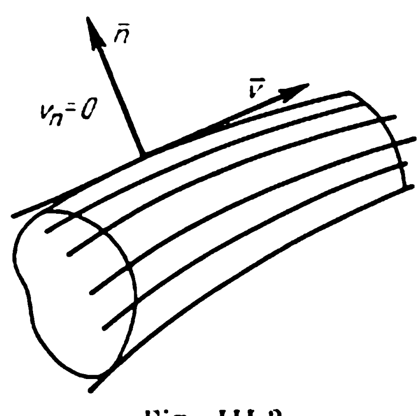


Fig. III.2

Introduisons la notion d'un tube de courant, très importante pour ce qui suit. Isolons dans un fluide un contour fermé qui n'est pas une ligne de courant (fig. III.2). Traçons par chaque point de ce contour une ligne de courant et nous obtiendrons un tube de courant. Le fluide contenu à l'intérieur de ce tube de courant s'appelle filet de courant. Dans le cas général, les vitesses du fluide suivant la section transversale du filet sont différentes. On appelle filet élémentaire le filet de courant dans lequel on peut négliger la variation des vitesses suivant la section transversale.

§ 8. CLASSIFICATION DES ÉCOULEMENTS DES FLUIDES

Examinons la dépendance entre le champ de la vitesse d'écoulement et le temps. L'écoulement d'un fluide est dit permanent si les vitesses d'écoulement en tout point de l'espace ne dépendent pas du temps. Dans le cas contraire, l'écoulement du fluide est dit non permanent. D'après cet énoncé, le champ de vitesses dans un écoulement permanent ne dépend pas du temps

$$\left.\begin{aligned} &v_x = v_x(x, y, z); \; v_y = v_y(x, y, z); \; v_z = v_z(x, y, z) \\ &\text{ou} \\ &\bar{v} = \bar{v}(\bar{r}). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.7)}$$

Examinons avec plus de détails la notion de mouvement permanent. Pour cela considérons un point donné de l'espace de coordonnées x_i, y_i, z_i par lequel passent avec le temps les différentes particules fluides. Toutes, elles possèdent en ce point de l'espace la même vitesse $\bar{v}(x_i, y_i, z_i)$ indépendamment du temps. Ce raisonnement est

valable pour tous les points de l'espace. Remarquons qu'en différents points de l'espace les vitesses sont différentes et le champ de vitesses n'est pas homogène.

Montrons que dans l'écoulement permanent d'un fluide, les trajectoires et les lignes de courant coïncident. Examinons une particule de fluide se trouvant à l'instant t_0 au point A de l'espace (fig. III.1). La ligne ABC est une ligne de courant (à l'instant t_0). Pendant le

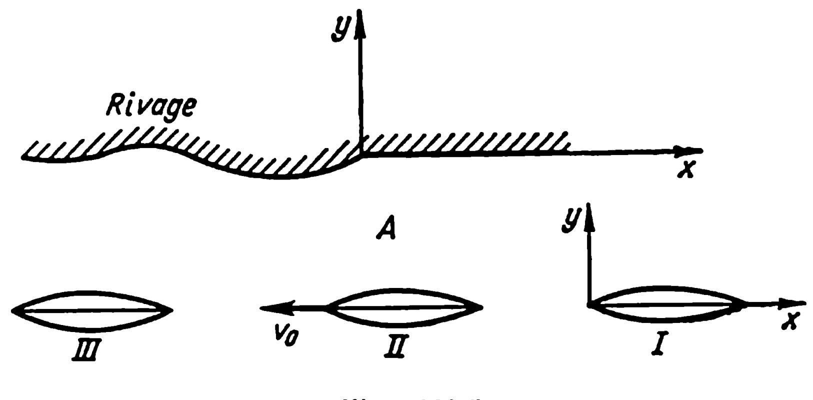


Fig. III.3

temps Δt la particule se déplacera suivant la tangente au vecteur de la vitesse $\bar{v}_1$ au point A' le long de la ligne de courant. Au point A' la vitesse au bout du temps Δt restera invariable aussi bien en grandeur qu'en direction, à la suite de quoi la particule de fluide se déplacera vers le point B le long de la ligne de courant. En reprenant ces raisonnements, on s'assure qu'en mouvement permanent la trajectoire de la particule, qui se trouvait à l'instant initial au point A, coïncide avec la ligne de courant, ce qu'il fallait démontrer.

En mouvement non permanent, la vitesse au point A' à l'instant $t_0 + \Delta t$ variera en grandeur et en direction et la particule fluide atteignant ce point se déplacera ensuite tangentiellement à la vitesse variée en s'écartant de la ligne $AA'BC$ qui est la ligne de courant à l'instant t_0.

Etablissons le caractère d'écoulement d'un fluide provoqué par un corps qui s'y déplace. Dans le cas général du mouvement d'un corps possédant six degrés de liberté, et dont les vitesses dépendent du temps, l'écoulement du fluide provoqué par ce corps sera non permanent.

L'écoulement du fluide provoqué par le mouvement d'un corps solide sera dit plus loin absolu ou provoqué.

Examinons le mouvement d'un corps suivant une trajectoire rectiligne à vitesse constante v_0 (fig. III.3). Rapportons d'abord le mouvement du corps, par exemple d'un navire, à un système de coordonnées fixe, lié à un rivage. Choisissons le point d'observation dans le fluide (point A) et observons comment change la vitesse du fluide en

ce point fixe. Lorsque le navire se trouve dans la position *I*, éloignée du point *A*, il se peut que l'observateur ne remarque pas ce mouvement du fluide en ce point. Au fur et à mesure que le navire s'approche du point *A* (position *II*), l'observateur remarquera en ce point le mouvement du fluide. Enfin quand le navire s'éloignera du point *A* (position *III*) le mouvement du fluide en ce point cessera. Ainsi, avec le temps, la vitesse du fluide varie au point *A*. Par conséquent, le mouvement examiné est non permanent. Si l'on rapporte le mouvement à un système de coordonnées mobile, dans ce cas l'observateur se trouvant sur le navire remarquera que le mouvement du liquide provoqué par le navire ne varie pas avec le temps. Autrement dit, en un point lié à un système de coordonnées mobile, les vitesses sont invariables avec le temps. Par conséquent, l'écoulement du fluide sera permanent.

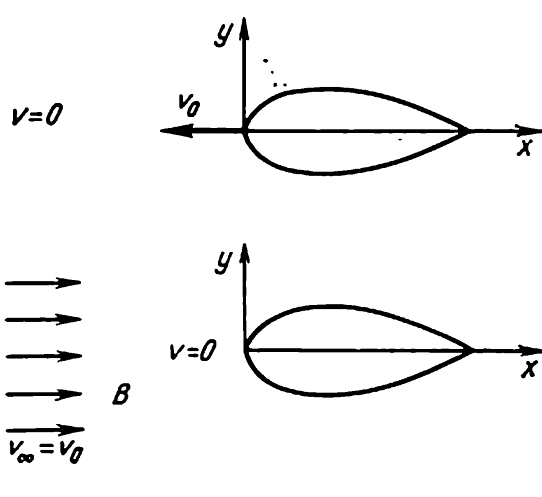


Fig. III.4

Comme il est compliqué d'examiner l'écoulement d'un fluide dans un système de coordonnées mobile, en mécanique des fluides on utilise le principe de la similitude dynamique.

D'après ce principe on imprime à toutes les particules fluides des vitesses constantes égales en grandeur et dirigées en sens contraire à la vitesse de déplacement du corps. Le corps et le système de coordonnées lié à celui-ci deviennent ainsi immobiles (fig. III.4).

L'écoulement du fluide obtenu d'après le principe de similitude est dit inversé ou relatif.

Au point de vue cinématique, les mouvements absolu et inversé du fluide sont différents (fig. III.4). Ainsi, en mouvement absolu, la vitesse d'une particule de fluide en amont d'un corps solide est égale à v_0 et en mouvement inversé, elle est égale à zéro. Loin en avant du corps ou à l'infini amont de celui-ci la vitesse en mouvement absolu est égale à zéro et en mouvement inversé $v_0 = v_\infty$.

La relation qui existe entre les vitesses du mouvement absolu $\bar{v}_a$ et celui inversé $\bar{v}_{inv}$ s'exprime par une égalité vectorielle (fig. III.4)

$$\bar{v}_{inv} = \bar{v}_a + \bar{v}_0. \tag{III.8}$$

La détermination des forces qui agissent dans un fluide est très importante. Montrons que pour les mouvements absolu et inversé ces forces sont égales. Pour cela on doit s'assurer que les accélérations proportionnelles aux forces sont identiques pour les mouvements

absolu et inversé. En dérivant l'égalité (III.8) par rapport au temps, établissons la liaison entre les accélérations

$$\frac{d\bar{v}_{\text{inv}}}{dt}=\frac{d\bar{v}_{\text{a}}}{dt}+\frac{d\bar{v}_0}{dt}. \qquad \text{(III.9)}$$

Etant donné que $\frac{d\bar{v}_0}{dt}=0$, on obtient $\frac{d\bar{v}_{\text{inv}}}{dt}=\frac{d\bar{v}_{\text{a}}}{dt}$, ce qu'il fallait démontrer.

Le principe de l'inversion du mouvement est largement utilisé en mécanique des fluides. Ce principe est utilisé dans les souffleries aérodynamiques où un courant d'air contourne un corps immobile. Il est aussi souvent utilisé dans les schémas théoriques lors d'une étude du mouvement des corps dans un fluide.

Si les corps se déplacent dans un fluide avec une vitesse variable en grandeur et en direction, le principe d'inversion est inutilisable.

La classification des écoulements énoncée ci-dessus est basée sur la dépendance du champ de vitesses du temps. Examinons maintenant la classification des écoulements d'un fluide suivant leurs caractéristiques géométriques en introduisant la notion d'un écoulement de fluide à trois dimensions, plan et à symétrie axiale. Les méthodes d'étude de ces types d'écoulement diffèrent suivant le cas.

Le mouvement d'un fluide à trois dimensions est caractérisé par ce que le champ de vitesse dans celui-ci dépend de trois coordonnées cartésiennes x, y, z ou curvilignes orthogonales q_1, q_2, q_3

$$\bar{v}=\bar{v}(x, y, z, t)$$

ou

$$\bar{v}=\bar{v}(q_1, q_2, q_3, t). \qquad \text{(III.10)}$$

Par conséquent, en écoulement à trois dimensions il y a trois projections de la vitesse sur les axes des coordonnées

$$\left.\begin{array}{l} v_x=v_x(x, y, z, t);\ v_y=v_y(x, y, z, t);\ v_z=v_z(x, y, z, t) \\ \text{ou} \\ v_{q_1}=v_{q_1}(q_1, q_2, q_3, t);\ v_{q_2}=v_{q_2}(q_1, q_2, q_3, t); \\ v_{q_3}=v_{q_3}(q_1, q_2, q_3, t). \end{array}\right\} \qquad \text{(III.11)}$$

L'étude d'un écoulement à trois dimensions représentant le cas le plus général de l'écoulement du fluide est évidemment la plus compliquée.

L'écoulement est plan lorsque le caractère de l'écoulement dans des plans perpendiculaires à un certain axe est identique. Comme tel axe choisissons z (fig. III.5). Suivant la définition, en des points homologues situés dans les plans parallèles, les vitesses sont identiques et ne dépendent pas de la coordonnée z; autrement dit

$$v_x=v_x(x, y, t);\ v_y=v_y(x, y, t);\ v_z=0. \qquad \text{(III.12)}$$

Par conséquent, en étudiant l'écoulement plan on peut se limiter à l'étude de l'écoulement seulement dans le plan xy ; c'est le cas de la résolution d'un problème dit problème plan en mécanique des fluides.

Il n'existe pas d'écoulement purement plan. Cependant, dans un grand nombre de cas pratiquement intéressants, on réussit à dégager dans un écoulement du fluide des régions où les conditions de l'écoulement plan sont approximativement observées.

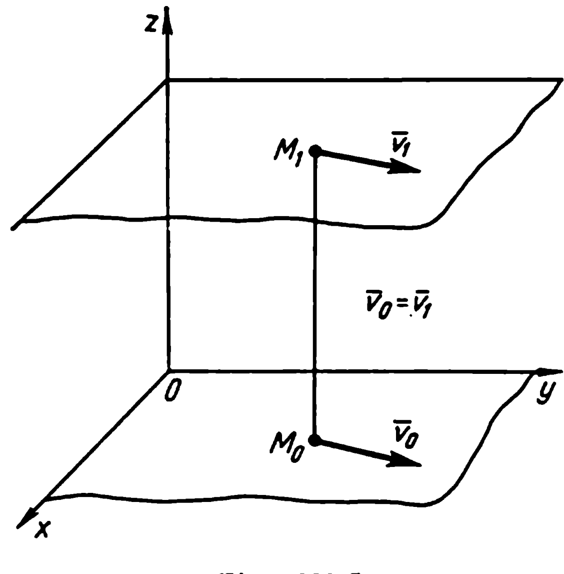


Fig. III.5

Examinons, par exemple, l'écoulement autour d'une aile ou l'écoulement transversal autour d'un corps cylindrique de grande longueur. Dans la région de leur partie moyenne, l'écoulement est proche de l'écoulement plan, dans la région des extrémités, il porte le caractère de l'écoulement à trois dimensions.

La théorie des écoulements plans du fluide est une partie la plus étudiée de la mécanique des fluides avec le plus grand nombre de solutions exactes. Pour cette raison, dans tous les cas possibles, on s'efforce de ramener l'étude d'un écoulement autour des corps à l'étude des régions plus simples avec un écoulement plan du fluide.

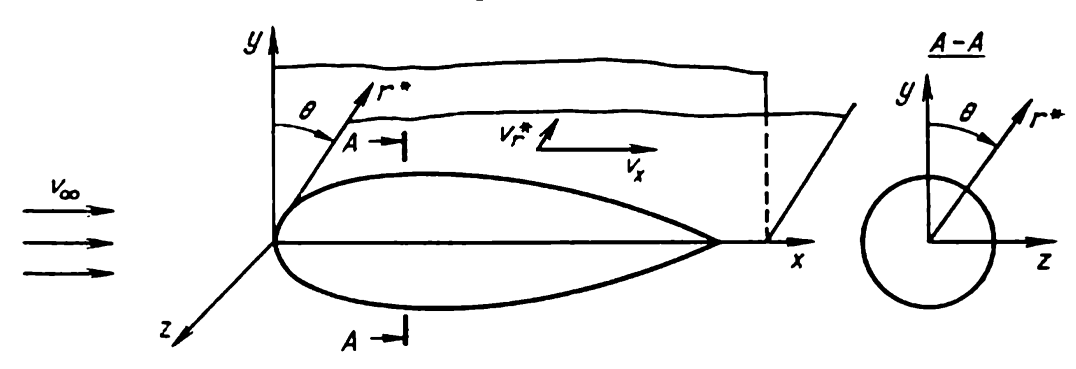


Fig. III.6

On appelle écoulement à symétrie axiale celui où les champs de vitesse sont identiques dans tous les plans passant par une certaine droite nommée axe de symétrie de l'écoulement. A titre d'exemple examinons l'écoulement autour d'un corps de révolution d'un fluide infini le long de l'axe de symétrie. Introduisons le système de coordonnées cylindriques x, r^*, θ (fig. III.6). Il est évident que dans tous les

plans (pour différents θ) la représentation de l'écoulement est identique. Dans le système de coordonnées admis il y a seulement deux projections de la vitesse qui ne dépendent pas de l'angle θ, la troisième projection de la vitesse est nulle, c'est-à-dire

$$v_x = v_x(x, r^*, t); \quad v_{r^*} = v_{r^*}(x, r^*, t); \quad v_\theta = 0. \qquad \text{(III.13)}$$

Les équations (III.13) et celles qui décrivent le mouvement plan du fluide sont semblables par la forme. En effet, les méthodes d'étude des écoulements plans et à symétrie axiale ont beaucoup de commun. Cependant entre ces méthodes il existe une différence physique notable, à la suite de quoi la résolution d'un problème à symétrie axiale de la mécanique des fluides ne peut être ramenée à la résolution d'un problème plan.

Remarquons que si l'on examine l'écoulement autour d'un corps de révolution dans le système de coordonnées cartésiennes, toutes les trois projections ne seront pas égales à zéro. La symétrie axiale de l'écoulement ne se révèle que lorsqu'on utilise le système de coordonnées cylindriques.

L'exemple d'un courant à symétrie axiale est celui du mouvement d'un fluide dans un tube de section circulaire et d'axe rectiligne.

§ 9. ACCÉLÉRATION D'UNE PARTICULE FLUIDE

Lorsqu'on intègre les équations de mouvement on doit trouver une expression pour l'accélération d'une particule fluide. Nous pouvons l'obtenir en déterminant le mouvement suivant la méthode d'Euler, quand le champ des vitesses est connu. Admettons qu'à l'instant t la particule fluide se trouvait au point M de l'espace avec les coordonnées x, y, z, sa vitesse étant $\bar{v}(x, y, z, t)$ (fig. III.7). Au bout d'un intervalle de temps Δt, cette particule s'est déplacée en un autre point de l'espace, où la vitesse est déterminée par les coordonnées $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$,

$$\bar{v}_1 = \bar{v}(x + \Delta x, \; y + \Delta y, \; z + \Delta z, \; t + \Delta t).$$

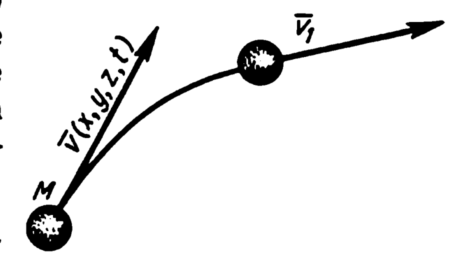


Fig. III.7

De la mécanique on sait que l'accélération $d\bar{v}/dt$ est définie comme une limite du quotient de la différence des vitesses de la particule dans ses deux positions par l'intervalle de temps tendant vers zéro

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{v}(x + \Delta x, \; y + \Delta y, \; z + \Delta z, \; t + \Delta t) - \bar{v}(x, y, z, t)}{\Delta t}.$$

Développons $\bar{v}_1$ en série de Taylor, en nous limitant aux premiers termes du développement

$$\bar{v}_1 = \bar{v}(x, y, z, t) + \\ + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\Delta t + \varepsilon,$$

où ε sont les infiniment petits d'ordres supérieurs.

En portant cette expression dans la formule pour $d\bar{v}/dt$ et en divisant par Δt, nous obtenons

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\Delta t}\right).$$

Passons à la limite. Dans cette expression $\partial\bar{v}/\partial x$, $\partial\bar{v}/\partial y$, $\partial\bar{v}/\partial z$ sont déterminés au point x, y, z, c'est-à-dire ne dépendent pas du passage à la limite ; $\Delta x/\Delta t$ dans le cas du passage à la limite est égal à la projection de la vitesse v_x

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x.$$

Finalement, en passant à la limite nous obtenons l'expression

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = v_x\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}, \tag{III.14}$$

qui permet de conclure que l'accélération totale $d\bar{v}/dt$ se forme de deux composantes : de l'accélération convective (ou d'entraînement) $v_x\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$ et de l'accélération locale $\partial\bar{v}/\partial t$.

Comme il suit de la déduction, l'accélération locale $\partial\bar{v}/\partial t$ résulte de la variation avec le temps de la vitesse en des points de l'espace, c'est-à-dire quand le mouvement du fluide est varié. Le symbole de la dérivée partielle indique que lors de son calcul, les coordonnées des points sont considérées comme invariables. En mouvement permanent, l'accélération locale $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$.

L'apparition de l'accélération convective $v_x\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$ est due au fait qu'en différents points de l'espace les vitesses sont différentes. Pour cette raison, l'accélération convective et, par conséquent, l'accélération totale dans un écoulement permanent n'est pas égale à zéro. Seulement dans le cas particulier d'un champ de vitesses homogène, quand $\bar{v}$ ne dépend pas des coordonnées, l'accélération convective est égale à zéro.

En projetant (III.14) sur l'axe des coordonnées nous obtenons

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt}&=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_x}{\partial t};\\ \frac{dv_y}{dt}&=v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_y}{\partial t};\\ \frac{dv_z}{dt}&=v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial t}.\end{aligned}\right\} \quad \text{(III.15)}$$

Illustrons les thèses énoncées ci-dessus par un exemple de l'écoulement permanent du fluide dans un canal de section variable (fig.

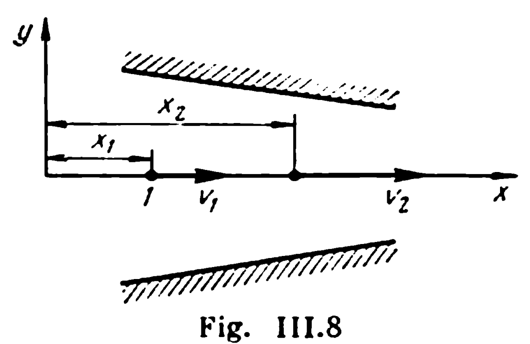


Fig. III.8

III.8). Lors du déplacement d'une particule du point *1* au point *2* la vitesse varie, c'est-à-dire que la particule fluide possède une accélération convective dont la valeur moyenne est

$$\left(\frac{dv_x}{dt}\right)_{\text{moy}}=\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{\text{moy}}=\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)\left(\frac{v_2-v_1}{x_2-x_1}\right).$$

§ 10. ANALYSE DU MOUVEMENT D'UNE PARTICULE FLUIDE

On se convainc facilement de ce que la classification des mouvements d'un fluide d'après la dépendance des vitesses d'écoulement du temps et des coordonnées ne permet de donner qu'une description extérieure de leurs particularités. Pour mettre en évidence les particularités intérieures de l'écoulement, il faut étudier la distribution des vitesses à l'intérieur de la particule fluide. Ceci permettra de juger de son mouvement en général.

Lorsqu'on étudie un phénomène quelconque suivant la méthode rationnelle on le compare avec un autre phénomène, plus simple, en déterminant les particularités du phénomène compliqué par rapport au phénomène simple. Faisons de même : comparons le mouvement d'une particule fluide avec le mouvement d'un corps absolument solide, connu de la mécanique générale. Le mouvement d'une particule fluide est d'un caractère plus compliqué, étant donné qu'à la différence d'un corps solide elle peut se déformer, même très sensiblement par rapport à un corps solide élastique.

Examinons une particule fluide (fig. III.9). Un point quelconque M_0 situé à l'intérieur de celle-ci de coordonnées x_0, y_0, z_0 sera pris pour pôle. Introduisons le système de coordonnées x_1, y_1, z_1 lié à cette particule et ayant le pôle pour origine. Les axes des systèmes de coordonnées fixe et lié sont parallèles. Désignons par $\bar{v}_0 = \bar{v}(x_0, y_0, z_0, t)$ la vitesse du pôle. Le rayon vecteur du point quelconque M à l'intérieur de la particule $\bar{r}_1 = \bar{i}(x - x_0) + \bar{j}(y - y_0) + \bar{k}(z - z_0)$. La vitesse du point quelconque M de la particule fluide

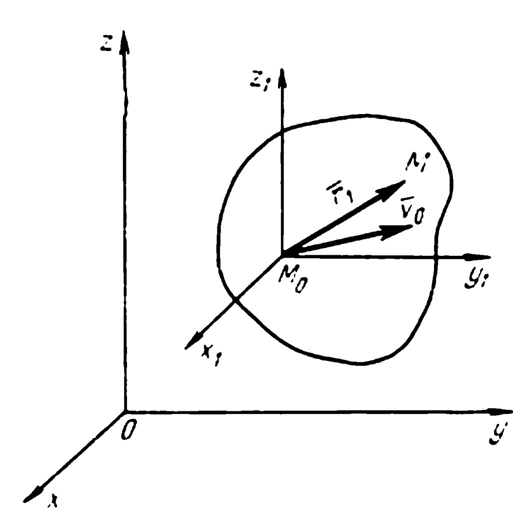


Fig. III.9

$$\bar{v}(x, y, z, t) = \bar{v}(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1, t). \quad \text{(III.16)}$$

Développons cette fonction en série de Taylor dans le voisinage du pôle en nous limitant aux premiers termes de développement. Considérons le temps t comme un paramètre, c'est-à-dire étudions la répartition des vitesses à l'instant donné. En tenant compte de ce que par suite du parallélisme des axes des coordonnées $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1}$, etc., nous obtenons

$$\bar{v}(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1, t) = \bar{v}(x_0, y_0, z_0, t) + \\ + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)_0 z_1, \quad \text{(III.17)}$$

où le premier terme $\bar{v}(x_0, y_0, z_0, t) = \bar{v}_0$ représente la vitesse du pôle.

Les coefficients de développement $\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)_0$ sont déterminés au point du pôle, c'est-à-dire qu'on peut les considérer comme certaines grandeurs données. Par la suite, nous omettrons l'index « 0 » affecté aux dérivées.

Dans le développement nous avons rejeté les grandeurs du second ordre et d'ordres supérieurs $\left[\text{les termes du type } \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}\right) x_1^2 + \ldots\right]$; cela signifie que les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point M doivent être notoirement petites, pour qu'on puisse négliger les termes d'ordres supérieurs. Pour cette raison, l'analyse exposée ci-dessous n'est valable que pour une particule fluide de petites dimensions. Ceci constitue la première différence notable entre l'analyse du mouvement d'un corps solide et d'un fluide. Rappelons que la formule connue rela-

tive à la distribution des vitesses dans un corps solide est valable indépendamment des dimensions du corps.

Pour les transformations ultérieures, il est utile d'examiner une des projections de la vitesse. En projetant (III.17) sur l'axe des x nous obtenons

$$v_x = v_{0x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_x}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_x}{\partial z} z_1. \qquad \text{(III.18)}$$

Effectuons dans (III.18) une transformation identique en ajoutant au second membre et en en soustrayant les termes $\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial x} y_1 + \right.$ $\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial x} z_1\right)$, et regroupons les termes avec les mêmes coordonnées y_1 et z_1

$$\left.\begin{aligned}
v_x = v_{0x} &+ \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) y_1 + \frac{1}{2} \times \\
&\times \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) z_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) z_1 - \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) y_1; \\
v_y = v_{0y} &+ \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) z_1 + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) x_1 + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) x_1 - \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) z_1; \\
v_z = v_{0z} &+ \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) x_1 + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) y_1 + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) y_1 - \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) x_1.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.19)}$$

Les formules pour v_y et v_z sont obtenues à partir de l'expression pour v_x par la méthode de permutation circulaire des indices. Intro-

duisons les notations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}; & \theta_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right); & \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right);\\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y}; & \theta_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right); & \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right);\\
\varepsilon_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}; & \theta_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right); & \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{III.20}$$

Les grandeurs déterminées par les formules (III.20) sont constantes pour le point donné du pôle. Elucidons leur sens physique.

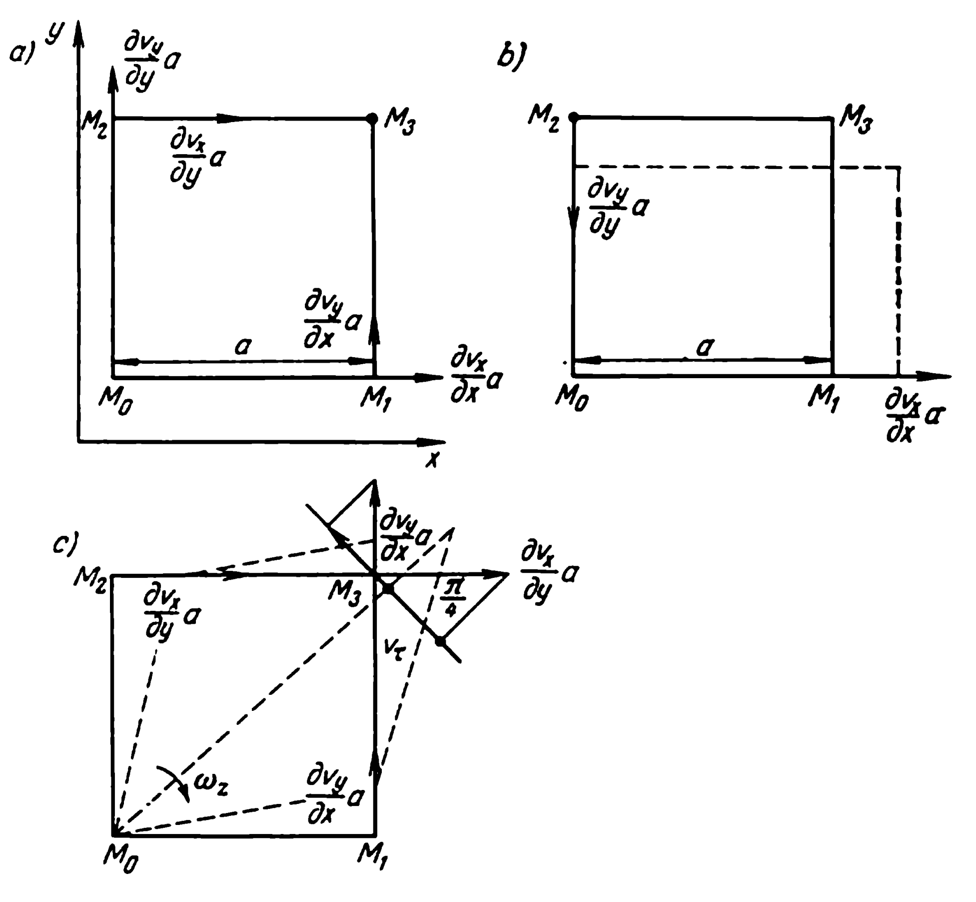


Fig. III.10

Pour simplifier, examinons le mouvement plan d'un fluide. Isolons une particule fluide ayant une section transversale carrée de côté a (fig. III.10). Prenons le point M_0 comme pôle. Nous jugerons des déformations possibles de la particule fluide sur les déplacements des points caractéristiques M_1 et M_2, c'est-à-dire sur le mouvement des arêtes perpendiculaires du carré M_0M_1 et M_0M_2. Les projections des vitesses de déplacement des points M_1 et M_2 par rapport au pôle

M_0 peuvent être représentées sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} v_{1x}-v_{0x}&=\frac{\partial v_x}{\partial x}a; \quad & v_{2x}-v_{0x}&=\frac{\partial v_x}{\partial y}a;\\ v_{1y}-v_{0y}&=\frac{\partial v_y}{\partial x}a; \quad & v_{2y}-v_{0y}&=\frac{\partial v_y}{\partial y}a. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.21)}$$

D'après la fig. III.10,*a*, où sont montrées les vitesses relatives des points M_1 et M_2, on voit que la particule fluide qui avait initialement sa section transversale de la forme d'un carré peut subir des déformations linéaires d'allongement des arêtes sous l'action des vitesses dirigées le long de celles-ci et des déformations angulaires de glissement des arêtes sous l'action des forces normales aux arêtes. Pour l'analyse ultérieure, il est utile d'examiner les cas particuliers de déformation.

Posons $\partial v_x/\partial y = \partial v_y/\partial x = 0$. Dans ce cas la particule ne subit que les déformations d'allongement (fig. III.10,*b*) ; les déformations angulaires des arêtes n'ont pas lieu, par conséquent, d'après (III.21)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=\frac{v_{1x}-v_{0x}}{a}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y}=\frac{v_{2y}-v_{0y}}{a}, \qquad \text{(III.22)}$$

d'où, si l'on tient compte des notations (III.20), il suit que les coefficients $\varepsilon_x = \partial v_x/\partial x$, $\varepsilon_y = \partial v_y/\partial y$ caractérisent la vitesse relative d'allongement des arêtes de la particule lors de la déformation (vitesse rapportée à la longueur de l'arête a). Pour cette raison ε_x et ε_y ainsi que le coefficient ε_z qui leur est analogue sont appelés vitesses relatives d'allongement. Sur la fig. III.10,*b* sont montrées (sous forme superposée) les positions de la particule avant la déformation linéaire (lignes continues) et après la déformation linéaire (lignes pointillées).

Posons maintenant $\partial v_x/\partial x = \partial v_y/\partial y = 0$, c'est-à-dire supposons que les déformations linéaires d'allongement des arêtes n'aient pas lieu. Dans ce cas (fig. III.10,*c*) les arêtes M_0M_1 et M_0M_2 tourneront par rapport au pôle M_0. Désignons par δ_1 et δ_2 les angles de rotation des arêtes M_0M_1 et M_0M_2 et par ω_1 et ω_2 les vitesses angulaires. Adoptons la règle habituelle des signes: les rotations dans le sens contraire de l'horloge seront positives, dans le sens de l'horloge, négatives. De la fig. III.10,*c* on voit que

$$\omega_1=\frac{d\delta_1}{dt}=\frac{\partial v_y}{\partial x}; \quad \omega_2=-\frac{d\delta_2}{dt}=-\frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Il est naturel de prendre pour la grandeur caractérisant la vitesse angulaire de rotation de toute la particule dans son ensemble la moyenne arithmétique des vitesses angulaires de rotation des arêtes perpendiculaires

$$\omega_z=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \qquad \text{(III.23)}$$

L'indice z indique que la rotation s'effectue dans un plan perpendiculaire à l'axe des z. Calculons la vitesse angulaire de rotation de la bissectrice M_0M_3 de l'angle entre les deux directions perpendiculaires. Il est évident que $\overline{M_0M_3} = a\sqrt{2}$. De la fig. III.10,*c* on voit que $\omega_3 = \frac{v_\tau}{a\sqrt{2}}$; ici v_τ est la projection de la vitesse du point M_3 sur la direction perpendiculaire à la bissectrice

$$v_\tau = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} a\right) \cos\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} a\right) \cos\frac{\pi}{4} = $$
$$= \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Suivant la dernière relation

$$\omega_3 = \frac{v_\tau}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \omega_z,$$

c'est-à-dire que la vitesse angulaire de rotation de la particule est égale à la vitesse angulaire de rotation de la bissectrice de l'angle pris entre les deux directions perpendiculaires partant du pôle.

Maintenant il est facile de déterminer le sens physique de la grandeur θ_z qui est une demi-somme des vitesses des variations des angles des arêtes perpendiculaires, prises en valeur absolue. Cette grandeur est dite vitesse de glissement relative

$$\theta_z = \frac{1}{2}\left[\left|\frac{d\delta_1}{dt}\right| + \left|\frac{d\delta_2}{dt}\right|\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \quad \text{(III.24)}$$

Si initialement (fig. III.10,*c*) l'angle entre les arêtes était égal à $\frac{\pi}{2}$, après un intervalle de temps dt il a diminué de la valeur $\left|\frac{d\delta_1}{dt}\right| + \left|\frac{d\delta_2}{dt}\right| = 2\theta_z$ et constituait $\pi/2 - 2\theta_z$. Autrement dit, la vitesse de glissement θ_z représente la moitié de la vitesse de variation de l'angle entre les deux directions initialement perpendiculaires entre elles. Les grandeurs ω_x, ω_y, θ_x, θ_y introduites pour le cas général du mouvement ont le même sens physique.

En tenant compte de (III.20) les expressions (III.19) peuvent être représentées sous la forme

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + (\varepsilon_x x_1 + \theta_y z_1 + \theta_z y_1) + (\omega_y z_1 - \omega_z y_1);\\ v_y &= v_{0y} + (\varepsilon_y y_1 + \theta_z x_1 + \theta_x z_1) + (\omega_z x_1 - \omega_x z_1);\\ v_z &= v_{0z} + (\varepsilon_z z_1 + \theta_x y_1 + \theta_y x_1) + (\omega_x y_1 - \omega_y x_1). \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.25)}$$

Introduisons la fonction quadratique

$$\Phi = \frac{1}{2}(\varepsilon_x x_1^2 + \varepsilon_y y_1^2 + \varepsilon_z z_1^2 + 2\theta_x y_1 z_1 + 2\theta_y x_1 z_1 + 2\theta_z x_1 y_1). \quad \text{(III.26)}$$

Il est facile de voir que $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=\varepsilon_x x_1+\theta_y z_1+\theta_z y_1$; d'une manière analogue on calcule les dérivées par rapport à y et z.

En constatant ensuite que $\omega_y z_1-\omega_z y_1=(\bar{\omega}\times\bar{r}_1)_x$, on peut récrire (III.25) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} v_x&=v_{0x}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}+(\bar{\omega}\times\bar{r}_1)_x;\\ v_y&=v_{0y}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}+(\bar{\omega}\times\bar{r}_1)_y;\\ v_z&=v_{0z}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}+(\bar{\omega}\times\bar{r}_1)_z \end{aligned}\right\} \tag{III.27}$$

ou

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\mathrm{grad}\,\Phi+\bar{\omega}\times\bar{r}_1. \tag{III.28}$$

C'est la formule définitive de la répartition des vitesses dans une particule fluide. En la comparant avec la formule connue de la répartition des vitesses dans un corps solide, on voit qu'elle ne se distingue extérieurement que par la présence du terme grad Φ. Des raisonnements physiques énoncés ci-dessus il devient évident que ce terme caractérise le mouvement de déformation de la particule fluide. En introduisant le vecteur vitesse du mouvement de déformation $\bar{v}_{\text{déf}}=\mathrm{grad}\,\Phi$, on peut récrire (III.28) sous la forme

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\bar{r}_1+\bar{v}_{\text{déf}}. \tag{III.29}$$

La relation obtenue représente la formulation mathématique du théorème de Cauchy-Helmholtz : la vitesse d'un point quelconque de la particule fluide se compose de la vitesse du pôle $\bar{v}_0$, de la vitesse de rotation autour d'un axe instantané passant par le pôle $(\bar{\omega}\times\bar{r}_1)$ et de la vitesse du mouvement de déformation $\bar{v}_{\text{déf}}$. Pour le vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}$, il est facile d'établir la relation suivante

$$\bar{\omega}=\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\bar{v}=\frac{1}{2}\nabla\times\bar{v}, \tag{III.30}$$

dans laquelle on a introduit l'hamiltonien $\nabla=\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$. En développant le second membre de (III.30) et en tenant compte des notations admises pour les projections des vitesses angulaires, on s'assure de la justesse de cette affirmation.

Pour compléter les différences exposées ci-dessus relatives aux mouvements d'un corps solide et d'une particule fluide, remarquons que le terme qui caractérise la rotation $(\bar{\omega}\times\bar{r}_1)$ ne coïncide que par la forme avec le terme analogue pour le corps solide. La particule fluide se déforme avec le temps en changeant sa forme. Pour cette raison le terme $(\bar{\omega}\times\bar{r}_1)$ décrit la rotation de la particule fluide comme d'un

corps solidifié seulement à l'instant donné, car après cet instant elle changera sa forme.

Les déformations linéaires et angulaires du corps solide sont absentes

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0; \quad \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0; \qquad \text{(III.31)}$$

et de plus, la fonction quadratique Φ, qui caractérise la déformation, s'annule, et la formule (III.29) se transforme en formule de la répartition des vitesses dans un corps solide.

Etant donné que le vecteur vitesse du pôle $\bar{v}_0$, qui ne dépend que du temps, peut être représenté sous la forme

$$\operatorname{grad}(\bar{v}_0 \cdot \bar{r}_1) = \operatorname{grad}\Phi_0, \qquad \text{(III.32)}$$

c'est-à-dire est une fonction potentielle, la répartition des vitesses (III.29) peut être écrite sous la forme suivante

$$\bar{v} = \operatorname{grad}\Phi_0 + \operatorname{grad}\Phi + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\bar{v} \times \bar{r}_1 =$$

$$= \operatorname{grad}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\bar{v} \times \bar{r}_1, \qquad \text{(III.33)}$$

où

$$\Phi_0 + \Phi = \varphi. \qquad \text{(III.34)}$$

De la relation (III.33) il suit que dans un cas arbitraire de mouvement d'un fluide, la vitesse peut être représentée sous la forme d'une somme de deux termes, dont l'un est le vecteur potentiel et l'autre est de nature tourbillonnaire.

Si les vitesses angulaires de rotation $2\bar{\omega} = \operatorname{rot}\bar{v}$ sont égales à zéro, la vitesse est le vecteur potentiel

$$\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi. \qquad \text{(III.35)}$$

Un tel écoulement est dit irrotationnel ou potentiel. Si $\bar{\omega}$ n'est pas égale à zéro, l'écoulement du liquide est dit tourbillonnaire. Ainsi, en vertu du théorème de Cauchy-Helmholtz on peut diviser tous les écoulements des fluides en tourbillonnaires et potentiels. Les méthodes d'étude de ces écoulements diffèrent considérablement.

En posant $\Phi(x_1, y_1, z_1) = C$, de (III.26) nous obtenons une équation du 2-ième ordre qui lie les coordonnées x_1, y_1, z_1 et caractérise une certaine surface. Des considérations physiques sur le caractère fini des déformations il suit que cette surface du 2-ième ordre est un ellipsoïde, appelé ellipsoïde des vitesses de déformation. En rapportant cet ellipsoïde aux axes principaux x_2, y_2, z_2 on peut écrire son équation

$$\Phi(x_2, y_2, z_2) = \varepsilon_1 x_2^2 + \varepsilon_2 y_2^2 + \varepsilon_3 z_2^2 = C \qquad \text{(III.36)}$$

de laquelle il suit que le long des axes principaux des déformations seules ont lieu des déformations linéaires. La fig. III.11 montre l'ellipsoïde des vitesses de déformation pour le point donné x_1, y_1, z_1. D'après la propriété bien connue du gradient, le vecteur $\bar{v}_{déf} =$ = grad Φ est normal à la surface de l'ellipsoïde des déformations.

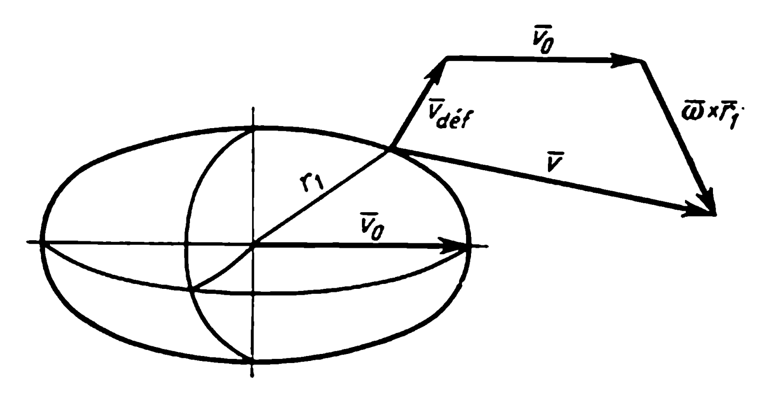


Fig. III.11

En faisant la somme géométrique des vecteurs $\bar{v}_{déf}$, $\bar{\omega} \times \bar{r}_1$ et $\bar{v}_0$, comme cela est montré sur la fig. III.11, nous obtenons la vitesse $\bar{v}$ d'un point de la particule fluide.

§ 11. ÉQUATION DE CONTINUITÉ

N'importe quel écoulement doit satisfaire à la loi de conservation de la masse. L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse.

Soit une particule fluide de volume V. Sa masse est égale à ρV. Suivant la loi de conservation de la matière, la dérivée par rapport au temps de la masse de cette particule est

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = 0. \qquad \text{(III.37)}$$

En prenant la dérivée et en divisant le résultat par la masse ρV, nous obtenons

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = 0. \qquad \text{(III.38)}$$

En supposant le fluide incompressible et homogène $d\rho/dt = 0$, on arrive à une expression mathématique suivante de la loi de conservation de la matière

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = 0. \qquad \text{(III.39)}$$

De cette expression il suit que si le fluide est incompressible, la loi de conservation de la masse devient loi de conservation du volume

de la particule. La grandeur $1/V \cdot dV/dt$ représente la vitesse relative de variation du volume. Calculons-la pour les coordonnées cartésiennes. A cet effet, considérons une particule fluide qui avait initialement la forme d'une sphère de rayon r_0 (fig. III.12). Les dimensions de la particule sont supposées petites pour qu'on puisse utiliser les résultats de l'analyse du mouvement de la particule fluide. Supposons que les axes des coordonnées cartésiennes coïncident avec les axes principaux des déformations. Suivant le § 10, le long de ces

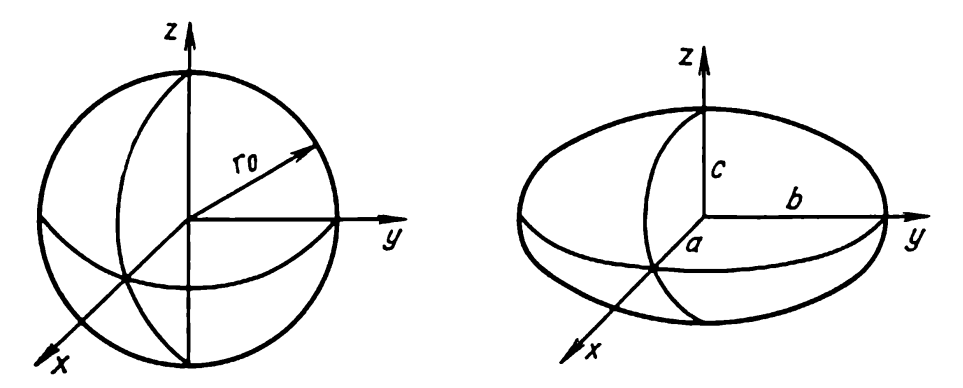


Fig. III.12

axes n'ont lieu que les déformations linéaires. Sous leur action, la sphère se déforme en ellipsoïde (fig. III.12). Si ε_x, ε_y, ε_z sont les vitesses relatives des déformations linéaires, alors les expressions des demi-axes de l'ellipsoïde a, b et c au bout des temps élémentaires de déformation dt peuvent être écrites sous la forme

$$a = r_0 + r_0\varepsilon_x\,dt = r_0(1+\varepsilon_x\,dt);$$
$$b = r_0(1+\varepsilon_y\,dt); \quad c = r_0(1+\varepsilon_z\,dt). \tag{III.40}$$

Le volume initial de la particule $V_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3$ et le volume final, après la déformation, $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

L'accroissement de volume $\Delta V \approx dV$ compte tenu de (III.40) sera évidemment

$$\Delta V = V - V_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3(1+\varepsilon_x\,dt)(1+\varepsilon_y\,dt)\times$$
$$\times(1+\varepsilon_z\,dt) - \frac{4}{3}\pi r_0^3. \tag{III.41}$$

En nous limitant dans cette dernière expression aux termes du 1-er ordre, nous trouvons

$$\Delta V \approx dV = \frac{4}{3}\pi r_0^3(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\,dt =$$
$$= V_0(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\,dt. \tag{III.42}$$

En portant (III.42) dans la loi de conservation de la masse pour le fluide incompressible (III.39) et en utilisant les expressions pour ε_x, ε_y et ε_z (III.20) nous obtenons

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \qquad \text{(III.43)}$$

La somme $\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$ est appelée vitesse relative de la dilatation cubique, qui pour le fluide incompressible, suivant (III.43), est nulle. Cela signifie que si au cours de la déformation d'une particule fluide une de ses arêtes s'allonge, les deux autres doivent se raccourcir pour que le volume de la particule avant et après la déformation reste constant.

En utilisant l'expression pour la divergence de la vitesse, nous pouvons représenter (III.43) sous la forme d'une relation

$$\operatorname{div}\bar{v}=0, \qquad \text{(III.44)}$$

qui contrairement à (III.43) est valable pour n'importe quel système de coordonnées.

Les expressions (III.43) et (III.44) sont les équations de continuité sous la forme différentielle. Ces conditions doivent être remplies pour n'importe quel point du fluide (sauf, peut-être, les points singuliers dans lesquels se trouvent les sources ou les puits).

Etablissons la forme intégrale de l'équation de continuité. Introduisons préalablement la notion de débit d'un fluide à travers une surface, en entendant par là la quantité de fluide s'écoulant en unité de temps à travers une surface non fermée. On distingue le débit en volume Q (dimensions L^3T^{-1}), le débit en masse Q_m (dimensions MT^{-1}) et le débit en poids Q_G (dimensions LMT^{-3}). Dans un fluide homogène, il existe entre ces grandeurs la relation

$$Q=\frac{Q_m}{\rho}=\frac{Q_G}{\gamma}. \qquad \text{(III.45)}$$

Dans ce qui suit, nous ferons recours à la notion de débit en volume. Pour obtenir l'expression générale de débit, considérons l'écoulement d'un fluide à travers une surface S. Isolons sur celle-ci une aire élémentaire dS. Décomposons le vecteur vitesse au centre de l'aire en composantes normale v_n et tangentielle v_τ. Il est évident que la composante tangentielle v_τ ne donnera pas de débit de fluide par l'aire. Pendant le temps dt, le volume de fluide qui traversera dS sera $dQ_t=(v_n dt)\,dS$; le débit élémentaire dQ sera égal au rapport dQ_t/dt (quantité de fluide rapportée à l'unité de temps), c'est-à-dire

$$dQ=v_n\,dS. \qquad \text{(III.46)}$$

En additionnant les débits traversant les aires élémentaires, ce qui revient à intégrer par rapport à la surface, nous obtiendrons l'ex-

pression du débit de fluide à travers la surface S

$$Q = \int_S v_n \, dS. \qquad \text{(III.47)}$$

Délimitons dans un fluide par la surface S un volume quelconque V. Prenons un volume élémentaire dV et multiplions-le par $\operatorname{div} \bar{v} = 0$. Physiquement la quantité $\operatorname{div} \bar{v} \, dV = 0$ caractérise, suivant (III.39), la variation de la valeur du volume élémentaire dV par suite d'une déformation. Intégrons la quantité $\operatorname{div} \bar{v} \, dV$ par rapport au volume et servons-nous de la formule de Gauss-Ostrogradski qui permet de transformer l'intégrale de volume en intégrale de surface

$$\int_V \operatorname{div} \bar{v} \, dV = \int_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = \oint_S [v_x \cos(n, x) +$$

$$+ v_y \cos(n, y) + v_z \cos(n, z)] \, dS = \oint_S v_n \, dS = 0. \qquad \text{(III.48)}$$

Cette formule contient une composante normale v_n de la vitesse. D'après (III.47) l'intégrale du deuxième membre représente le débit de fluide à travers une surface fermée égal d'après (III.48) à

$$Q = \oint_S v_n \, dS = 0. \qquad \text{(III.49)}$$

Cette expression représente une formulation mathématique de l'équation de continuité sous la forme intégrale. Elle a une interprétation physique suivante : les débits de fluide entrant et sortant par une surface fermée quelconque doivent être égaux. A l'intérieur de la surface il ne se produit ni accumulation de fluide, ni formation de cavités.

On appelle section mouillée d'un courant la section formée par un plan perpendiculaire aux vecteurs vitesses. Si S est une surface de la section mouillée, alors le débit à travers celle-ci s'exprimera par

$$Q = \int_S v \, dS.$$

Introduisons la vitesse moyenne dans la section mouillée. Par celle-ci on entend une vitesse fictive, constante dans la section mouillée v_{moy}, assurant un débit identique à celui donné. De cette définition il suit que

$$Q = \int_S v \, dS = v_{\text{moy}} S, \qquad \text{(III.50)}$$

c'est-à-dire que la vitesse moyenne est égale au débit divisé par la surface de la section mouillée.

Examinons un courant de fluide de dimensions finies (fig. III.13) limité à ses côtés par des parois solides S_{lat}. Traçons deux sections mouillées quelconques S_1 et S_2. Le débit de fluide par la surface fermée $S_1 + S_{lat} + S_2$ suivant les conclusions précédentes est égal à zéro.

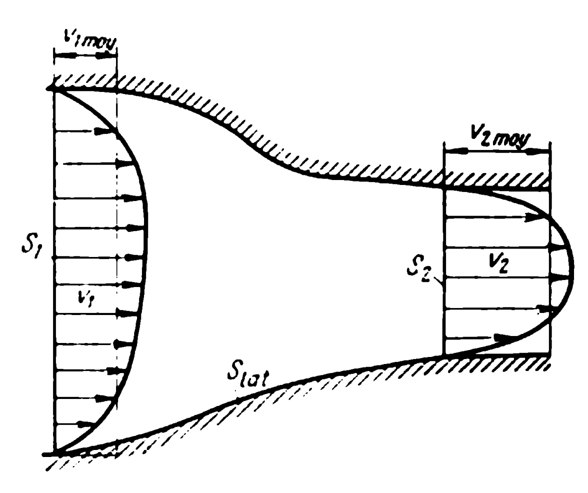


Fig. III.13

En considérant l'écoulement sortant comme positif et celui entrant comme négatif, écrivons

$$-Q_1 + Q_{lat} + Q_2 = 0,$$

et, étant donné que $Q_{lat} = 0$, on a

$$Q_1 = Q_2 = Q = \text{const},$$

c'est-à-dire que le débit de fluide le long du courant de dimensions finies est constant.

En tenant compte de la notion des vitesses moyennes, cette dernière égalité peut être écrite sous la forme

$$v_{moy\,1} S_1 = v_{moy\,2} S_2 = v_{moy} S = \text{const}. \qquad \text{(III.51)}$$

L'équation de continuité sous cette forme trouve une large utilisation pour l'étude des écoulements de fluide dans les tubes et canaux.

§ 12. CARACTÉRISTIQUES PRINCIPALES D'UN ÉCOULEMENT TOURBILLONNAIRE DU FLUIDE. CIRCULATION. THÉORÈME DE STOKES

Lorsque le vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}$ est différent de zéro l'écoulement est dit tourbillonnaire. On peut se faire une idée de la structure extérieure d'un écoulement tourbillonnaire si l'image des lignes

tourbillons est connue. On appelle ligne tourbillon une ligne en chaque point de laquelle à un instant donné le vecteur vitesse angulaire se confond avec une tangente à cette ligne (fig. III.14,*a*). En vertu de cet énoncé, l'équation différentielle des lignes tourbillons s'écrit sous une forme analogue à (III.6)

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} . \qquad \text{(III.52)}$$

Ici dx, dy, dz sont les projections d'un élément de la ligne tourbillon; ω_x, ω_y, ω_z les projections de la vitesse angulaire.

De la façon analogue à la notion de tube de courant, nous introduisons la notion de tube tourbillon. Le tube tourbillon est une partie de fluide limitée par des lignes tourbillons passant par les points d'un contour fermé (fig. III.14,*b*). Dans le cas général, le vecteur vitesse angulaire varie suivant la section transversale du tube tourbillon. On appelle tube tourbillon élémentaire un tube dans lequel on peut négliger les variations de la vitesse angulaire suivant la section transversale.

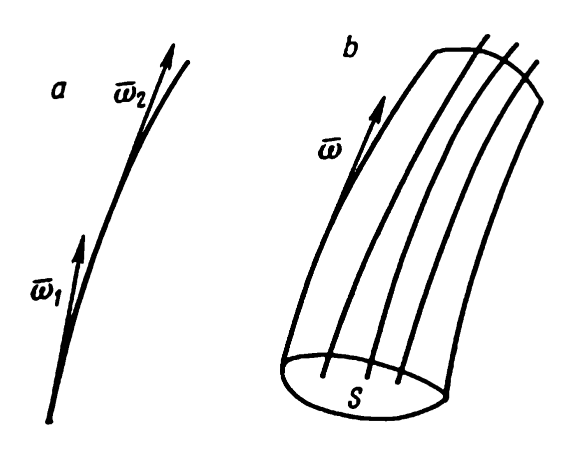


Fig. III.14

L'action exercée par le tube tourbillon sur le fluide environnant se caractérise par son intensité.

Par intensité d'un tube tourbillon on entend le double du flux du vecteur vitesse angulaire à travers une section quelconque de ce tube. Suivant (III.30), l'intensité peut être interprétée comme un flux du vecteur tourbillon rot $\bar{v} = 2\bar{\omega}$ par la section transversale du tube tourbillon.

En désignant par $\bar{n}$ la normale à la section transversale S du tube tourbillon, on peut écrire suivant la définition l'expression suivante de l'intensité:

$$I = 2\int_S \bar{\omega}\cdot\bar{n}\,dS = \int_S \text{rot}\,\bar{v}\cdot\bar{n}\,dS, \qquad \text{(III.53)}$$

où les dimensions de l'intensité sont $[I] = [\omega][S] = L^2T^{-1}$. L'intensité d'un tube tourbillon élémentaire est

$$I = 2\bar{\omega}\cdot\bar{n}\,dS = 2\omega_n\,dS. \qquad \text{(III.54)}$$

Pour la commodité de l'étude théorique des mouvements tourbillonnaires, en mécanique des fluides on examine souvent le cas

limite du tube tourbillon élémentaire, où la surface de sa section transversale tend vers zéro ($S \to 0$), tandis que l'intensité a une valeur finie $I = \lim\limits_{S \to 0} 2\omega_n S =$ const. Il est évident que dans ce cas la valeur de la vitesse angulaire ω tend vers l'infini ($\omega \to \infty$). Un tel tube tourbillon idéalisé est appelé filet tourbillon. Le filet tourbillon est un exemple typique d'une ligne tourbillon singulière en tous les points de laquelle les vitesses angulaires ω tendent vers l'infini.

Introduisons la notion fondamentale en mécanique des fluides, celle de circulation de la vitesse Γ. Elle représente une intégrale curviligne suivant le contour fermé L du produit scalaire du vecteur vitesse $\bar{v}$ par la différentielle du rayon vecteur du point du contour $d\bar{r}$ (fig. III.15)

$$\Gamma = \oint_L \bar{v} \cdot d\bar{r}. \qquad \text{(III.55)}$$

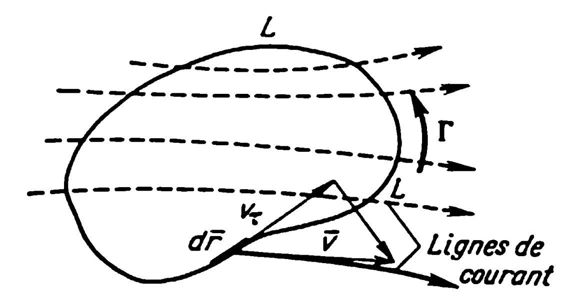


Fig. III.15

Pour le calcul de la circulation Γ, on peut prendre un contour arbitraire, coupant les lignes de courant dans le cas général. Si l'on désigne par v_τ la projection de la vitesse sur une tangente au contour et par dl la différentielle d'un arc du contour, on peut récrire l'expression (III.55) sous la forme suivante:

$$\Gamma = \oint_L \bar{v} \cdot d\bar{r} = \oint_L v_\tau \, dl = \oint_L v \cos(\bar{v}, d\bar{r}) \, dl \qquad \text{(III.56)}$$

ou, en développant le produit scalaire $\bar{v} \cdot d\bar{r}$,

$$\Gamma = \oint_L v_x \, dx + v_y \, dy + v_z \, dz. \qquad \text{(III.57)}$$

Fig. III.16

En calculant les intégrales curvilignes déterminant la circulation, adoptons comme sens positif de parcours du contour celui où la région limitée par le contour reste à gauche (montré par une flèche sur la fig. III.15).

Suivant (III.56) les dimensions de la circulation sont $[\Gamma] = [v][l] = L^2T^{-1}$, c'est-à-dire les mêmes que celles de l'intensité. Cependant le lien qui existe entre la circulation et l'intensité ne se limite pas seulement aux mêmes dimensions de ces grandeurs; il est beaucoup plus profond et se détermine par le théorème de Stokes.

Examinons un flux du vecteur tourbillon à travers une surface ouverte quelconque S (fig. III.16), en désignant par L le contour fermé

sur lequel s'appuie cette surface. En particulier, on peut entendre par surface S une section arbitraire du tube tourbillon et alors on peut parler de l'intensité du tube tourbillon et de sa liaison avec la circulation.

Transformons l'intégrale de surface du flux du vecteur tourbillon en intégrale curviligne suivant la formule connue de Stokes, en tenant compte de l'expression de $\bar{n}$

$$I = \int_S \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{n}\, dS = \int_S \Big[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cos(n, z) \Big] dS = \oint_L v_x\, dx + v_y\, dy + v_z\, dz.$$

En comparant le résultat obtenu avec (III.57), nous trouvons

$$I = \Gamma. \qquad \text{(III.58)}$$

Il en résulte le théorème de Stokes: le flux du vecteur tourbillon à travers une surface ouverte quelconque est égal à la circulation du vecteur vitesse le long du contour sur lequel s'appuie cette surface.

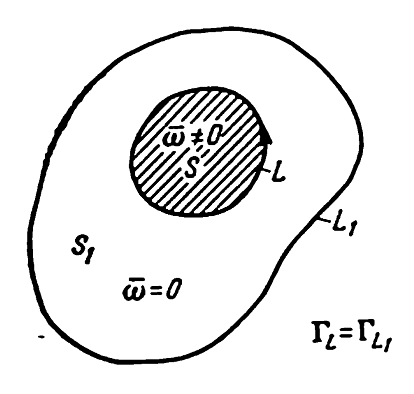


Fig. III.17

Suivant le théorème de Stokes, l'intensité d'un tube tourbillon est égale à la circulation du vecteur vitesse le long du contour sur lequel s'appuie la surface de la section transversale du tube. Si l'on considère, comme cela a lieu ordinairement, qu'en dehors du tube tourbillon le fluide ne tourbillonne pas ($2\bar{\omega} = \operatorname{rot} \bar{v} = 0$), alors le contour L, situé à la surface du tube tourbillon, peut être déformé en contour quelconque L_1 se trouvant dans le fluide et entourant le tube tourbillon (fig. III.17). En effet, en désignant par S_1 la surface s'appuyant sur le contour L_1, nous aurons:

$$I_1 = \int_{S_1} \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{n}\, dS = \int_S \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{n}\, dS + \int_{S_1 - S} \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{n}\, dS = I,$$

car suivant l'hypothèse dans la région $S_1 - S$ le mouvement tourbillonnaire du fluide n'a pas lieu. On en déduit que l'intensité d'un tube tourbillon est égale à la circulation de la vitesse le long d'un contour quelconque entourant ce tube tourbillon.

Les notions d'intensité et de circulation sont purement cinématiques; par conséquent, le théorème de Stokes est valable aussi bien pour le fluide visqueux que pour celui non visqueux.

§ 13. FONCTION DE COURANT DES ÉCOULEMENTS PLAN ET À SYMÉTRIE AXIALE

Au § 8 il a été établi que pour étudier un écoulement plan, il est indispensable de déterminer deux fonctions v_x et v_y dépendant de deux variables indépendantes x, y et du temps t, si le mouvement est variable. Ces deux fonctions ne sont pas indépendantes et sont liées entre elles par l'équation de continuité de la forme suivante :

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \qquad \text{(III.59)}$$

Montrons qu'en écoulement plan d'un fluide, on peut au lieu de deux fonctions v_x et v_y introduire une certaine fonction ψ (x, y, t) qui caractérise complètement l'écoulement. Ceci est analogue à une réduction du nombre d'inconnues à déterminer et, par conséquent, facilite notablement la résolution du problème. La fonction qu'on introduit doit obligatoirement satisfaire à l'équation de continuité. Déterminons la fonction ψ par les égalités suivantes

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \text{(III.60)}$$

suivant lesquelles les dimensions de $[\psi] = [v_x]\,[\partial y] = L^2T^{-1}$.

Portons (III.60) dans (III.59) ; comme le résultat de la différentation ne dépend pas de l'ordre, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} \equiv 0$, c'est-à-dire la fonction introduite satisfait à l'équation de continuité. Composons la différentielle totale de la fonction ψ en considérant le temps t comme un paramètre

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy = -v_y\,dx + v_x\,dy.$$

L'équation (III.59) peut être récrite sous la forme $\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$, ce qui caractérise mathématiquement la condition d'existence de la différentielle totale de l'expression $(-v_y\,dx + v_x\,dy)$.

Ecrivons les équations (III.6) des lignes de courant pour un écoulement plan en exprimant les valeurs v_x et v_y au moyen de la fonction ψ, $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$ ou $-v_y\,dx + v_x\,dy = d\psi = 0$. Ainsi le long de la ligne de courant $d\psi = 0$ et la fonction ψ est constante

$$\psi = C. \qquad \text{(III.61)}$$

Elle s'appelle fonction de courant. Il s'ensuit que pour obtenir des équations des lignes de courant, il faut déterminer la fonction de courant de l'écoulement et l'égaliser à une valeur constante. Finalement, on trouvera une famille de lignes de courant de l'écoulement plan du fluide. Cette méthode de détermination des lignes de courant est beaucoup plus simple que l'intégration des équations différentielles (III.6).

Déterminons le sens physique de la fonction du courant. Pour cela, calculons le débit de fluide traversant une surface cylindrique dont la directrice a la forme d'une courbe quelconque AB et la génératrice est de la hauteur unité. Le débit élémentaire à travers la surface $dl1$ (fig. III.18) est

$$dQ = v_n(dl1) = [v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y)]\, dl1.$$

Passons dans cette expression aux angles formés par un élément du contour dl avec les axes des coordonnées. Suivant la figure

$$\cos(n, x) = \cos(2\pi - \alpha) = \cos[2\pi - (y, l)] = \cos(y, l);$$

$$\cos(n, y) = \cos\beta = \cos[\pi - (x, l)] = -\cos(x, l).$$

En portant ces expressions dans la formule de dQ et en utilisant les formules de la géométrie analytique $dl \cos(y, l) = dy$, $dl \cos(x, l) = dx$, on obtient

$$dQ = (v_x\, dy - v_y\, dx)\ 1 = d\psi 1.$$

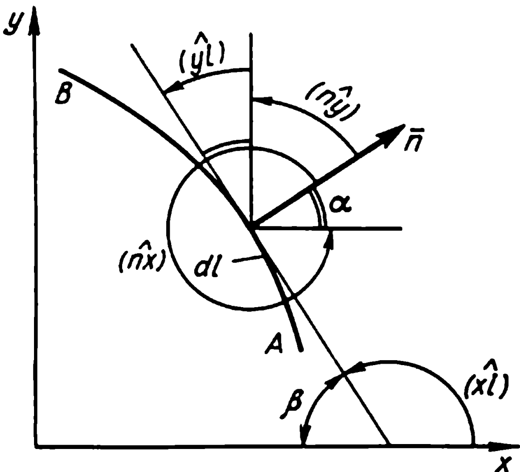


Fig. III.18

Ainsi, le débit élémentaire du fluide à travers la surface $dl1$ est numériquement égal à la différentielle de la fonction du courant. Le débit total à travers la surface cylindrique est:

$$Q_{AB} = \int_A^B dQ = \int_A^B d\psi 1 = (\psi_B - \psi_A)\, 1. \qquad \text{(III.62)}$$

De cette façon, le débit du fluide traversant une surface cylindrique de hauteur unité et ayant pour directrice AB est numériquement égal à la différence des fonctions de courant en des points extrêmes de la directrice. De (III.62) il suit que ce débit ne dépend pas de la forme de la directrice et ne se détermine que par les points initial et final de la courbe AB. Notons que les dimensions du débit sont $[Q] = L^3T^{-1}$, et celles de la fonction du courant, $[\psi] = L^2T^{-1}$. Pour observer le sens physique de l'expression (III.62) il ne faut pas oublier que le facteur unité dans le deuxième membre a une dimension linéaire.

Dans le cas général d'un écoulement à trois dimensions, il est impossible d'introduire la fonction de courant.

Cependant dans un cas particulier de l'écoulement tridimensionnel (écoulement à symétrie axiale) il est possible d'introduire la fonction de courant, qui est analogue par beaucoup de ses propriétés à la fonction ψ pour le mouvement plan. Ecrivons l'équation de conti-

nuité pour un système de coordonnées cylindriques. Des mathématiques on connaît la forme de l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_{r^*}}{\partial r^*} + \frac{v_{r^*}}{r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} . \qquad \text{(III.63)}$$

Dans le cas de l'écoulement à symétrie axiale $v_\theta = 0$, et l'équation de continuité prend la forme

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_{r^*}}{\partial r^*} + \frac{v_{r^*}}{r^*} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_{r^*}) = 0. \qquad \text{(III.64)}$$

Pour obtenir le deuxième membre, dans les deux derniers termes du premier membre on a effectué une transformation identique. Multiplions (III.64) par r^* et introduisons le facteur r^* dans le premier terme de (III.64) (cela est possible, car x et r^* sont des variables indépendantes)

$$\frac{\partial}{\partial x} (r^* v_x) + \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_{r^*}) = 0. \qquad \text{(III.65)}$$

D'une manière analogue au cas précédent, introduisons la fonction de courant ψ liée aux projections des vitesses v_x et v_{r^*} par les égalités

$$r^* v_x = \frac{\partial \psi}{\partial r^*} ; \qquad r^* v_{r^*} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} . \qquad \text{(III.66)}$$

En substituant (III.66) dans l'équation (III.65), la fonction ψ satisfait à l'équation de continuité. Déterminons la liaison de cette fonction avec les lignes de courant. L'équation différentielle des lignes de courant (plus exactement, pour ce cas des surfaces de courant formées par la rotation des lignes de courant par rapport à l'axe de symétrie) a la forme

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dr^*}{v_{r^*}} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{r^* v_x} = \frac{dr^*}{r^* v_{r^*}} .$$

d'où à la surface de courant

$$-r^* v_{r^*} \, dx + r^* v_x \, dr^* = \frac{\partial \psi}{dx} dx + \frac{\partial \psi}{\partial r^*} dr^* = d\psi = 0.$$

Ainsi, à la surface de courant la fonction de courant est constante

$$d\psi = 0 ; \quad \psi = C. \qquad \text{(III.67)}$$

Cette condition donne un moyen simple de détermination des surfaces de courant dans un écoulement à symétrie axiale : il faut déterminer la fonction de courant et la rendre égale à une grandeur constante.

Le sens physique de la fonction de courant se détermine de façon analogique au cas de l'écoulement plan. Examinons le débit d'un

fluide dans un angle de 1 rd entre deux surfaces de courant, surfaces de rotation (fig. III.19). Le débit élémentaire $dQ_{1rd} = v_n dS$. A son tour $dS = dl\,(r^*1)$, où 1 est l'angle de 1 rd. Suivant la figure

$$dQ_{1rd} = v_n\, dl r^* 1 = [v_x \cos(n, x) + v_{r^*} \cos(n, r^*)]\, dl r^* 1 =$$
$$= v_x r^* \cos(r^*, l)\, dl - v_{r^*} r^* \cos(r^*, x)\, dl = v_x r^*\, dr^* - v_{r^*} r^*\, dx = d\psi.$$

La liaison entre les angles a été établie à l'aide des relations déduites pour le problème plan. D'après ce qui a été dit on peut conclure : le débit élémentaire passant par une aire délimitée par l'angle

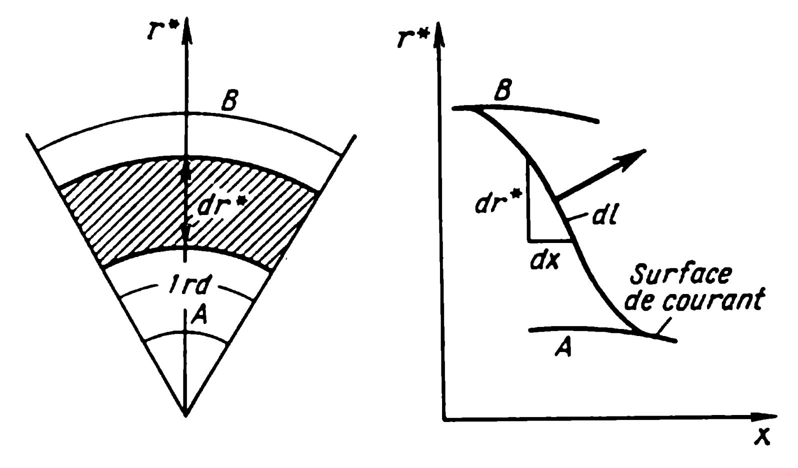


Fig. III.19

de 1 rd est égal à la différentielle de la fonction de courant. Le débit entre les deux surfaces de courant délimitées par l'angle de 1 rd est égal à la différence des fonctions de courant sur ces surfaces

$$Q_{AB1rd} = \psi_B - \psi_A. \tag{III.68}$$

Notons que suivant (III.66), les dimensions de la fonction de courant en écoulement à symétrie axiale du fluide et les dimensions du débit sont identiques.

En introduisant la fonction de courant pour les écoulements plan et à symétrie axiale, on a utilisé seulement l'équation de continuité. Par conséquent, on peut introduire la fonction de courant indépendamment du caractère de mouvement du fluide (tourbillonnaire ou non tourbillonnaire) pour l'écoulement des fluides visqueux ou non visqueux.

CHAPITRE IV

DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

§ 14. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES FLUIDES PARFAITS. CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS AUX LIMITES

La dynamique est une partie de la mécanique des fluides qui étudie la liaison entre les forces extérieures et les mouvements des fluides provoqués par celles-ci.

Tout fluide réel possède dans une certaine mesure une viscosité. Cependant la résolution d'un grand nombre de problèmes relatifs aux fluides peu visqueux, tels que l'eau ou l'air, peut être obtenue sous l'hypothèse qu'on les considère comme non visqueux. Dans un grand nombre de cas ces résolutions se confirment par des données expérimentales. L'étude mathématique des équations de mouvement d'un fluide non visqueux est incomparablement plus facile que celle d'un fluide visqueux.

Pour résoudre un problème de mouvement d'un fluide parfait, il faut composer les équations du mouvement liant entre elles les vitesses, les pressions et les forces massiques agissant dans un fluide. Pour obtenir ces équations, utilisons l'équation vectorielle (I.41) du mouvement d'un fluide par des contraintes

$$\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z}\right).$$

Dans un fluide non visqueux agissent seulement des contraintes normales, dont la liaison avec des pressions suivant (I.32) a la forme

$$\bar{p}_x=-\bar{i}p;\quad \bar{p}_y=-\bar{j}p;\quad \bar{p}_z=-\bar{k}p.$$

En portant ces valeurs dans (I.41) nous obtenons l'équation

$$\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}-\frac{1}{\rho}\left(\bar{i}\,\frac{\partial p}{\partial x}+\bar{j}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\bar{k}\,\frac{\partial p}{\partial z}\right),$$

que l'on peut représenter, en utilisant la notion de gradient de la fonction scalaire p, sous la forme

$$\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \qquad \text{(IV.1)}$$

L'équation (IV.1) est dite équation de la dynamique des fluides non visqueux sous la forme d'Euler. En projetant (IV.1) sur les axes des coordonnées, nous obtenons un système de trois équations différentielles sous la forme scalaire

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\,; \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\,; \\ \frac{dv_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.2)}$$

Dans les équations d'Euler on considère connus la densité et le vecteur de contrainte des forces massiques F_x, F_y, F_z. Les inconnues dans ces équations sont les trois projections de la vitesse $v_x\,(x, y, z, t)$; $v_y\,(x, y, z, t)$, $v_z\,(x, y, z, t)$ et la pression $p\,(x, y, z, t)$, c'est-à-dire quatre fonctions inconnues. Pour mettre en concordance le nombre d'équations et le nombre d'inconnues, on doit ajouter aux égalités (IV.2) l'équation (III.43) de continuité du fluide

$$\operatorname{div}\bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

La résolution du système fermé des équations d'Euler et de continuité doit satisfaire aux conditions aux limites et initiales.

Les conditions initiales sont imposées à l'écoulement à l'instant t_0. Avec $t = t_0$, on doit poser les champs des vitesses et des pressions

$$\bar{v} = \bar{v}\,(x, y, z, t_0)\,; \quad p = p\,(x, y, z, t_0). \qquad \text{(IV.3)}$$

On ne doit s'imposer les conditions initiales qu'à l'étude du mouvement non permanent. En effet, si en mouvement permanent les vitesses et les pressions sont données, alors on connaît le mouvement du fluide à n'importe quel moment de temps étant donné que le caractère du mouvement ne change pas avec le temps.

On appelle conditions aux limites celles qui doivent être vérifiées aux frontières d'un courant à un instant quelconque. On distingue deux types de conditions aux limites: cinématiques, pour la vitesse aux limites d'un courant, et dynamiques, liées à une pression.

Il existe un grand nombre de conditions aux limites, pour cette raison nous nous arrêterons seulement sur les plus importantes.

Examinons les conditions aux limites cinématiques pour un mouvement absolu d'un corps solide dans un fluide non visqueux (fig. IV.1,*a*). Supposons, pour simplifier, qu'un corps se déplace avec une vitesse v_0 dans le sens négatif de l'axe des x. Le mouvement du fluide provoqué par le corps n'existe pratiquement pas loin en amont de celui-ci, ce qu'on peut écrire sous la forme d'une condition

$$v = 0 \quad \text{avec} \quad x = -\infty, \qquad \text{(IV.4)}$$

qui s'appelle condition à l'infini.

Elucidons la condition aux limites sur la surface d'un corps S. Désignons par v_{nc} la composante normale de la projection de la vitesse d'un point quelconque de la surface du corps et par v_n la composante normale de la vitesse de la particule de fluide contiguë à l'instant donné à cette partie de la surface du corps. L'écoulement du fluide à travers une paroi solide est impossible; en mouvement le

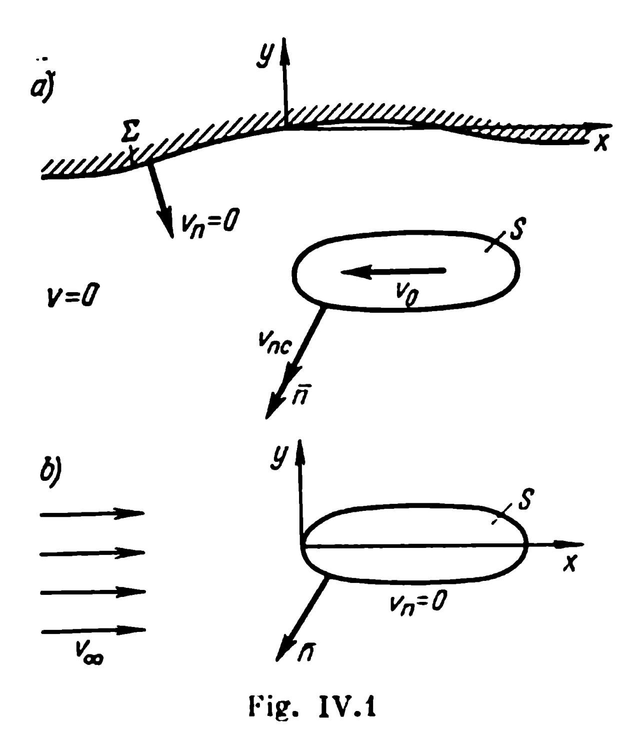


Fig. IV.1

fluide ne décolle pas de la surface du corps. En vertu de ces raisonnements, à la surface du corps doit s'observer la condition d'imperméabilité et de l'écoulement sans décollement, c'est-à-dire

$$v_n = v_{nc}\,|_S. \qquad \text{(IV.5)}$$

Avec $v_n > v_{nc}$ on observerait le décollement d'une particule fluide de la surface du corps et avec $v_n < v_{nc}$ il y aurait pénétration du fluide à travers la paroi solide. Nous appellerons cette condition-là condition d'imperméabilité. Si la paroi Σ (fig. IV.1,a) ne se déplace pas $v_{nc} = 0$ alors v_n le long de celle-ci est également nulle.

Examinons les conditions aux limites cinématiques en mouvement inversé et en écoulement autour d'un corps immobile. Si un corps effectue dans un fluide un mouvement rectiligne à vitesse constante v_0, alors on peut, comme cela a été montré au § 9, utiliser la méthode d'inversion du mouvement. La représentation du mouvement inversé correspond à l'écoulement autour d'un corps immobile représenté sur la figure IV.1,b. Désignons la vitesse de l'écoulement à l'infini par v_∞. Dans le cas du mouvement inversé v_∞ est égale à la vitesse du mouvement dr corps v_0. La condition aux limites à l'in-

fini prend la forme

$$v = v_\infty \quad \text{pour} \quad x = -\infty. \tag{IV.6}$$

La condition aux limites à la surface S d'un corps immobile s'écrira

$$v_n |_S = 0, \tag{IV.7}$$

c'est-à-dire lorsqu'un corps est baigné par un fluide la vitesse normale du fluide à la surface du corps est nulle. Avec $v_n < 0$ le fluide s'écoulerait à travers la surface du corps et avec $v_n > 0$ aurait lieu le décollement du fluide. Par conséquent, la vitesse tangentielle à la surface du corps est égale à la vitesse totale.

Sur toute ligne de courant la composante normale de la vitesse $v_n = 0$; ceci correspond à la condition aux limites d'imperméabilité (IV.7) sur une paroi solide baignée par un fluide non visqueux. Il en résulte que toute ligne de courant (ou une partie de celle-ci) dans un fluide non visqueux peut être remplacée par une paroi solide sans perturber l'écoulement du fluide. Cette analogie entre les lignes du courant et les parois solides est utilisée pour la résolution des problèmes de la mécanique des fluides non visqueux.

Les conditions aux limites dynamiques imposent des limitations aux pressions qui s'exercent sur certaines frontières de l'écoulement ou à l'infini.

Examinons la condition pour la pression sur la surface libre agitée de l'eau S_e. A la surface de séparation des deux milieux, eau et air, la pression doit avoir évidemment la même valeur. Dans le cas contraire, sous l'action de la différence des pressions, les particules superficielles de liquide passeraient de l'eau dans l'air et la surface libre serait détériorée. Analytiquement, le long de la surface S_e cette condition se présentera sous la forme

$$p = p_a |_{S_e}, \tag{IV.8}$$

c'est-à-dire que la pression sur la surface libre est égale à la pression atmosphérique.

La même condition est remplie à la surface d'un jet de liquide s'écoulant dans l'atmosphère.

Les équations du mouvement d'un fluide non visqueux sous la forme d'Euler (IV.2) ne sont toujours pas commodes pour l'intégration. Ceci s'explique par le fait que dans ces équations les particularités cinématiques du mouvement ne sont pas explicitées. L'équation transformée avec des vitesses angulaires de rotation explicitées a été proposée par A. Groméko.

Examinons une des équations d'Euler (IV.2), en tenant compte de ce que l'accélération dv_x/dt se compose des accélérations locale et convective (III.15),

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} .$$

Ajoutons et retranchons du premier membre les termes

$$v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} ;$$

après regroupement nous obtenons

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) +$$
$$+ \left[v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) - v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right] = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} .$$

La dérivée partielle par rapport à x de la moitié du carré de la vitesse est

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}\right] = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} .$$

En vertu de (III.20)

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2\omega_y ; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega_z .$$

En utilisant les relations données ci-dessus, réduisons le premier membre de l'équation du mouvement à la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2(v_z\omega_y - v_y\omega_z) = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} ; \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2(v_x\omega_z - v_z\omega_x) = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} ; \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2(v_y\omega_x - v_x\omega_y) = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.9)}$$

Les deux dernières expressions dans (IV.9) sont obtenues par la méthode de permutation circulaire des indices. En multipliant les deux membres de (IV.9) par les vecteurs unités des axes et en les additionnant membre à membre, écrivons l'équation sous la forme vectorielle

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{grad}\frac{v^2}{2} + 2\bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{F} - \frac{1}{\rho}\text{grad } p. \qquad \text{(IV.10)}$$

L'équation (IV.10) est dite équation du mouvement d'un fluide non visqueux sous la forme Groméko. Bien que cette équation soit plus compliquée par sa forme que l'équation d'Euler (IV.1), elle est plus commode pour les études, étant donné que le terme contenant les vitesses angulaires y est explicité. Les conditions initiales et aux limites pour l'intégration de l'équation (IV.10) restent les mêmes que pour l'équation d'Euler.

§ 15. INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE

Dans le cas général les équations du mouvement d'un fluide ne s'intègrent pas. Pour des cas particuliers, leur intégration est possible si l'on admet quelques hypothèses. Les intégrales des équations du mouvement permettent de déterminer une liaison directe entre les vitesses et les pressions dans un écoulement du fluide.

Admettons la première hypothèse, caractéristique pour n'importe quelle intégration, suivant laquelle les forces massiques dérivent d'un potentiel, c'est-à-dire

$$\bar{F} = \operatorname{grad} U. \tag{IV.11}$$

En partant de cette condition, récrivons l'équation de Groméko en regroupant à la fois ses membres

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = -2\bar{\omega} \times \bar{v}. \tag{IV.12}$$

Examinons le premier cas d'intégration des équations de la dynamique des fluides. Supposons qu'on étudie le mouvement irrationnel d'un fluide non visqueux, lorsqu'il existe le potentiel des vitesses et les vitesses angulaires sont nulles, c'est-à-dire

$$\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi; \quad \bar{\omega} = 0.$$

Introduisons ces rélations dans (IV.12) en tenant compte du fait que le résultat de la différentiation ne dépend pas de l'ordre de différentiation

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Enfin, nous obtenons l'équation

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = 0, \tag{IV.13}$$

de laquelle il résulte que l'expression entre parenthèses ne dépend pas des coordonnées. Ceci permet d'écrire l'intégrale de l'équation (IV.13)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} = C(t) \tag{IV.14}$$

qui s'appelle l'intégrale de Lagrange; la fonction $C(t)$ dans sa partie droite dépend seulement du temps.

Examinons le cas particulier de l'intégrale de Lagrange quand le mouvement du fluide est permanent. Dans ce cas $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire la variation locale du potentiel (et de la vitesse) en fonction du

temps n'a pas lieu. La fonction $C(t)$ ne dépend plus du temps en se transformant en grandeur C, constante pour tous les points du courant,

$$\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} = C. \qquad \text{(IV.15)}$$

L'équation (IV.15) s'appelle l'intégrale d'Euler.

Examinons le second cas d'intégration. Supposons qu'on étudie le mouvement permanent d'un fluide et l'intégration s'effectue le long d'une ligne de courant. Rappelons qu'en mouvement permanent les particules fluides se déplacent suivant une ligne de courant. Sous ces hypothèses $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire que l'accélération locale n'a pas lieu et l'équation (IV.12) peut être écrite sous la forme

$$\operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = -2\bar{\omega} \times \bar{v}.$$

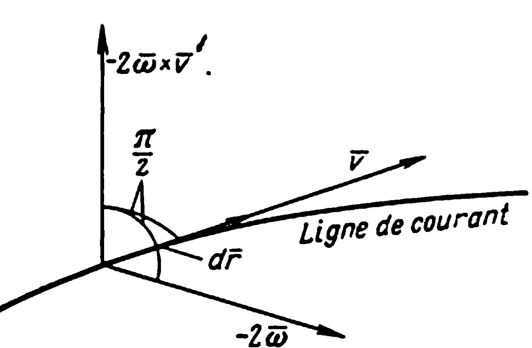


Fig. IV.2

Multiplions scalairement les deux membres de cette dernière équation par l'élément de la ligne de courant $d\bar{r} = \bar{i}\,dx + \bar{j}\,dy + \bar{k}\,dz$, coïncidant en direction avec le vecteur vitesse $\bar{v}$,

$$\operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right)\cdot d\bar{r} = -(2\bar{\omega} \times \bar{v})\cdot d\bar{r}.$$

Examinons le deuxième membre de cette expression. On voit d'après la fig. IV.2 que les vecteurs $-2(\bar{\omega} \times \bar{v})$ et $d\bar{r}$ sont perpendiculaires. Il en résulte que

$$-2(\bar{\omega} \times \bar{v})\cdot d\bar{r} = 0,$$

et par conséquent

$$\operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right)\cdot d\bar{r} = 0.$$

En développant le produit scalaire nous obtenons

$$d\left(\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = 0.$$

Suivant cette expression, la différentielle totale du trinôme $\left(\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right)$ le long d'une ligne de courant est nulle. En partant de ce fait, nous déterminons que le long de la ligne de courant ce trinôme est constant, c'est-à-dire

$$\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} = C. \qquad \text{(IV.16)}$$

L'équation (IV.16) est dite intégrale de Bernoulli. C est constante seulement le long de la ligne de courant. Lorsqu'on passe à d'autres lignes de courant, la valeur de la constante dans l'intégrale de Bernoulli varie.

En comparant les intégrales (IV.16) et (IV.15), nous voyons qu'elles sont identiques par leur forme. Et quand même il y en a une différence notable : C dans l'intégrale d'Euler est constante pour tout le volume de fluide et dans l'intégrale de Bernoulli seulement le long de la ligne de courant.

Examinons encore un cas d'intégration des équations du mouvement d'un fluide non visqueux pour lequel on admet que le mouvement du fluide est permanent et les lignes de courant et les lignes tourbillons coïncident. Un tel mouvement est dit hélicoïdal. Ici $\bar{\omega} \parallel \bar{v}$, le produit vectoriel $\bar{\omega} \times \bar{v} = 0$, et l'équation (IV.12), intégrée par le procédé employé pour la déduction de l'intégrale de Bernoulli, prend la forme

$$\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} = C. \qquad \text{(IV.17)}$$

Cette égalité est valable le long de la ligne tourbillon et la ligne de courant et s'appelle intégrale de Groméko. Elle trouve son application dans la théorie de l'aile.

Examinons le cas particulier le plus important, où le fluide est soumis à l'action de la force de pesanteur, c'est-à-dire $U = -gz$. Ecrivons pour ce cas les intégrales des équations du mouvement. Simultanément multiplions les deux membres des équations par la masse volumique ρ tout en tenant compte de ce que $\rho g = \gamma$. Alors les intégrales des équations du mouvement prendront la forme suivante :

intégrale de Lagrange

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + \gamma z + p = C(t); \qquad \text{(IV.18)}$$

intégrale d'Euler

$$\frac{\rho v^2}{2} + \gamma z + p = C, \qquad \text{(IV.19)}$$

où C ne dépend pas du temps et est constante pour tous les points du volume de fluide ;

intégrale de Bernoulli

$$\frac{\rho v^2}{2} + \gamma z + p = C, \qquad \text{(IV.20)}$$

appelée souvent équation de Bernoulli, dans laquelle C n'est constante que le long de la ligne de courant donnée.

Tous les termes qui entrent dans cette équation ont les dimensions des pressions.

Elucidons le sens physique des intégrales des équations du mouvement, ce qui est plus commode de faire en opérant avec l'intégrale de Bernoulli. Comme il a été noté au § 4, les équations du mouvement caractérisent les forces spécifiques de différente nature agissant dans le fluide. En écoulement permanent, la particule fluide se déplace le long d'une ligne de courant.

En multipliant scalairement l'équation du mouvement du fluide par le déplacement élémentaire $d\bar{r}$ le long d'une ligne de courant, nous déterminons les travaux spécifiques ou les énergies spécifiques équivalentes. De cette façon tous les termes de l'intégrale de Bernoulli ont le sens physique des énergies spécifiques : $\rho v^2/2$ caractérise l'énergie cinétique spécifique et $\gamma z + p$ l'énergie potentielle spécifique, γz étant l'énergie potentielle spécifique de la position de la particule de fluide située à la cote z à partir du plan de référence adopté, et p l'énergie potentielle spécifique de la pression. Tous ces termes expriment l'énergie spécifique rapportée à l'unité de volume. En effet, l'énergie cinétique d'une particule fluide de masse ρV (V étant le volume) est égale à $\rho V v^2/2$. En la rapportant au volume V, nous obtenons le terme $\rho v^2/2$ entrant dans l'intégrale de Bernoulli.

Par un raisonnement analogue il est facile d'établir que les termes de l'équation (IV.16) expriment l'énergie spécifique rapportée à l'unité de masse.

Etant donné que la somme des énergies cinétique et potentielle est égale à l'énergie mécanique totale, l'intégrale de Bernoulli peut être interprétée de la manière suivante : le long d'une ligne de courant l'énergie mécanique spécifique d'une particule fluide est constante. Ceci constitue une des expressions du principe de conservation de l'énergie. Ainsi, l'intégrale de Bernoulli exprime la loi de conservation de l'énergie d'une particule fluide au cours de son mouvement le long d'une ligne de courant. Le sens physique analogue possède l'intégrale d'Euler ; la différence consiste seulement en ce qu'en mouvement permanent potentiel la constante C et, par conséquent, l'énergie mécanique spécifique sont identiques pour tous les points du fluide.

Dans l'intégrale de Lagrange, établie pour un mouvement non permanent, il apparaît un terme supplémentaire $\rho\partial\varphi/\partial t$ caractérisant la variation de l'énergie spécifique due à la variation de la vitesse dans le temps.

Les valeurs des constantes ou de la fonction C (t) dans les deuxièmes membres des intégrales des équations du mouvement se déterminent au moyen des conditions aux limites. Par exemple, en utilisant l'équation de Bernoulli (IV.20) on choisit sur une ligne de courant deux points 1 et 2. Suivant cette équation, l'énergie spécifique

totale des particules fluides en ces points est identique, et donc

$$\frac{\rho v_1^2}{2}+p_1+\gamma z_1=\frac{\rho v_2^2}{2}+p_2+\gamma z_2=C. \qquad \text{(IV.21)}$$

Si pour des raisons physiques les valeurs de la vitesse et de la pression sont données, par exemple, au point 1, il s'ensuit que

$$C=\frac{\rho v_1^2}{2}+p_1+\gamma z_1.$$

Alors de l'équation (IV.21) on peut déterminer la vitesse ou la pression en un autre point.

Très souvent dans les problèmes pratiques on s'intéresse non pas à la pression totale p, mais seulement à son complément hydrodynamique dû au mouvement du fluide, c'est-à-dire ce que l'on appelle pression hydrodynamique de surcharge. Examinons, par exemple, un écoulement avec une surface libre choisie pour plan de référence. La pression hydrostatique est égale à $p_{\text{hydr}}=-\gamma z$. Introduisons la pression hydrodynamique de surcharge p_s sous la forme d'une différence entre la pression p en ce point et la pression hydrostatique

$$p_s=p-p_{\text{hydr}}=p+\gamma z.$$

En portant l'expression de p_s dans l'équation (IV.20), on ramène cette dernière à la forme

$$p_s+\frac{\rho v^2}{2}=C. \qquad \text{(IV.22)}$$

Des intégrales d'Euler ou de Bernoulli sous la forme (IV.22) il suit qu'en des points du courant, où la vitesse est plus élevée, la pression diminue.

En divisant les deux membres de l'équation de Bernoulli par le poids spécifique γ on peut l'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{p}{\gamma}+z+\frac{v^2}{2g}=H, \qquad \text{(IV.23)}$$

où p/γ est la hauteur piézométrique; z la hauteur géométrique; $v^2/2g$ la hauteur cinétique; H la charge totale ou hydraulique.

Sous cette forme l'équation de Bernoulli est employée ordinairement pour la résolution des problèmes du mouvement d'un fluide dans les conduites et les canaux. Tous les termes de cette équation ont une dimension linéaire.

Conformément aux notations admises, on peut proposer la formulation suivante: le long d'une ligne de courant dans un fluide non visqueux, la charge totale reste constante.

Tous les termes qui font partie de l'équation (IV.23) caractérisent l'énergie rapportée à l'unité de poids.

§ 16. DISTRIBUTION DE LA PRESSION SUR LA SURFACE D'UN CORPS. COEFFICIENT DE PRESSION

Pour la résolution d'un grand nombre de problèmes pratiques il est indispensable de connaître le caractère de la distribution des pressions hydrodynamiques sur la surface d'un corps. Dans le cas d'un mouvement longitudinal des corps allongés, la viscosité influe peu sur la valeur de la pression, ce qui permet d'employer les intégrales des

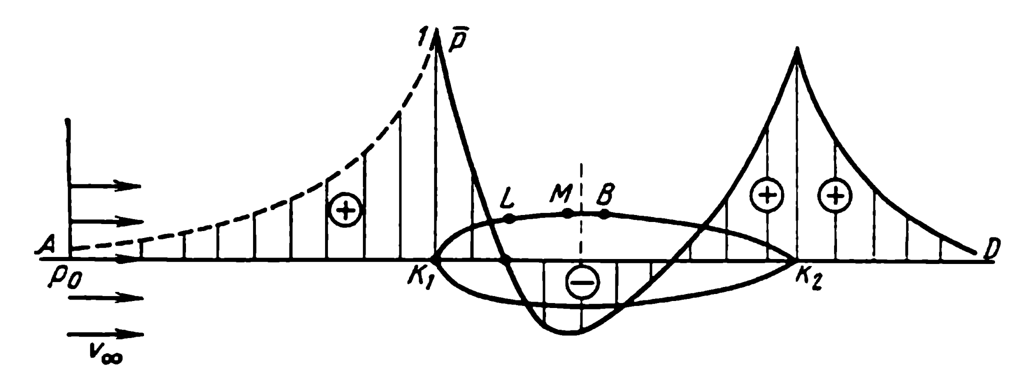


Fig. IV.3

équations du mouvement d'un fluide non visqueux sous la forme de l'équation de Bernoulli et, si le mouvement du fluide est potentiel, les intégrales d'Euler ou de Lagrange.

Examinons le mouvement de translation dans un fluide d'un corps de rotation à vitesse constante $v_0 = -v_\infty$. Précédemment (§ 8) il a été noté que le mouvement absolu d'un fluide provoqué par le mouvement d'un corps à vitesse constante ne sera pas permanent et, par conséquent, on ne peut utiliser dans ce cas les intégrales de Bernoulli et d'Euler.

Pour ramener le mouvement d'un fluide à un mouvement permanant, utilisons le principe de l'inversion et examinons l'écoulement autour d'un corps immobile par un courant se déplaçant à une vitesse v_∞ (fig. IV.3). Désignons par p_0 la pression à l'infini en amont du corps dans un courant potentiel. En utilisant l'équation (IV.22) on détermine la pression hydrodynamique de surcharge.

La ligne de courant AK_1BK_2D venant de l'infini bifurque au point K_1 du corps et converge à nouveau dans sa partie arrière au point K_2 et s'en va à l'infini (point D). Déterminons le caractère de variation de la vitesse et de la pression le long de cette ligne de courant. Ecrivons l'équation de Bernoulli pour le point A et le point quelconque B sur la ligne du courant

$$p_0 + \frac{\rho v_\infty^2}{2} = p + \frac{\rho v^2}{2}.$$

La pression au point arbitraire B est

$$p = p_0 + \frac{\rho v_\infty^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}.$$

Ordinairement, en mécanique des fluides on prend intérêt non pas à la pression p même, mais à la différence entre celle-ci et la pression dans un courant irrotationnel p_0, qui caractérise la pression hydrodynamique de surcharge

$$p - p_0 = \frac{\rho v_\infty^2}{2}\left[1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2\right]. \qquad \text{(IV.24)}$$

L'équation (IV.24) donne la loi de la variation de la pression de surcharge le long d'une ligne de courant en fonction de la vitesse. Réduisons-la à la forme sans dimensions en divisant les deux membres par $\rho v_\infty^2/2$. La valeur $\rho v_\infty^2/2$ est dite pression dynamique du courant arrivant

$$\bar{p} = \frac{p - p_0}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2, \qquad \text{(IV.25)}$$

où $\bar{p}$ est une grandeur sans dimension appelée coefficient de pression. Elucidons les principales propriétés de ce coefficient égal au rapport de la pression de surcharge à la pression dynamique du courant arrivant. L'expression de $\bar{p}$ (son deuxième membre) ne contient pas la masse volumique du fluide ρ. Il en résulte que le coefficient de pression ne dépend pas de la nature du fluide. Ceci est largement utilisé dans la pratique de l'expérimentation, car il devient possible de comparer les résultats des essais des corps dans les différents fluides, par exemple dans l'eau et dans l'air. Dans les conditions d'écoulement analogues, les coefficients de pression sont identiques. Les pressions elles-mêmes dans l'eau et dans l'air diffèrent considérablement (pour des vitesses identiques) par suite d'une grande différence entre les masses volumiques des fluides ($\rho_{eau} : \rho_{air} \approx 800$).

Déterminons le caractère de la distribution du coefficient de pression le long d'une ligne de courant AK_1BK_2D. A l'infini en amont du corps $v = v_\infty$, $p = p_0$, c'est-à-dire $\bar{p} = 0$. A mesure que la particule fluide se déplace de l'infini vers le corps, sa vitesse diminue sans cesse ; par conséquent $\bar{p}$ augmente, comme le montre la figure IV.3. Au point K_1 de la partie avant, où s'effectue la bifurcation des lignes de courant, la vitesse du fluide $v = 0$. La ligne de courant en ce point arrive normalement au corps ; la vitesse de la particule fluide, dirigée le long d'une ligne de courant, par suite de la condition d'imperméabilité doit être nulle.

Les points de l'écoulement en lesquels la vitesse s'annule s'appellent points critiques. En un point critique, $\bar{p} = 1$. Ensuite le long

de la surface du corps, la vitesse augmente. En un point quelconque L du corps la vitesse du fluide sera égale à la vitesse de l'écoulement arrivant v_∞ et le coefficient de pression s'annulera, $\bar{p} = 0$. Derrière ce point, dans la région de l'épaisseur maximale du corps, où le rétrécissement de l'écoulement est maximal, se trouve la région où les vitesses de fluide sont supérieures à celles de l'écoulement arrivant. Dans la zone où les vitesses $v > v_\infty$ le coefficient de pression est négatif $\bar{p} < 0$. Autrement dit, la pression de surcharge $(p - p_0)$ dans cette zone est négative, c'est-à-dire c'est une zone de dépression. Notons que la pression absolue p dans la zone de dépression est toujours supérieure à zéro.

Aux points situés derrière la section maximale du corps la vitesse commence à diminuer et $\bar{p}$ à augmenter. Au point K_2 de la partie arrière du corps s'effectue la convergence des lignes de courant qui s'écoulent par les surfaces supérieure et inférieure du corps. Par suite de l'univocité et du caractère fini du champ la vitesse au point K_2 est nulle, c'est-à-dire que ce point est également un point critique. Plus loin, le long de la ligne de courant, on observe une augmentation continue de la vitesse jusqu'à v_∞ et le coefficient de pression varie de l'unité à zéro.

Un tel caractère de distribution des pressions le long de la surface du corps correspond aux données des expériences sur l'écoulement d'un fluide autour des corps.

§ 17. APPLICATION DES LOIS DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET DES MOMENTS DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT AUX FLUIDES

Un des principaux problèmes de la mécanique des fluides est la détermination de l'action totale des forces qui s'exercent du côté du fluide sur le corps. En vertu des formules générales (I.14) et (I.15), ce problème peut être résolu si l'on connaît la répartition des contraintes $\bar{p}_n$ sur le corps.

En écoulement permanent d'un fluide non visqueux, la pression se détermine à partir des intégrales de Bernoulli ou d'Euler; il est indispensable de connaître la distribution des vitesses sur la surface du corps.

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide visqueux, la détermination des réactions hydrodynamiques s'exerçant sur les corps peut se faire si l'on connaît non seulement les pressions, mais aussi les contraintes tangentielles, ce qui représente un problème encore plus compliqué.

Il se trouve, cependant, que la détermination des réactions hydrodynamiques peut s'effectuer en faisant appel aux lois générales de la mécanique, à savoir: la loi de la quantité de mouvement et la

loi des moments de la quantité de mouvement, dont l'emploi pour l'écoulement permanent du fluide est particulièrement effectif. Ces lois appliquées en mécanique des fluides prennent une forme spécifique.

Commençons par l'examen de la loi de la quantité de mouvement. Sa formulation est connue de la mécanique: la dérivée par rapport

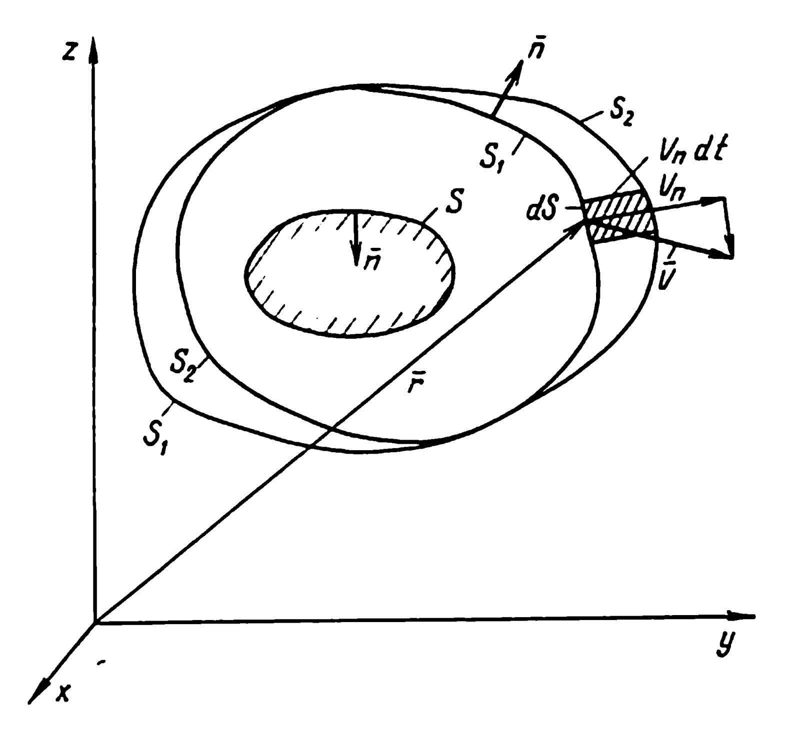


Fig. IV.4

au temps du vecteur quantité de mouvement $\overline{Q}_t$ d'un système matériel est égale au vecteur principal $\overline{R}$ de toutes les forces appliquées au système

$$\frac{d\overline{Q}_t}{dt} = \overline{R}. \tag{IV.26}$$

Notons que la dérivée se calcule dans un système de coordonnées fixes.

Isolons dans un fluide un volume arbitraire V_1 (fig. IV.4) limité au moment initial de temps par la surface S_1. Le volume fluide peut contenir un corps (ou des corps) solide limité par la surface S. Orientons les normales à ces surfaces, extérieures par rapport au volume de fluide.

Appelons la surface S_1, immobile dans l'espace, surface de contrôle; l'écoulement du fluide s'effectue par-dessus cette surface.

Isolons une particule fluide de masse $\rho\, dV$. Si la vitesse de cette particule est $\overline{v}$, alors le vecteur élémentaire de la quantité de son

mouvement se déterminera par l'égalité

$$d\bar{Q}_f = \rho\, dV v.$$

Le vecteur de la quantité de mouvement du volume fluide $\bar{Q}_f$ s'obtient par l'intégration sur tout le volume

$$\bar{Q}_f = \int_{V_1} \rho \bar{v}\, dV. \qquad \text{(IV.27)}$$

Désignons par $\bar{R}_{\text{mass}}$ le vecteur principal des forces massiques et par $\bar{R}_{\text{sup}}$ le vecteur principal des forces superficielles appliquées au fluide à ses frontières intérieure et extérieure. La loi de la quantité de mouvement formulée ci-dessus s'écrira ainsi :

$$\frac{d}{dt}\int_{V_1} \rho \bar{v}\, dV = \bar{R}_{\text{mass}} + \bar{R}_{\text{sup}}. \qquad \text{(IV.28)}$$

Cette égalité représente l'expression mathématique générale de la loi de la quantité de mouvement en mécanique des fluides. Cependant lorsqu'on utilise cette expression, il faut connaître le champ de la vitesse $\bar{v}\,(x, y, z, t)$ en tous les points du volume délimité.

Montrons que pour le calcul de la variation de la quantité de mouvement en écoulement permanent du fluide, il n'est pas nécessaire de connaître la vitesse en tous les points du volume délimité ; on ne doit connaître que la vitesse à la frontière du volume, c'est-à-dire à la surface de contrôle.

Pour le démontrer, calculons la variation de la quantité de mouvement. Pendant un intervalle de temps élémentaire dt, le volume fluide délimité s'écoulera par la surface de contrôle et occupera la position limitée par la surface S_2 (fig. IV.4). Les surfaces S_1 et S_2 sont infiniment voisines.

En écoulement permanent du fluide, quand les vitesses ne dépendent pas du temps, la quantité de mouvement du fluide dans la région de l'espace, commune aux surfaces S_1 et S_2, aux différents instants de temps est la même, c'est-à-dire $d\bar{Q}_f/dt = 0$. Par conséquent, la variation de la quantité de mouvement du volume fluide V_1 est liée seulement avec l'écoulement d'une partie de celui-ci par-dessus la surface de contrôle. La quantité de mouvement des volumes sortis et entrés se calculent facilement. Pour cela, isolons sur la surface de contrôle une aire élémentaire dS ; désignons par $\bar{v}$ le vecteur vitesse au centre de l'aire et par v_n la composante normale de la vitesse. Pendant le temps dt par cette aire s'écoulera une quantité de fluide $(v_n\, dt)\, dS$; la masse de fluide écoulé se déterminera par l'expression $\rho\,(v_n\, dt)\, dS$ et le vecteur quantité élémentaire de mouvement sera $\rho\,(v_n\, dt)\, dS\bar{v}$. La variation générale de la quantité de mouvement par suite de l'écoulement du fluide par la surface de

contrôle S_1 s'obtient par l'intégration le long de celle-ci des quantités élémentaires de mouvement

$$d\overline{Q}_t = \oint_{S_1} \rho v_n \, dt \, dS \overline{v} = dt \oint_{S_1} \rho \overline{v} v_n \, dS.$$

Dans cette expression dt est sorti de sous le signe somme, car la surface de contrôle est immobile dans l'espace. L'expression cherchée pour la dérivée de la quantité de mouvement en régime permanent du fluide prend la forme

$$\frac{d\overline{Q}_t}{dt} = \oint_{S_1} \rho \overline{v} v_n \, dS, \tag{IV.29}$$

c'est-à-dire que la dérivée de la quantité de mouvement est égale au flux de la quantité de mouvement à travers la surface de contrôle.

Trouvons des expressions explicites pour les vecteurs principaux des forces massiques et de surface. Si $\overline{F}$ est la contrainte des forces massiques, alors le vecteur principal des forces massiques

$$\overline{R}_{\text{mass}} = \int_{V_1} \rho \overline{F} \, dV.$$

Le vecteur principal des forces de surface peut être exprimé par l'intermédiaire des contraintes des forces de surface $\overline{p}_n$ d'après la formule (I.14)

$$\overline{R}_{\text{sur}} = \oint_{S_1+S} \overline{p}_n \, dS.$$

En substituant les expressions obtenues ci-dessus dans la loi de la quantité de mouvement, écrivons-la sous la forme suivante:

$$\oint_{S_1+S} \rho \overline{v} v_n \, dS = \int_{V_1} \rho \overline{F} \, dV + \oint_{S_1+S} \overline{p}_n \, dS, \tag{IV.30}$$

qui représente l'expression générale de la loi de la quantité de mouvement en écoulement permanent du fluide. Etant donné qu'en déduisant cette loi sous la forme (IV.30) on n'a fait aucune hypothèse sur la nature du fluide, elle est donc valablo aussi bien pour les gaz que pour les liquides, pour les fluides visqueux que pour les fluides non visqueux.

Le cas où l'on peut négliger les forces massiques est très important, ce qui a été exposé d'une façon détaillée au § 15. Nous rappellerons seulement ici que par contrainte on entend les valeurs hydrodynamiques de surcharge, déduction faite de la pression hydrostati-

que. Dans ce cas la loi de la quantité de mouvement prend la forme

$$\oint_{S_1+S} \rho \bar{v} v_n \, dS = \oint_{S_1+S} \bar{p}_n \, dS. \qquad \text{(IV.31)}$$

Dans un écoulement autour d'un corps solide limité par une surface S, la condition d'imperméabilité $v_n = 0$ y est observée. L'action qui s'exerce du côté du fluide sur ce corps, c'est-à-dire la réaction hydrodynamique cherchée $\bar{R}$, se détermine évidemment comme $\bar{R} = -\oint_S \bar{p}_n dS$; le signe moins signifie que l'action du corps solide sur le fluide suivant la troisième loi de Newton est de sens contraire à l'action du fluide sur le corps.

En partant de ce fait, on peut de (IV.31) obtenir la formule suivante pour la détermination de la réaction hydrodynamique

$$\bar{R} = -\oint_{S_1} \rho \bar{v} v_n \, dS + \oint_{S_1} \bar{p}_n \, dS. \qquad \text{(IV.32)}$$

La valeur principale de la loi de la quantité de mouvement représentée sous la forme (IV.31) ou (IV.32) consiste en ce que les deux membres de ces expressions contiennent seulement les intégrales sur la surface de contrôle S_1. Autrement dit, pour utiliser cette loi il faut connaître le caractère du mouvement de fluide non dans tout le volume, mais seulement sur la surface de contrôle. Pour simplifier le calcul des intégrales, la surface de contrôle peut être tracée d'une façon tout à fait arbitraire. En partant des considérations physiques, on peut parfois établir les valeurs des vitesses, des pressions et des contraintes tangentielles dans certaines de ses régions séparées.

En considérant le fluide non visqueux et en tenant compte de ce que dans ce cas la contrainte $\bar{p}_n$ est dirigée en sens contraire à la normale extérieure $\bar{p}_n = -p\bar{n}$, où p est la pression dans le fluide, on peut représenter la loi de la quantité de mouvement sous la forme suivante:

$$\oint_{S_1+S} \rho \bar{v} v_n \, dS = -\oint_{S_1+S} p\bar{n} \, dS. \qquad \text{(IV.33)}$$

Notons que dans un écoulement non permanent la variation de la quantité de mouvement avec le temps sera

$$\frac{d\bar{Q}_t}{dt} = \frac{\partial \bar{Q}_t}{\partial t} + \oint_{S_1} \rho \bar{v} v_n \, dS = \int_{V_1} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}) \, dV + \oint_{S_1} \rho \bar{v} v_n \, dS. \qquad \text{(IV.34)}$$

Le terme $\partial \bar{Q}_t / \partial t$ correspond à la variation locale de la quantité de mouvement dans le temps par suite d'un écoulement non station-

naire, et le terme $\oint\limits_{S_1} \rho\bar{v}v_n dS$ représente le flux de la quantité de mouvement par la surface de contrôle.

De façon analogue, on peut établir la loi des moments de la quantité de mouvement. Si $\bar{r}$ est le rayon vecteur du centre de l'aire à la surface de contrôle, alors le moment de la quantité de mouvement du volume élémentaire sorti s'obtient par une multiplication vectorielle de $\bar{r}$ par sa quantité de mouvement. Ainsi, en écoulement permanent, la loi des moments de la quantité de mouvement prend la forme

$$\oint\limits_{S_1+S} \bar{r}\times\rho\bar{v}v_n\, dS = \oint\limits_{S_1+S} \bar{r}\times\bar{p}_n\, dS. \qquad \text{(IV.35)}$$

Le deuxième membre de (IV.35) traduit le moment des forces de surfaces. Pour le moment $\bar{M}$ de la réaction hydrodynamique par rapport à l'origine d'un système fixe de coordonnées, analogiquement à la formule (IV.32), on obtient

$$\bar{M} = -\oint\limits_{S_1} \rho(\bar{r}\times\bar{v})\, v_n\, dS + \oint\limits_{S_1} \bar{r}\times\bar{p}_n\, dS. \qquad \text{(IV.36)}$$

§ 18. THÉORÈME DE THOMSON ET SES COROLLAIRES

Etudions les propriétés de la circulation de la vitesse Γ en fonction des forces qui s'exercent dans le fluide. Comme suivant le théorème de Stokes la circulation Γ le long d'un contour fermé est égale à l'intensité des tourbillons se trouvant à l'intérieur de ce contour, alors cette étude permettra de mettre en évidence la relation entre le caractère du mouvement de fluide et les forces qui s'exercent dans ce fluide. Introduisons dans l'étude un contour fluide constitué au cours de tout le temps du mouvement des mêmes particules fluides. Avec le temps, la position du contour fluide dans l'espace varie, mais par suite de la continuité du champ de vitesses, il reste continu. Si $d\bar{r}$ est le vecteur déplacement de l'élément du contour, alors la vitesse $\bar{v} = d\bar{r}/dt$.

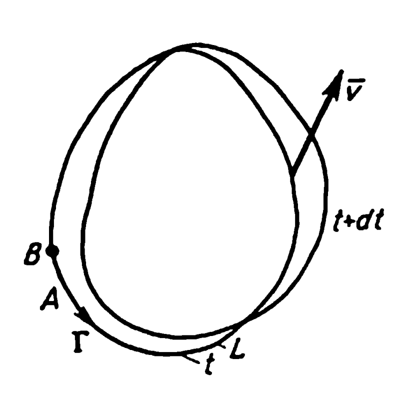


Fig. IV.5

Considérons la circulation de la vitesse suivant le contour fluide L (fig. IV.5) qui avec le temps occupera une autre position. Calculons la dérivée de la circulation de la vitesse par rapport au temps

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint\limits_{L} \bar{v}\cdot d\bar{r} = \oint\limits_{L} \frac{d\bar{v}}{dt}\cdot d\bar{r} + \oint\limits_{L} \bar{v}\cdot\frac{d}{dt}(d\bar{r}).$$

Etudions la seconde intégrale du deuxième membre de cette expression en tenant compte de ce que

$$\frac{d}{dt}(d\bar{r}) = d\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right).$$

Pour le contour fluide $\bar{v} = d\bar{r}/dt$, où $\bar{v}$ est la vitesse de la particule appartenant à ce contour. En tenant compte de ce fait, on obtient l'égalité

$$\frac{d}{dt}(d\bar{r}) = d\bar{v},$$

d'après laquelle la seconde intégrale peut être écrite sous la forme

$$\oint_L \bar{v}\cdot d\bar{v} = \oint_L d\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{v}}{2}\right) = \oint_L d\left(\frac{v^2}{2}\right) = [v_B^2 - v_A^2]_{B\to A} = 0,$$

étant donné que lorsqu'on contourne un contour fermé quelconque, en raison d'univocité du champ les vitesses $v_B = v_A$. Ainsi

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L \frac{d\bar{v}}{dt}\cdot d\bar{r}, \tag{IV.37}$$

c'est-à-dire que la dérivée de la circulation de la vitesse par rapport au temps est égale à la circulation de l'accélération suivant le contour fluide.

La formule (IV.37) est applicable aussi bien aux fluides visqueux qu'aux fluides non visqueux.

Calculons l'intégrale (IV.37) pour un fluide non visqueux. Exprimons l'accélération à l'aide de l'équation du mouvement d'Euler (IV.1), en admettant que les forces massiques dérivent d'un potentiel

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \operatorname{grad} U - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}\left(U - \frac{p}{\rho}\right).$$

En substituant cette dernière expression dans (IV.37) et en développant le produit scalaire, nous obtenons

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L \operatorname{grad}\left(U - \frac{p}{\rho}\right)\cdot d\bar{r} = \oint_L d\left(U - \frac{p}{\rho}\right) = \left[U - \frac{p}{\rho}\right]_{A\to B} = 0. \tag{IV.38}$$

Dans le deuxième membre de (IV.38) il est tenu compte de ce que le champ des forces massiques et le champ des pressions dans le fluide sont univoques. De cette formule résulte le théorème de Thomson: dans un fluide non visqueux incompressible soumis à l'action des forces massiques potentielles, la circulation de la vitesse le long d'un contour fluide fermé quelconque est constante dans le temps.

Utilisons ce théorème pour démontrer que les mouvements tourbillonnaires et non tourbillonnaires d'un fluide non visqueux ne changent pas avec le temps.

Si au moment initial le mouvement du fluide était non tourbillonnaire, alors d'après le théorème de Thomson, il restera non tourbillonnaire tout le temps ultérieur. Supposons qu'au moment initial t_0 le mouvement du fluide soit partout potentiel. Alors d'après le théorème de Stokes (§ 12) la circulation le long d'un contour fluide quelconque est égale à zéro $\Gamma_{t_0} = 0$. Mais d'après le théorème de Thomson, la variation de la circulation le long de n'importe quel contour fluide n'a pas lieu dans le temps $d\Gamma/dt = 0$ ou $\Gamma_t = \Gamma_{t_0} = 0$. Autrement dit, en n'importe quel moment de temps, la circulation le long d'un contour fluide quelconque est nulle. D'où, suivant le théorème de Stokes, on peut conclure qu'à l'intérieur d'un contour fluide les tubes tourbillons n'apparaissent pas, c'est-à-dire que le mouvement du fluide reste non tourbillonnaire.

Si au moment initial de temps, le mouvement du fluide non visqueux est tourbillonnaire, alors d'après le théorème de Thomson le caractère tourbillonnaire du courant se conservera durant tout le temps ultérieur. La démonstration de ce corollaire s'effectue analogiquement.

Ainsi du théorème de Thomson et de ses corollaires il apparaît que dans un fluide non visqueux incompressible soumis à l'action des forces massiques potentielles le caractère tourbillonnaire ou non tourbillonnaire de l'écoulement de fluide se conserve tout le temps du mouvement. Compte tenu de ce fait, dans les chapitres suivants ces mouvements seront examinés séparément.

CHAPITRE V

ÉCOULEMENTS IRROTATIONNELS DES FLUIDES

§ 19. POSITION DU PROBLÈME GÉNÉRAL D'UN ÉCOULEMENT IRROTATIONNEL DES FLUIDES. MÉTHODE DE SUPERPOSITION DE PLUSIEURS ÉCOULEMENTS

On appelle mouvement de fluide irrotationnel celui où les vitesses angulaires sont nulles. Dans un écoulement irrotationnel, la vitesse $\bar{v}$ s'exprime par le potentiel de la vitesse φ suivant la relation

$$\bar{v} = \text{grad}\, \varphi. \qquad (V.1)$$

Si le potentiel de la vitesse est connu, alors pour le calcul de la pression on peut utiliser les intégrales des équations du mouvement de Lagrange (IV.18) et (en écoulement permanent) d'Euler (IV.19).

Dans le système de coordonnées cartésiennes, la liaison des projections des vitesses avec le potentiel φ suivant (V.1) est

$$\bar{v} = \bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z = \bar{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

d'où

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (V.2)$$

La projection de la vitesse sur une direction arbitraire l est

$$v_l = \frac{\partial\varphi}{\partial l}, \qquad (V.3)$$

d'où il est facile d'établir que les dimensions du potentiel de la vitesse sont $[\varphi] = [v]\,[\partial l] = L^2T^{-1}$.

Pour un écoulement irrotationnel, la résolution des problèmes hydrodynamiques se simplifie sensiblement. En effet, au lieu de déterminer, comme dans le cas général, trois projections de la vitesse v_x, v_y, v_z, dont chacune dépend de trois coordonnées x, y, z et du temps t, en écoulement irrotationnel on doit trouver une seule fonction, le potentiel de la vitesse $\varphi(x, y, z, t)$; les projections des vitesses s'obtiennent ensuite par différentiation du potentiel par rapport aux coordonnées. Autrement dit, la possibilité d'introduire le potentiel de la vitesse équivaut à une diminution du nombre d'inconnues devant être déterminées.

Déduisons l'équation à laquelle satisfait le potentiel de la vitesse. Pour cela, substituons les valeurs de la vitesse suivant (V.1) dans l'équation de continuité

$$\operatorname{div} \bar{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta\varphi = 0, \tag{V.4}$$

où Δ est le laplacien. Dans le système de coordonnées cartésiennes, l'expression $\Delta\varphi = 0$ a la forme

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{V.5}$$

Cette équation s'obtient facilement en substituant les expressions des projections des vitesses suivant (V.2) dans l'équation de continuité.

De cette façon, le potentiel de la vitesse satisfait à l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$, φ étant ici fonction harmonique.

Examinons certaines propriétés des écoulements potentiels. Calculons la circulation de la vitesse le long d'un contour fermé arbitraire dans un courant potentiel. Pour cela, substituons dans l'expression (III.57) les valeurs des projections de la vitesse

$$\Gamma = \oint_L v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = \oint_L \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \oint_L d\varphi. \tag{V.6}$$

Si le potentiel de la vitesse est une fonction univoque des coordonnées, alors en contournant le contour fermé

$$\Gamma = \oint_L d\varphi = (\varphi_B - \varphi_A)_{B\to A} = 0.$$

De cette façon, si le potentiel de la vitesse est univoque, la circulation de la vitesse le long de n'importe quel contour fermé devient nulle. Suivant le théorème de Stokes, cela signifie qu'à l'intérieur de ces contours il n'y a pas de tubes tourbillons, c'est-à-dire que le mouvement du fluide est irrotationnel.

En mécanique des fluides on rencontre souvent des écoulements dans certaines régions desquels le mouvement est rotationnel et en dehors de ces régions il est irrotationnel. L'étude de tels écoulements doit, généralement parlant, s'effectuer d'après les méthodes générales, c'est-à-dire en déterminant les trois projections de la vitesse v_x, v_y, v_z. Cependant, dans certains cas, pour simplifier les calculs on introduit le potentiel des vitesses multiforme. Ceci montre que dans de tels courants la circulation de la vitesse le long de certains contours est différente de zéro. En contournant ces contours, le potentiel n'est pas univoque, c'est-à-dire :

$$\Gamma = \oint_L^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A \neq 0.$$

De tels écoulements des fluides se nomment écoulements irrotationnels de circulation.

La solution de l'équation de Laplace doit satisfaire aux conditions aux limites et pour le mouvement non stationnaire, encore aux conditions initiales. La condition aux limites sur la surface S d'un corps pour la détermination d'un potentiel peut être représentée suivant § 14 sous la forme suivante:

pour l'écoulement autour d'un corps

$$v_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_S = 0, \tag{V.7}$$

où Φ est le potentiel de la vitesse d'écoulement autour d'un corps (potentiel du mouvement inversé);

pour le mouvement absolu

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_S = v_{nc}, \tag{V.8}$$

où φ est le potentiel de la vitesse du mouvement absolu; $v_n = \partial\varphi/\partial n$ composante normale de la vitesse de la particule fluide sur la surface et v_{nc} composante normale de la vitesse du point de la surface du corps. Rappelons que ces conditions traduisent l'écoulement sans décollement et l'imperméabilité de la surface du corps.

Le problème de la détermination du potentiel φ à partir de l'équation de Laplace suivant la valeur donnée de la dérivée normale à la surface du corps se nomme en mathématiques problème de Neumann [21]. Pour un corps se trouvant dans un fluide illimité, ce qui correspond au problème extérieur de Neumann, la fonction φ doit être soumise à une condition supplémentaire suivant laquelle le potentiel du mouvement absolu doit diminuer au fur et à mesure de l'éloignement du corps, tendant à l'infini vers zéro, car le fluide est immobile à l'infini. Mathématiquement cette condition peut se traduire par la relation:

$$\varphi \to 0 \quad \text{pour} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty.$$

Les fonctions satisfaisant à l'équation de Laplace se nomment en mathématiques fonctions harmoniques [21]. Remarquons que les dérivées de tout ordre d'une fonction harmonique suivant les coordonnées sont également des fonctions harmoniques, c'est-à-dire qu'elles satisfont à l'équation de Laplace.

Pour toute surface fermée S l'égalité suivante a lieu (§ 11):

$$\oint_S v_n \, dS = 0.$$

Etant donné qu'en écoulement potentiel $v_n = \partial\varphi/\partial n$, on a

$$\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0.$$

Cette dépendance est caractéristique pour n'importe quelle fonction potentielle.

En mathématiques on démontre que le potentiel d'une vitesse ne peut avoir un maximum (ou un minimum) à l'intérieur du volume d'un fluide; l'extrémum d'un potentiel ne peut avoir lieu qu'aux frontières d'un écoulement. Il s'ensuit que le carré de la vitesse ne peut pas avoir de maximum à l'intérieur d'un volume de fluide. De cette façon, le maximum d'une vitesse s'obtient toujours aux frontières d'un volume, en particulier à la surface d'un corps. Suivant l'intégrale d'Euler, les pressions minimales (correspondant aux points où la vitesse est maximale) seront également à la surface du corps.

Etant donné que l'équation de Laplace, à partir de laquelle on détermine le potentiel de la vitesse, est linéaire, le principe de superposition des solutions est valable. Supposons qu'on ait une série de potentiels φ_k ($k = 1, 2 \ldots$) dont chacun satisfait à l'équation de Laplace $\Delta\varphi_k = 0$.

En composant la fonction

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \tag{V.9}$$

et en la portant dans l'équation (V.5) nous trouvons qu'elle satisfait également à l'équation de Laplace.

Cette méthode de résolution de l'équation de Laplace, souvent utilisée en mécanique des fluides, s'appelle méthode d'addition des écoulements potentiels. Les potentiels de la vitesse s'ajoutent algébriquement et les vitesses $\bar{v}_k = \operatorname{grad} \varphi_k$ géométriquement. Pour avoir la possibilité d'utiliser la méthode des superpositions, il faut également que les conditions aux limites imposées à la vitesse aux surfaces qui limitent un volume, en particulier les surfaces d'un corps, soient linéaires. Des conditions aux limites pour les surfaces d'un corps et la paroi solide il découle que cette condition dans le cas d'un fluide illimité est aussi remplie.

Pour le problème de Neumann dans le cas d'un fluide illimité, l'unicité de la solution de l'équation de Laplace est démontrée.

§ 20. CARACTÉRISTIQUES D'UN ÉCOULEMENT IRROTATIONNEL PLAN D'UN FLUIDE

Pour tout écoulement plan d'un fluide, d'après les déductions faites au § 13, il existe une fonction de courant ψ liée aux projections des vitesses par les relations (III.60)

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

En portant les valeurs v_x et v_y dans l'expression de la vitesse angulaire de rotation d'une particule fluide ω_z (dans l'écoulement plan les ω_x et ω_y sont nulles), nous obtenons une équation différentielle à laquelle satisfait la fonction du courant:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)$$

ou

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\omega_z. \qquad \text{(V.10)}$$

Si ω_z est la fonction donnée, cette équation s'appelle équation de Poisson.

Supposons que l'écoulement plan d'un fluide est irrotationnel, c'est-à-dire $\omega_z = 0$. Dans ce cas l'équation (V.10) se transforme en l'équation de Laplace pour la fonction du courant

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \qquad \text{(V.11)}$$

En écoulement irrotationnel il existe un potentiel de la vitesse φ lié aux projections des vitesses d'un écoulement plan par les relations

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \qquad \text{(V.12)}$$

Le potentiel de la vitesse satisfait également à l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

En comparant les égalités (III.60) et (V.12) on trouve que les fonctions φ et ψ pour un écoulement plan sont liées entre elles de la manière suivante:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \qquad \text{(V.13)}$$

De plus, φ et ψ sont des fonctions harmoniques (elles satisfont à l'équation de Laplace). Les égalités (V.13) et la propriété d'harmonicité représentent les conditions de Cauchy-Riemann, connues dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. Suivant ces conditions, les fonctions φ et ψ peuvent être examinées non pas séparément dans le domaine de la variation des variables réelles x et y, mais comme une combinaison complexe dans le plan de la variable complexe

$$z = x + iy; \quad i = \sqrt{-1}.$$

La fonction

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \qquad \text{(V.14)}$$

dont la partie réelle représente le potentiel et le coefficient de la partie imaginaire la fonction du courant, se nomme fonction caractéristique d'un écoulement irrotationnel plan du fluide; $w(z)$ est appelé parfois dans la littérature potentiel complexe.

Remarquons que w pour les écoulements non stationnaires peut dépendre, outre les coordonnées, également du temps t comme paramètre.

Elucidons les avantages d'introduction de la fonction caractéristique w. D'après ce qui a été dit, on voit que l'écoulement plan d'un fluide peut être caractérisé soit par les fonctions $\varphi(x, y)$ ou $\psi(x, y)$ de deux variables réelles indépendantes x, y, soit par la fonction complexe $w(z)$ d'une variable complexe indépendante z. Il est évident que l'étude de la fonction d'une variable indépendante est beaucoup plus simple que l'étude de la fonction de deux variables indépendantes. L'introduction de la fonction caractéristique permet d'utiliser pour la résolution d'un problème plan en dynamique des fluides l'appareil effectif de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Comme on le sait, les conditions de Cauchy-Riemann traduisent la propriété d'analyticité (régularité) de la fonction de la variable complexe $w(z)$ suivant laquelle la dérivée

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{w(z+\Delta z) - w(z)}{\Delta z}$$

est la même, indépendamment de la loi suivant laquelle l'accroissement complexe Δz tend vers zéro. Il en résulte que

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial (iy)} .$$

La grandeur dw/dz s'appelle vitesse complexe. En utilisant pour son calcul les expressions pour les projections des vitesses, nous obtenons

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi + i\psi) = v_x - iv_y. \qquad (V.15)$$

Déterminons la relation entre les vitesses réelle et complexe. On sait que tout nombre complexe peut être représenté comme un vecteur à deux dimensions; sa multiplication par i correspond à une rotation d'un angle $\pi/2$ dans le sens contraire de l'horloge. De ce fait, le vecteur de la vitesse réelle $\bar{v}$ avec les projections v_x et v_y peut être représenté sous la forme complexe de la façon suivante

$$\bar{v} = v_x + iv_y. \qquad (V.16)$$

En comparant (V.15) et (V.16), nous voyons que les parties réelles des vecteurs vitesse réelle et complexe sont identiques et leurs parties imaginaires sont de signe contraire. Sur la fig. V.1 sont montrés les vecteurs $\bar{v}$ et dw/dz.

La fonction caractéristique $w(z)$ est déterminée à une constante arbitraire près. Cette constante ne joue aucun rôle, car seules les projections de la vitesse, déterminées par la différentiation de w

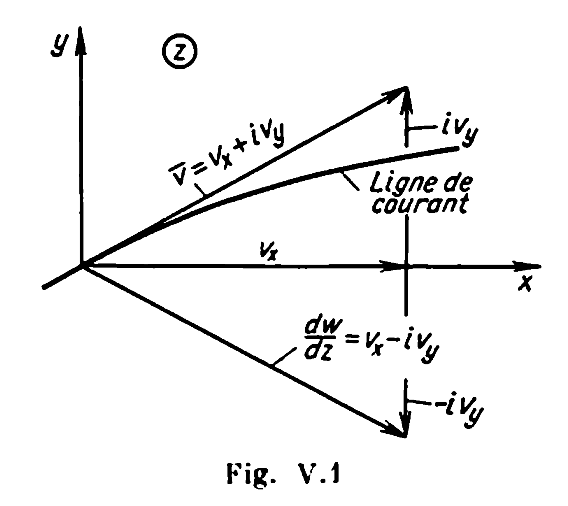


Fig. V.1

suivant la coordonnée, présentent un intérêt physique. Sans restreindre la généralité, on peut poser la constante arbitraire figurant dans la fonction caractéristique égale à zéro.

Suivant (V.15) la valeur conjuguée de la vitesse complexe est égale à la vitesse réelle. Dans les applications ce n'est pas le vecteur vitesse $\bar{v}$ (ou ses composantes) qui est important mais la valeur du carré de la vitesse v^2 qui fait directement partie de l'intégrale d'Euler ou de Lagrange. Il est facile de voir que

$$v^2 = \frac{dw}{dz}\frac{d\bar{w}}{dz} = (v_x - iv_y)(v_x + iv_y) = v_x^2 + v_y^2. \quad \text{(V.17)}$$

Fig. V.2

En déterminant v^2 d'après la formule (V.17) il est avantageux de faire tous les calculs sous la forme complexe.

Très souvent pour exprimer la variable complexe z, on utilise non pas les coordonnées cartésiennes, mais par exemple les coordonnées polaires r et θ (fig. V.2)

$$\left.\begin{aligned} z &= x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta};\\ r &= \sqrt{x^2+y^2}; \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(V.18)}$$

Par la suite on aura souvent à calculer les projections des vitesses sur les axes des coordonnées polaires. Pour cette raison nous donnons les expressions correspondantes. La vitesse radiale (fig. V.2) v_r con-

formément à la formule générale de la dérivée d'une fonction suivant la direction

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \qquad (V.19)$$

La vitesse tangentielle v_θ représente la dérivée d'un potentiel suivant l'arc $l = r\theta$

$$v_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial (r\theta)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \qquad (V.20)$$

Dans cette dernière expression le rayon r est sorti de sous le signe de la différentielle, parce que pour l'arc élémentaire dl on peut le considérer comme constant.

Comme φ et ψ satisfont à l'équation de Laplace, pour les déterminer on peut partir du principe de superposition des écoulements. La fonction caractéristique $w = \varphi + i\psi$ est une combinaison linéaire des fonctions φ et ψ à chacune desquelles on peut appliquer le principe de superposition des écoulements. Par conséquent, on peut additionner les fonctions caractéristiques, ainsi que les vitesses complexes des écoulements plans d'un fluide.

§ 21. ÉCOULEMENTS IRROTATIONNELS PLANS SIMPLES

De la formule (V.14) il suit que toute fonction analytique $w(z)$ d'une variable complexe peut caractériser un certain écoulement irrotationnel d'un fluide. Ci-dessous seront examinées certaines fonctions de la variable complexe, caractérisant les écoulements plans simples, qui sont d'un usage fréquent lors de l'application de la méthode de superposition.

1. *Ecoulement de translation*

Examinons la fonction caractéristique

$$w = (a - ib)\, z,$$

où a et b sont des constantes.

La vitesse complexe est

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = a - ib,$$

d'où

$$v_x = a; \quad v_y = b,$$

d'où il suit que la vitesse de cet écoulement est constante en tous les points du courant. Désignons par v_∞ la vitesse de l'écoulement, alors $v_x = v_\infty \cos \alpha$; $v_y = v_\infty \sin \alpha$. Par conséquent,

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty (\cos \alpha - i \sin \alpha) = v_\infty e^{-i\alpha}.$$

En intégrant cette expression et en omettant la constante arbitraire non essentielle, nous obtenons

$$w = v_\infty e^{-i\alpha} z. \qquad (V.21)$$

On en déduit que la fonction caractéristique (V.21) décrit un écoulement de translation s'écoulant avec une vitesse constante v_∞ sous un angle α par rapport à la direction positive de l'axe x. Notons le cas particulier d'un écoulement de translation où le fluide se déplace le long de la direction positive de l'axe réel $\alpha = 0$

$$w = v_\infty z. \qquad (V.22)$$

Etant donné que les vitesses du mouvement de fluide en tous les points de l'écoulement sont identiques, on s'assure en se basant sur l'intégrale d'Euler que les pressions hydrodynamiques dans cet écoulement sont partout constantes.

2. *Source plane*

Considérons la fonction $w = a \ln z$, où $a > 0$. Déterminons le potentiel et la fonction du courant d'écoulement. Pour cela séparons les parties matérielle et imaginaire

$$w = a \ln z = a \ln (re^{i\theta}) = a (\ln r + i\theta),$$

d'où nous obtenons

$$\varphi = a \ln r; \quad \psi = a\theta.$$

Pour nous faire une idée des lignes de courant, égalons la fonction de courant à une grandeur constante

$$\psi = a\theta = C_1 \text{ ou } \theta = C.$$

Les lignes $\theta = C$ en coordonnées polaires représentent un faisceau de droites passant par l'origine des coordonnées.

Déterminons les projections de la vitesse; d'après les formules (V.19) et (V.20) nous obtenons

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{a}{r} = v; \quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0.$$

On en déduit que les vitesses d'écoulement sont dirigées suivant les rayons.

Les lignes de courant de l'écoulement sont montrées sur la fig. V.3, d'où il ressort que le fluide s'écoule d'un seul point radialement dans toutes les directions. Un tel écoulement est dit écoulement radial divergent. L'écoulement s'effectue d'un seul point dit centre de la source. $v \to 0$ quand $r \to \infty$, la diminution de la vitesse étant proportionnelle au premier degré de la distance du centre de la source.

Elucidons le sens physique de la constante a. A cet effet déterminons le débit de fluide Q traversant une surface cylindrique de hauteur unité avec une directrice en forme d'une courbe fermée arbitraire L entourant le centre de la source (fig. V.3). En se basant sur les données du § 13 nous obtenons l'expression

$$Q=[\psi_B-\psi_A]_{B\to A}=a(\theta_B-\theta_A)=a2\pi \quad \text{ou} \quad a=\frac{Q}{2\pi},$$

d'où il suit que la fonction de courant est multivoque ; physiquement cela équivaut à ce qu'un débit de fluide passant par une courbe fermée est différent de zéro. Ainsi, la fonction caractéristique d'un écoulement plan radial est

$$w=\frac{Q}{2\pi}\ln z, \qquad (V.23)$$

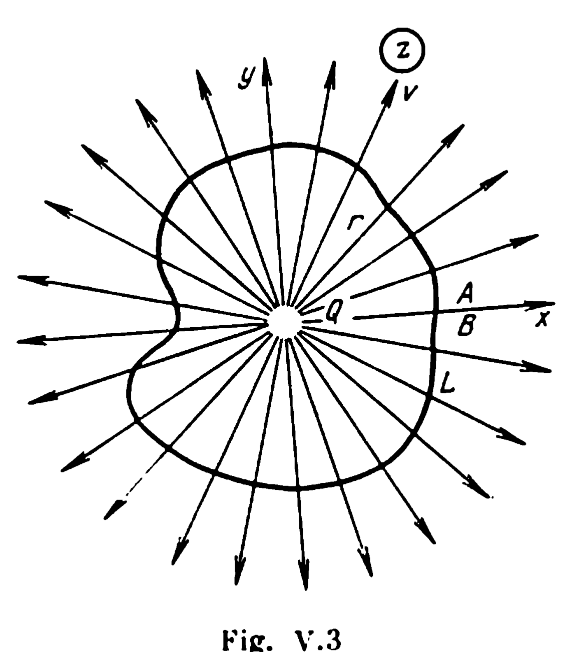


Fig. V.3

où Q est le débit de fluide traversant une courbe fermée L entourant le centre de la source.

La vitesse d'écoulement s'exprimera par la relation

$$v=\frac{Q}{2\pi}\frac{1}{r}. \qquad (V.24)$$

En désignant par p_0 la pression à l'infini et en tenant compte de ce qu'à l'infini le fluide est au repos $v_0=0$, nous obtenons d'après l'intégrale d'Euler l'expression des pressions provoquées par une source

$$p=p_0+\frac{\rho v_0^2}{2}-\frac{\rho v^2}{2}=p_0-\frac{\rho}{2}\left(\frac{Q}{2\pi r}\right)^2, \qquad (V.25)$$

d'où il résulte qu'au fur et à mesure qu'on se rapproche de la source, la pression décroît. Avec $r\to 0$ (au centre de la source) $p\to-\infty$.

Le cas d'un écoulement radial convergent (mouvement d'un fluide suivant les rayons vers le centre) s'obtient en remplaçant dans les formules ci-dessus Q par $-Q$. Si la source se trouve au point de coordonnée z_1 la fonction caractéristique de l'écoulement est

$$w=\frac{Q}{2\pi}\ln(z-z_1). \qquad (V.26)$$

Au centre de la source et du puits pour $r\to 0$, la vitesse $v\to\infty$. Les points d'un écoulement en lesquels la vitesse devient nulle s'appellent points singuliers.

Dans un écoulement plan, les points singuliers se trouvent à l'intersection de la ligne singulière avec le plan xy.

Des vitesses et des pressions infinies ne peuvent apparaître dans un fluide; par conséquent, les points singuliers d'un écoulement doivent être exclus de l'étude. Pour cette raison, la fonction (V.24) qui exprime la distribution des vitesses d'un écoulement plan radial décrit correctement du point de vue physique le phénomène d'écoulement d'un fluide seulement à un certain éloignement du point singulier, c'est-à-dire du centre de la source.

Les méthodes analogues de description des phénomènes physiques réels par des fonctions relativement simples possédant des points singuliers sont d'usage fréquent dans toutes les branches de la physique.

3. *Ecoulement plan avec circulation*

Examinons la fonction caractéristique

$$w = \frac{b}{i} \ln z = -ib \ln z,$$

où la constante $b > 0$.

En séparant dans cette expression le potentiel et la fonction de courant

$$w = \varphi + i\psi = -ib \ln (re^{i\theta}) = -ib (\ln r + i\theta)$$

nous obtenons

$$\varphi = b\theta; \quad \psi = -b \ln r.$$

Nous trouvons les lignes de courant $\psi = -b \ln r = C_1$, d'où il suit que $r = C$. Ainsi, les lignes de courant sont des cercles concentriques de centre l'origine (fig. V.4). Le mouvement est permanent, par conséquent les particules circulent le long des lignes de courant. Trouvons les projections de la vitesse sur les axes des coordonnées polaires

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{b}{r} = v.$$

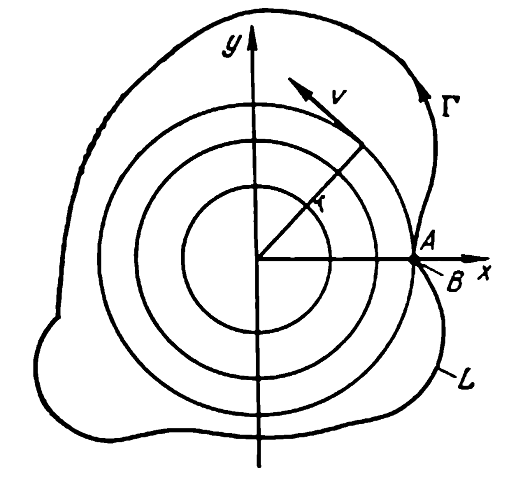


Fig. V.4

Comme il ressort de l'image des lignes de courant, les particules fluides se déplacent le long des cercles concentriques avec des vitesses $v = b/r$. Elucidons le sens physique de la constante b. Pour cela, déterminons la circulation de la vitesse le long d'un contour fermé L entourant l'origine. Suivant la fig. V.4 $\theta_A = 0$, $\theta_B = 2\pi$. En uti-

lisant la formule (V.6) nous obtenons

$$\Gamma = \oint_A^B d\varphi = [\varphi_B - \varphi_A] = b2\pi,$$

d'où il suit que

$$b = \frac{\Gamma}{2\pi},$$

et φ est une fonction multivoque des coordonnées.

En tenant compte de ce fait, la fonction caractéristique d'un écoulement plan avec circulation aura pour expression

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \tag{V.27}$$

et la vitesse en un point quelconque du fluide

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r}. \tag{V.28}$$

Il en résulte que le point $r = 0$ est un point singulier d'écoulement.

De l'expression (V.27) il suit que la circulation de la vitesse le long d'un contour fermé entourant le point singulier n'est pas nulle. De tels écoulements sont dits écoulements à potentiel de vitesses multivoque. Suivant le théorème de Stokes, ce cas correspond physiquement à la présence au point singulier d'un filet tourbillon avec circulation Γ. En dehors de ce filet tourbillon, l'écoulement du fluide est non tourbillonnaire. Parfois ce type d'écoulement est appelé tourbillon plan.

Si le point singulier (filet tourbillon) est situé en un point de coordonnée z_1 alors la fonction caractéristique de l'écoulement est

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln (z - z_1). \tag{V.29}$$

D'après l'intégrale d'Euler, la pression en n'importe quel point du fluide s'exprimera par la relation

$$p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} = p_0 - \frac{\rho}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r} \right)^2, \tag{V.30}$$

où p_0 est la pression dans un fluide au repos à l'infini. Au fur et à mesure de rapprochement du centre de courant de circulation, la pression diminue.

En combinant l'écoulement plan radial et l'écoulement avec circulation, nous obtenons un écoulement dit source-tourbillon. La fonction caractéristique de cet écoulement est

$$w = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln z, \tag{V.31}$$

et ses lignes de courant sont des spirales logarithmiques.

4. Dipôle

Examinons la combinaison d'une source et d'un puits à débits égaux disposés sur l'axe des x symétriquement par rapport à l'axe des y et situés à la distance Δx. La source est disposée à gauche et le puits à droite de l'axe des y (fig. V.5, *a*).

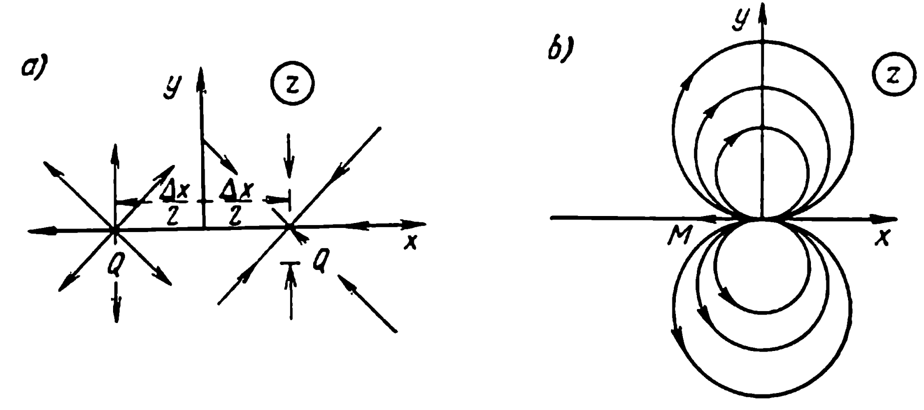


Fig. V.5

En utilisant la méthode de superposition des écoulements, écrivons la fonction caractéristique de l'écoulement résultant sous la forme

$$w=\frac{Q}{2\pi}\left[\ln\left(z+\frac{\Delta x}{2}\right)-\ln\left(z-\frac{\Delta x}{2}\right)\right]. \qquad \text{(V.32)}$$

En multipliant et en divisant cette expression par la distance séparant la source et le puits Δx, on peut écrire cette expression sous la forme suivante

$$w=\left(\frac{Q\Delta x}{2\pi}\right)\frac{\ln\left(z+\frac{\Delta x}{2}\right)-\ln\left(z-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Passons dans cette dernière expression à la limite en faisant tendre la distance entre la source et le puits vers zéro $\Delta x \to 0$. Exigeons de plus que

$$\lim_{\Delta x\to 0}(Q\,\Delta x)=M=\text{const},$$

c'est-à-dire que le produit du débit de la source et du puits par la distance qui les sépare Δx dans le cas d'un passage à la limite reste constant et égal à M. Dans le cas contraire, en additionnant une source et un puits de même débit on aurait une disparition de l'écoulement.

En effectuant le passage à la limite, on peut écrire l'expression de la fonction caractéristique

$$w=\lim_{\Delta\to 0}\left(\frac{Q\Delta x}{2\pi}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(z+\frac{\Delta x}{2}\right)-\ln\left(z-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{M}{2\pi}\frac{d}{dz}\ln z=\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z},$$

puisqu'il est facile de voir que le second multiplicateur représente la dérivée de la fonction ln z ($\Delta x = \Delta z$).

Ainsi, la fonction caractéristique de cet écoulement, appelée dipôle, est

$$w = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z}, \tag{V.33}$$

où M est le moment du dipôle.

En séparant dans (V.33) le coefficient de la partie imaginaire nous obtenons

$$w = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{x+iy} = \frac{M}{2\pi}\frac{x-iy}{x^2+y^2}; \quad \psi = -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2},$$

d'où l'équation de la ligne de courant prend la forme

$$C_1 = \psi = -\frac{1}{2C}\frac{M}{2\pi} = -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}; \quad x^2+y^2-2Cy = 0$$

ou

$$x^2+(y-C)^2 = C^2.$$

De cette dernière expression il ressort que les lignes de courant représentent des cercles tangents à l'axe des x à l'origine des coordonnées, avec des centres sur l'axe imaginaire (fig. V.5,b). Remarquons que le point $z = 0$ est de nouveau le point singulier de l'écoulement.

L'axe réunissant le puits avec la source se nomme l'axe du dipôle. Dans le cas donné, il forme l'angle $\beta = \pi$ avec la direction positive de l'axe des x. En tenant compte de ce fait, on peut représenter la fonction caractéristique du dipôle dont l'axe forme un angle β avec la direction de l'axe réel sous la forme suivante

$$w = -e^{i\beta}\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z}. \tag{V.34}$$

Calculons le carré de la vitesse. En utilisant l'expression (V.17) et (V.33) nous obtenons

$$v^2 = \left(-\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z^2}\right)\left(-\frac{M}{2\pi}\frac{1}{\bar{z}^2}\right) = \left(\frac{M}{2\pi}\right)^2\frac{1}{(x^2+y^2)^2} = \left(\frac{M}{2\pi}\right)^2\frac{1}{r^4},$$

d'où, d'après l'intégrale d'Euler, nous trouvons l'expression de la pression dans un écoulement dû au dipôle

$$p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} = p_0 - \frac{\rho}{2}\left(\frac{M}{2\pi}\right)^2\frac{1}{r^4},$$

où p_0 est la pression dans un fluide au repos à l'infini.

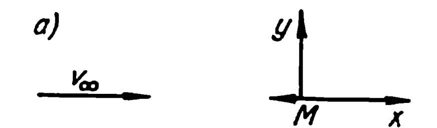
Notons que tous les types d'écoulements simples étudiés ci-dessus contenant des points singuliers s'appellent singularités hydrodyna-

miques. De tels écoulements simples sont utilisés pour la résolution des problèmes d'écoulement autour des corps cylindriques. Une telle méthode d'obtention de l'écoulement autour des corps se nomme parfois méthode des singularités hydrodynamiques.

§ 22. ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE DE RÉVOLUTION SANS CIRCULATION. PARADOXE D'EULER-D'ALEMBERT

Examinons un écoulement obtenu par addition des fonctions caractéristiques d'un écoulement de translation s'écoulant parallèlement à l'axe positif des x et du dipôle avec l'axe dirigé le long de l'axe négatif des x (fig. V.6,*a*). En utilisant les formules (V.22) et (V.33) et en passant aux coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, nous obtenons

$$w = v_\infty z + \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z} = v_\infty r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{M}{2\pi r}(\cos\theta - i\sin\theta).$$



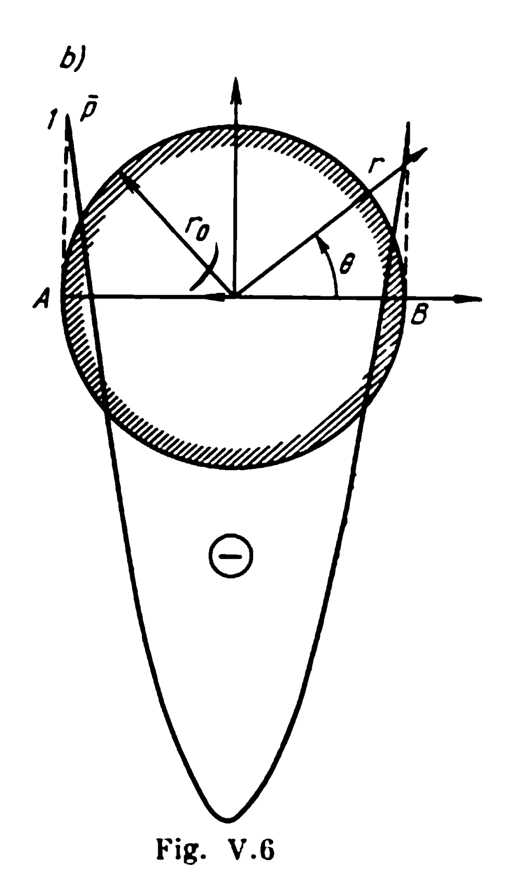


Fig. V.6

La valeur constante M, moment du dipôle, reste pour le moment indéterminée ; M et v_∞ ne dépendent pas du temps, c'est-à-dire le mouvement du fluide est permanent. En séparant dans l'expression de w les parties réelle et imaginaire, on peut écrire le potentiel et la fonction de courant sous la forme

$$\varphi = \left(v_\infty r + \frac{M}{2\pi r}\right)\cos\theta;$$

$$\psi = \left(v_\infty r - \frac{M}{2\pi r}\right)\sin\theta.$$

En égalant la fonction de courant à une valeur constante $\psi = C$, nous obtiendrons l'équation des lignes de courant et en admettant $C = 0$ nous trouverons la ligne nulle du courant

$$\psi = \left(v_\infty r - \frac{M}{2\pi r}\right)\sin\theta = 0.$$

Cette dernière équation se décompose en deux équations: la première $\sin\theta = 0$; $\theta = \pi k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, représentant l'équation de l'axe des x en coordonnées polaires;

la seconde

$$v_\infty r - \frac{M}{2\pi r} = 0,$$

c'est-à-dire

$$r = \sqrt{\frac{M}{2\pi v_\infty}} = \text{const} = r_0. \qquad \text{(V.35)}$$

étant l'équation d'un cercle de rayon r_0.

Suivant les conclusions du § 14, toute ligne de courant ou une partie de celle-ci dans un fluide non visqueux peut être remplacée par une paroi solide sans perturber l'écoulement du fluide. En remplaçant une partie de la ligne de courant nulle, correspondant à un cercle de rayon r_0, par une paroi solide (fig. V.6,*b*), nous obtiendrons l'image de l'écoulement autour d'un cylindre de rayon r_0 par un courant de translation de vitesse v_∞.

La liaison entre le rayon donné du cylindre r_0 et le moment inconnu du dipôle M se détermine par l'expression

$$M = 2\pi r_0^2 v_\infty, \qquad \text{(V.36)}$$

qui nous permet d'obtenir la fonction caractéristique et le potentiel de l'écoulement autour d'un cylindre de rayon r_0

$$w = v_\infty \left(z + \frac{r_0^2}{z}\right); \qquad \text{(V.37)}$$

$$\varphi = v_\infty \left(r + \frac{r_0^2}{r}\right) \cos\theta. \qquad \text{(V.38)}$$

Déterminons les projections des vitesses dans l'écoulement près du cylindre

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = v_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta; \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -v_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.39)}$$

Ces formules montrent que partout dans la région d'écoulement (pour $r \geqslant r_0$) en dehors du cylindre les vitesses sont finies. Les points singuliers de l'écoulement sont absents.

En des points sur le cylindre $r = r_0$ et les projections des vitesses pourront s'écrire

$$v_r = 0; \quad v_\theta = -2v_\infty \sin\theta. \qquad \text{(V.40)}$$

Comme sur le cylindre les directions du rayon et de la normale coïncident et la condition d'imperméabilité doit être remplie, l'égalité $v_r = 0$ montre que la solution obtenue est juste. Le signe

moins témoigne de ce que le sens de la vitesse est contraire au sens positif de comptage des angles.

La valeur totale de la vitesse aux points situés sur le cylindre est

$$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=2v_\infty \sin\theta. \qquad (V.41)$$

Déterminons la distribution des pressions sur le cylindre. Le coefficient de pression pour les points sur le cylindre est

$$\bar{p}=1-\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2=1-4\sin^2\theta. \qquad (V.42)$$

Les épures du coefficient de pression pour la moitié supérieure du cylindre sont montrées sur la fig. V.6. Pour la moitié inférieure du cylindre $180° \leqslant \theta° \leqslant 360°$ les valeurs v et $\bar{p}$ aux points symétriques par rapport aux axes des x et des y sont identiques. Les points A $(\theta=\pi)$ et B $(\theta=0)$, comme on le voit sur la figure, sont les points critiques sur le cylindre.

D'après la fig. V.6, on peut conclure que les pressions négatives de surcharge $(\bar{p}<0)$ dépassent sensiblement en valeur les pressions positives. Ceci explique, en particulier, le fait que sous l'action du vent certains ouvrages, tels que couvertures des édifices par exemple, ne s'incurvent pas généralement, mais, au contraire, bombent toujours. L'épure des forces de pressions est symétrique par rapport aux axes des x et des y. En choisissant des aires semblables, on s'assure facilement que les projections sur les axes des x et des y des composantes élémentaires des forces de pression hydrodynamiques s'équilibrent mutuellement. Par conséquent, la projection de la réaction hydrodynamique sur l'axe des x (sens du mouvement) R_x, appelée résistance, et la projection sur la direction perpendiculaire au mouvement, R_y, appelée portance, s'annulent identiquement

$$R_x=0; \quad R_y=0; \quad R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=0. \qquad (V.43)$$

Rappelons que l'écoulement autour d'un corps à la vitesse constante v_∞ suivant le principe de l'inversion du mouvement est équivalent à un mouvement de translation de ce corps dans un écoulement avec une vitesse v_∞. Ainsi, lors d'un mouvement de translation uniforme d'un cylindre de révolution dans un fluide parfait s'étendant à l'infini la résistance R_x est nulle. Ceci est valable aussi pour le mouvement d'un corps de forme quelconque ayant lieu dans les mêmes conditions.

Ce fait a été pour la première fois démontré par Euler et d'Alembert. Cette conclusion, par suite de sa contradiction avec les phénomènes réellement observés lors des mouvements des corps dans un fluide, phénomènes s'accompagnant toujours d'une résistance, a reçu le nom de paradoxe d'Euler-d'Alembert. Ce paradoxe est d'une très grande importance, puisqu'il permet de mettre en évidence les facteurs qui provoquent l'apparition d'une force de résistance

lors du mouvement des corps dans un fluide. Si l'on omet rien qu'une seule hypothèse mentionnée dans le paradoxe d'Euler-d'Alembert, une force de résistance apparaît sur le corps. Ainsi, l'origine de l'apparition des forces de résistance doit être recherchée dans la non-observation des hypothèses suivantes:

1) de la non-limitation du fluide (influence de la surface libre);
2) de la non-viscosité du fluide (influence de la viscosité);
3) de la constance de la vitesse du corps (mouvement accéléré du corps);

L'influence de tous ces facteurs sur l'apparition des forces de résistance sera examinée plus loin.

Un certain intérêt présente l'obtention de la fonction caractéristique d'un écoulement sans circulation autour d'un cylindre de révolution sous un angle par rapport à l'axe des x. Soit α l'angle entre le vecteur vitesse d'un écoulement de translation et l'axe des x. Additionnons l'écoulement de translation $w = v_\infty e^{-i\alpha} z$ et l'écoulement dû à un dipôle dont l'axe, dirigé à l'encontre de la vitesse v_∞, fait l'angle $\beta = \pi + \alpha$ avec l'axe des x.

La fonction caractéristique de l'écoulement du dipôle est

$$w = -\frac{M}{2\pi} e^{i\beta} \frac{1}{z} = -\frac{M}{2\pi} e^{i(\pi+\alpha)} \frac{1}{z} = \frac{M}{2\pi} e^{i\alpha} \frac{1}{z}.$$

En effectuant des calculs analogues à ceux exposés ci-dessus nous obtiendrons la fonction caractéristique d'un écoulement autour d'un cylindre sous l'angle α avec l'axe des x

$$w = v_\infty \left(z e^{-i\alpha} + \frac{r_0^2}{z} e^{i\alpha} \right). \tag{V.44}$$

La fonction caractéristique du mouvement absolu d'un cylindre de révolution w_a peut être obtenue de (V.37) par superposition de la fonction caractéristique d'un écoulement de translation s'écoulant dans le sens de l'axe négatif des x, de la forme $w = -v_\infty z$. Effectivement, en imprimant à tous les points de l'écoulement une vitesse de translation $-v_\infty$ nous forçons le cylindre, auparavant immobile, à se mouvoir à la même vitesse dans le sens de l'axe négatif. Ainsi,

$$w_a = w - v_\infty z = v_\infty \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) - v_\infty z = \frac{v_\infty r_0^2}{z}.$$

La comparaison de cette formule avec (V.33) montre que la fonction caractéristique du mouvement absolu d'un cylindre de rotation est la même que celle d'un dipôle avec un moment $M = 2\pi v_\infty r_0^2$. Remarquons qu'elle est écrite dans un système de coordonnées lié au cylindre. L'équation du potentiel d'un écoulement provoqué par le cylindre est de la forme

$$\varphi_a = v_\infty \frac{r_0^2}{r} \cos \theta. \tag{V.45}$$

§ 23. ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE DE RÉVOLUTION AVEC CIRCULATION

Dans le paragraphe précédent, il a été montré qu'en écoulement sans circulation autour d'un cylindre de révolution, la résistance R_x et la portance R_y sont nulles.

Examinons l'écoulement à circulation autour d'un cylindre de révolution. Superposons à l'écoulement autour d'un cylindre sans circulation un écoulement à circulation avec le point singulier (centre du tourbillon) au centre du cylindre (fig. V.7,*a*). La fonction caractéristique de cet écoulement complexe d'après les formules (V.27) et (V.37)

$$w = v_\infty \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \tag{V.46}$$

Remarquons que la superposition d'un écoulement à circulation dont les lignes de courant sont des cercles concentriques de centre le centre du cylindre n'affecte pas les conditions aux limites d'imperméabilité à la surface du cylindre. On s'en assure facilement en trouvant la fonction de courant de l'écoulement (V.46) et en examinant la ligne nulle de l'écoulement qui correspondra comme auparavant à un cercle.

Etudions la variation de l'image de l'écoulement près du cylindre par rapport à l'écoulement sans circulation. Trouvons la position des points critiques situés sur le cylindre. En utilisant les expressions (V.40) et (V.28), nous obtiendrons la vitesse sur la surface du cylindre

$$v_\theta = v_{\theta 1} + v_{\theta \Gamma} = -2v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}, \tag{V.47}$$

où $v_{\theta 1}$ est la vitesse sur le cylindre baigné par le fluide sans circulation;

$v_{\theta \Gamma}$ la vitesse de l'écoulement avec circulation.

Les points critiques K_1, K_2 sur le cylindre (fig. V.7) s'obtiennent d'après la condition $v_\theta = 0$, d'où

$$\sin\theta_K = \frac{\Gamma}{4\pi r_0 v_\infty}. \tag{V.48}$$

Suivant la valeur de la circulation Γ, les variantes suivantes de la disposition des points critiques sont possibles:

1) $\Gamma = 0$; $\sin\theta_K = 0$; $\theta_{K_2} = 0$; $\theta_{K_1} = \pi$. Dans un écoulement sans circulation les points critiques se disposent sur les extrémités du diamètre horizontal du cylindre, comme il est montré sur la fig. V.6.

2) $\frac{\Gamma}{4\pi r_0 v_\infty} < 1$; $\sin\theta_K < 1$. La solution de l'équation (V.48) pour cette variante donne deux points critiques situés sur le cylindre et

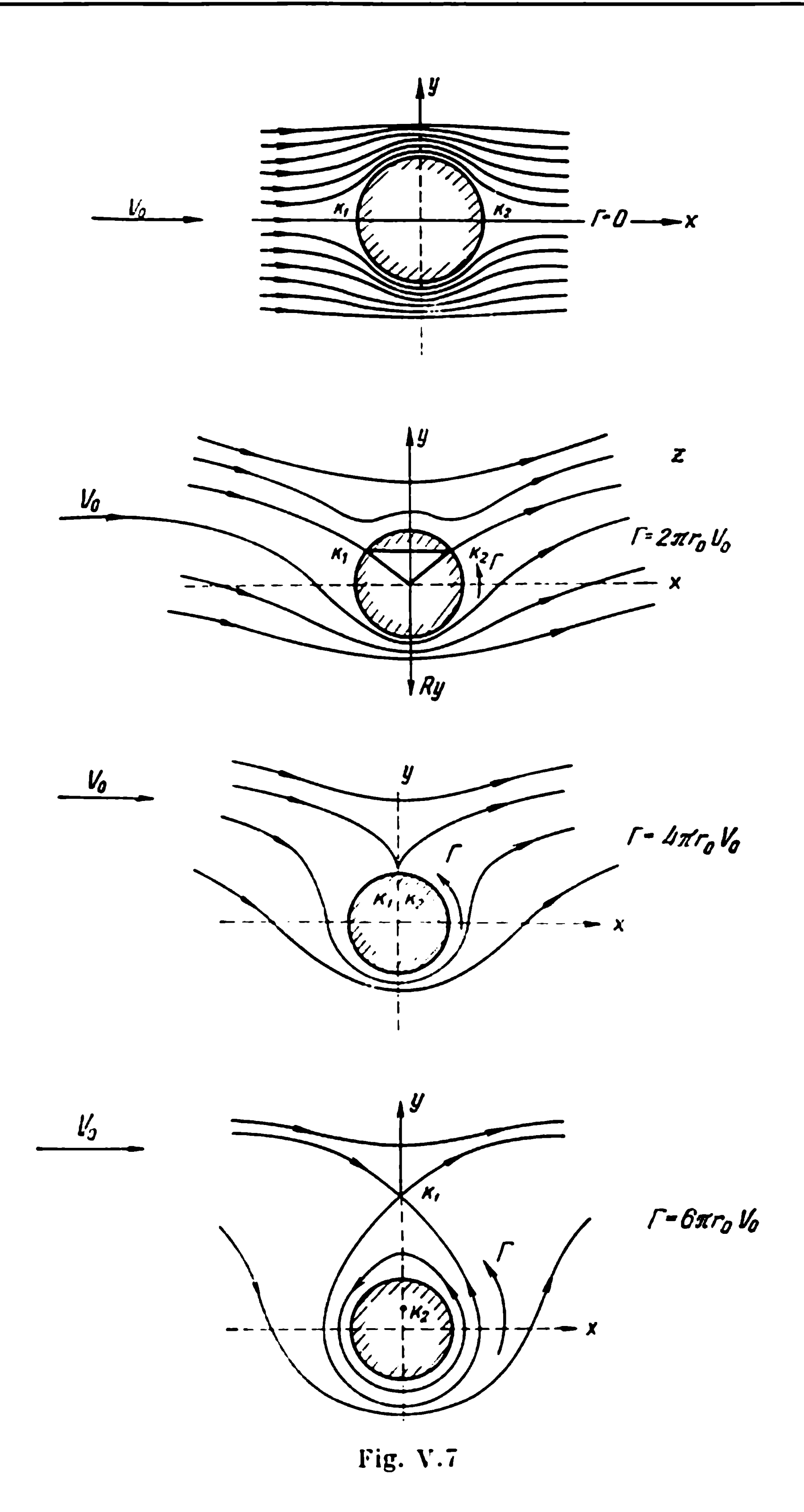

y
V_0
K_1
K_2
$\Gamma=0$
x
z
$\Gamma=2\pi r_0 V_0$
Γ
R_y
$\Gamma=4\pi r_0 V_0$
$\Gamma=6\pi r_0 V_0$

Fig. V.7

déterminés par les angles θ_{K_1} et θ_{K_2}. Ces points sont symétriques par rapport au diamètre vertical. Sur la fig. V.7,*b* est montrée l'image qui correspond à ce cas d'écoulement avec

$$\Gamma = 2\pi r_0 v_\infty ; \quad \theta_{K_1} = \frac{5}{6}\pi ; \quad \theta_{K_2} = \frac{\pi}{6} .$$

3) $\Gamma = 4\pi r_0 v_\infty$; $\sin\theta_K = 1$; $\theta_{K_1} = \theta_{K_2} = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas les points critiques se confondent en un seul point situé sur l'extrémité supérieure du diamètre vertical du cylindre. L'image de l'écoulement est montée sur la fig. V.7,*c*.

4) $\Gamma > 4\pi r_0 v_\infty$; $\sin\theta_K > 1$. L'équation trigonométrique (V.48) ne possède pas de résolution pour cette variante. Physiquement, ceci montre que les points critiques sur le cylindre sont absents; ils se sont déplacés dans les régions extérieure et intérieure à la surface, comme il est montré sur la fig. V.7,*d*. Dans la zone disposée près du cylindre (hachurée sur la fig. V.7,*c*) le fluide a un mouvement circulaire fermé.

On doit remarquer qu'à la superposition de la circulation, les points critiques se déplacent. Cette conclusion faite pour un cylindre de révolution est valable aussi pour l'écoulement autour d'un profil quelconque.

Dans l'écoulement autour d'un cylindre tournant d'un fluide visqueux, on peut observer, suivant la vitesse angulaire de rotation, les variantes 2, 3 et 4 des écoulements décrits ci-dessus.

Examinons d'une façon détaillée le cas intéressant où $\Gamma < 4\pi r_0 v_\infty$. De la formule (V.47) de la vitesse à la surface du cylindre, on voit que les vitesses aux points situés sur la partie supérieure du cylindre $0 < \theta \leqslant \pi$

$$v_s = -|2v_\infty \sin\theta| + \frac{\Gamma}{2\pi r_0},$$

et aux points situés sur la partie inférieure du cylindre $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

$$v_i = |2v_\infty \sin\theta| + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$

Il en résulte qu'en des points symétriques par rapport à l'axe horizontal les vitesses sur la partie inférieure du cylindre sont plus grandes que celles sur la partie supérieure (fig. V.7,*b*): $v_i > v_s$.

En vertu de l'intégrale d'Euler

$$p_i + \frac{\rho v_i^2}{2} = p_s + \frac{\rho v_s^2}{2}$$

nous trouvons que $p_i < p_s$, c'est-à-dire que la pression sur la partie inférieure du cylindre est inférieure à celle sur la partie supérieure. En s'additionnant sur la surface du corps, ces pressions amènent

à l'apparition d'une force verticale R_y (dans le cas donné dirigée vers le bas). La force de résistance R_x est toujours nulle car l'image de l'écoulement est symétrique par rapport à l'axe des y. Calculons la force verticale R_y. A un élément de surface $dS = r_0 d\theta 1$, où 1 est une génératrice du cylindre d'une hauteur unité, est appliquée une surpression hydrodynamique $(p - p_0)$ dirigée en sens inverse de la normale extérieure, confondue avec la direction r. La force élémentaire de pression

$$d\bar{R} = -(p - p_0)\,\bar{n}\,dS.$$

Sa projection sur l'axe des y

$$dR_y = -(p - p_0)\cos(r, y)\,dS = -(p - p_0)\,r_0 \sin\theta\,d\theta.$$

D'où, en utilisant l'expression du coefficient de pression, on obtient

$$R_y = -r_0 \frac{\rho v_\infty^2}{2} \int_0^{2\pi} \bar{p} \sin\theta\,d\theta.$$

Déterminons le coefficient de pression en substituant à v son expression suivant (V.47)

$$\bar{p} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2 = (1 - 4\sin^2\theta) - 4\left(\frac{\Gamma}{4\pi r_0 v_\infty}\right)^2 + 2\frac{\Gamma}{\pi r_0 v_\infty}\sin\theta.$$

En portant l'expression de $\bar{p}$ dans la formule de R_y, nous trouvons

$$R_y = -r_0 \frac{\rho v_\infty^2}{2}\left\{\left[1 - 4\left(\frac{\Gamma}{4\pi r_0 v_\infty}\right)^2\right]\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta - 4\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,d\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{2\Gamma}{\pi r_0 v_\infty}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\right\},$$

mais comme

$$\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta = 0; \quad \int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,d\theta = 0; \quad \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \pi,$$

on a

$$R_y = -\rho\Gamma v_\infty 1. \qquad \text{(V.49)}$$

Ainsi, la force verticale est proportionnelle à la masse volumique du fluide, à la vitesse v_∞ et à la circulation. Sa direction est perpendiculaire à la vitesse v_∞. Pour déterminer cette direction, il faut d'après la fig. V.7,*b* faire tourner le vecteur vitesse v_∞ de $\frac{\pi}{2}$ en sens inverse de la circulation.

Le résultat exprimé par la formule (V.49) constitue le contenu du théorème de Joukovski relatif à la portance de l'aile, qui est donné ici comme le cas particulier. Dans le chapitre VI nous donnerons sa démonstration pour le cas général.

De ce qui précède il suit que chaque corps tournant se déplaçant dans un fluide engendre une portance. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Magnus. Cet effet se manifeste lors du vol d'un projectile en rotation; il explique les trajectoires inattendues des balles coupées.

En combinant (V.27) et (V.44) nous obtenons la fonction caractéristique d'un écoulement à circulation autour d'un cylindre de révolution sous un angle d'attaque quelconque α

$$w = v_\infty \left(z e^{-i\alpha} + \frac{r_0^2}{z} e^{i\alpha} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \qquad \text{(V.50)}$$

§ 24. UTILISATION DES REPRÉSENTATIONS CONFORMES POUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES PLANS EN MÉCANIQUE DES FLUIDES DANS UN ÉCOULEMENT IRROTATIONNEL DU FLUIDE

En développant la méthode de superposition des écoulements examinée précédemment et en additionnant les singularités hydrodynamiques sélectionnées de façon appropriée avec un écoulement de translation, on peut obtenir les écoulements autour des contours dont la forme se distingue de celle d'un cercle. Cependant l'utilisation de cette méthode qui nécessite des calculs volumineux est limitée.

Il existe une autre méthode qui permet d'étendre considérablement la résolution des problèmes plans en mécanique des fluides et d'obtenir en principe l'écoulement autour de n'importe quel contour, c'est la méthode de représentation conforme.

Rappelons certaines particularités de la représentation conforme, dont on aura besoin par la suite. Soient z et ζ (fig. V.8) deux variables complexes liées entre elles par une relation $z = f(\zeta)$, appelée fonction de représentation. A chaque point du plan complexe z correspond un point déterminé du plan ζ et inversement. Dans ce cas on dit que la fonction $z = f(\zeta)$ effectue une représentation conforme mutuellement univoque [1] de la région du plan z sur la région du plan ζ et inversement. La représentation est dite conforme parce qu'elle conserve les angles entre les directions tracées dans les plans des z et des ζ.

Considérons dans le plan des z un contour quelconque L_z; soit la fonction $z = f(\zeta)$ réalisant la représentation de l'extérieur du contour L_z sur l'extérieur du cercle L_ζ dans le plan de la variable complexe auxiliaire ζ. Dans ce cas, les points qui se trouvent en

[1] La représentation reste univoque en tous les points où $dz/d\zeta$ n'est pas nul.

dehors du contour L_z se transforment en des points situés en dehors du contour L_ζ et le contour L_ζ lui-même se transforme en un cercle. A la lumière de ce qui a été dit on peut considérer la représentation conforme comme une sorte de transformation des variables (changement des coordonnées).

Suivant la théorie des fonctions de la variable complexe, la forme générale de la fonction réalisant la représentation conforme d'un

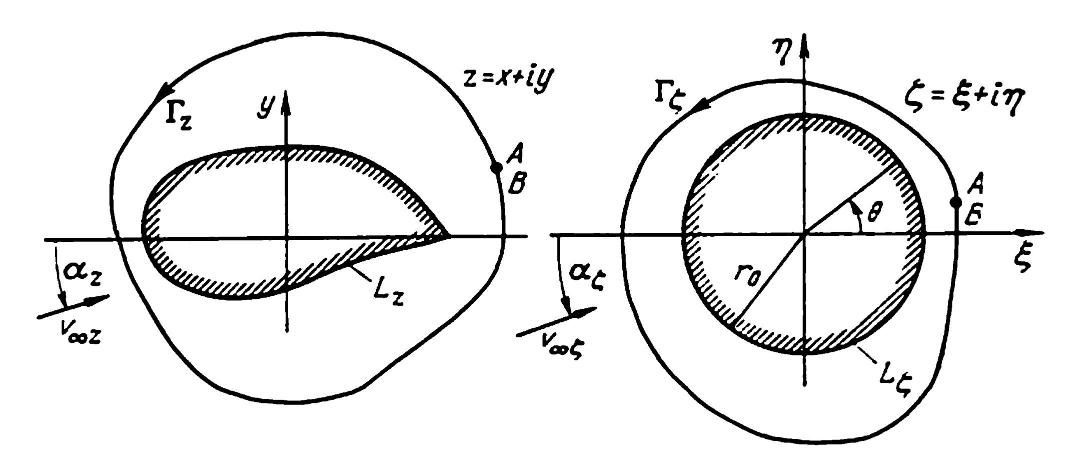


Fig. V.8

contour sur l'extérieur du cercle est donnée sous la forme d'une série de Laurent avec des coefficients complexes

$$z = m_{-1}\zeta + m_0 + \frac{m_1}{\zeta} + \frac{m_2}{\zeta^2} + \dots \qquad (V.51)$$

Le calcul des coefficients m_s ($s = -1, 0, 1 \dots$) d'une fonction de représentation est un problème mathématique très compliqué. Pour qu'une représentation soit bien déterminée, il faut qu'il y ait une correspondance de trois points des plans des z et des ζ, ou d'un point des plans des z et des ζ et d'une direction arbitraire.

Passons maintenant à l'interprétation hydrodynamique de l'idée de la représentation conforme. Soit un contour L_z (fig. V.8) dans le plan d'une variable physique $z = x + iy$ contourné par un courant à la vitesse à l'infini $v_{\infty z}$. Désignons par α_z l'angle entre l'axe des x et $v_{\infty z}$.

La fonction $z = f(\zeta)$ réalise la représentation de l'extérieur du contour L_z sur l'extérieur du cercle de rayon r_0 dans le plan des ζ. Dans la suite, pour simplifier, au lieu de dire « écoulement autour d'un cylindre de révolution » nous dirons « écoulement autour d'un cercle ». Le cercle dans le plan des ζ est contourné par un courant ayant une vitesse $v_{\infty\zeta}$ à l'infini sous un angle α_ζ. Pour l'uniformité de la représentation, exigeons que le point éloigné à l'infini du plan des z se transforme en un point éloigné à l'infini du plan des ζ et que la direction de la vitesse $v_{\infty z}$ coïncide avec la direction de la vites-

se $v_{\infty\zeta}$. Dans ce cas les angles formés par les vecteurs vitesse avec des axes réels seront identiques $\alpha_z = \alpha_\zeta = \alpha$.

Désignons les circulations dans l'écoulement en dehors du contour et du cercle par Γ_z et Γ_ζ. Soit la fonction caractéristique cherchée de l'écoulement autour du contour L_z

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \qquad \text{(V.52)}$$

Sur le contour L_z la valeur $\psi(z)$ est constante. En substituant dans (V.52) la fonction de représentation $z = f(\zeta)$, c'est-à-dire en effectuant le changement de la variable, nous obtenons l'expression suivante :

$$w(z) = w[f(\zeta)] = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta), \qquad \text{(V.53)}$$

suivant laquelle aux points correspondants des plans des z et des ζ les valeurs de $w(z)$ et de $w(\zeta)$ sont identiques. Le contour L_z, qui est une ligne de courant de l'écoulement, se transforme après la représentation conforme en un contour du cercle, la fonction de courant ψ sur le cercle conservant sa valeur constante ; autrement dit, le contour du cercle est également une ligne de courant.

De cette façon, l'écoulement en dehors du contour L_z se transforme en écoulement en dehors du cercle. La fonction caractéristique d'un écoulement à circulation autour d'un cercle est connue (V.50). En des points semblables

$$w(\zeta) = v_{\infty\zeta}\left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{r_0^2}{\zeta} e^{i\alpha}\right) + \frac{\Gamma_\zeta}{2\pi i} \ln \zeta. \qquad \text{(V.54)}$$

L'égalité (V.54) définit la fonction caractéristique de l'écoulement autour d'un contour L_z en fonction de la variable ζ ($z = f(\zeta)$). Une telle méthode de définition d'une fonction est dite, comme on le sait, paramétrique. Ainsi, la résolution du problème d'écoulement autour d'un contour L_z est donnée par des relations paramétriques

$$\left.\begin{aligned} w(\zeta) &= v_{\infty\zeta}\left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{r_0^2}{\zeta} e^{i\alpha}\right) + \frac{\Gamma_\zeta}{2\pi i} \ln \zeta ; \\ z &= f(\zeta). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.55)}$$

Dans certains cas simples, l'équation de la fonction de représentation peut être résolue par rapport à la variable ζ en obtenant la relation

$$\zeta = \Phi(z). \qquad \text{(V.56)}$$

Alors en substituant (V.56) dans l'expression de $w(\zeta)$, on peut exprimer la fonction caractéristique de l'écoulement autour du contour L_z en fonction de z

$$w(z) = w[\Phi(z)] = v_{\infty\zeta}\left[\Phi(z) e^{-i\alpha} + \frac{r_0^2}{\Phi(z)} e^{i\alpha}\right] + \frac{\Gamma_\zeta}{2\pi i} \ln \Phi(z). \quad \text{(V.57)}$$

Pour pouvoir utiliser les relations obtenues, il faut trouver les inconnues suivantes qui font partie de l'expression $w(\zeta)$: $v_{\infty\zeta}$, Γ_ζ et r_0. Pour déterminer r_0 on part des propriétés géométriques de la représentation conforme. Remarquons que dans certains cas, il est avantageux d'effectuer la représentation sur un cercle de rayon unité.

Déterminons la liaison entre les vitesses complexes des écoulements dans les plans des z et des ζ. En utilisant la règle de différentiation d'une fonction compliquée, nous obtenons

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}=\frac{\frac{dw}{d\zeta}}{\frac{dz}{d\zeta}}, \tag{V.58}$$

où $\frac{dw}{dz}$ est la vitesse complexe dans le plan du contour ; le numérateur $\frac{dw}{d\zeta}$ représente évidemment la vitesse complexe dans le plan du cylindre et le dénominateur $\frac{dz}{d\zeta}$ la dérivée de la fonction représentative.

La formule (V.58) est utilisée pour des calculs pratiques, étant donné qu'ordinairement ce n'est pas la fonction caractéristique $w(z)$ qui est importante, mais les vitesses et les pressions déterminées au moyen de l'intégrale d'Euler. Utilisons la formule (V.58) pour un point à l'infini $z=\infty$; $\zeta=\infty$. En tenant compte de ce que la vitesse complexe à l'infini est

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\infty}=v_{\infty z}e^{-i\alpha}; \quad \left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty}=v_{\infty\zeta}e^{-i\alpha},$$

et la dérivée de la fonction $f(\zeta)$, qui d'après (V.51) est $\frac{dz}{d\zeta}=m_{-1}-\frac{m_1}{\zeta^2}-\frac{2m_2}{\zeta^3}-\ldots$, se représentera à l'infini comme $\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty}=m_{-1}$, nous obtenons

$$v_{\infty z}e^{-i\alpha}=\frac{v_{\infty\zeta}e^{-i\alpha}}{m_{-1}} \text{ ou } v_{\infty z}=\frac{v_{\infty\zeta}}{m_{-1}}. \tag{V.59}$$

Etant donné que $v_{\infty z}$ et $v_{\infty\zeta}$ sont des quantités réelles, le coefficient m_{-1}, comme il s'ensuit de l'égalité (V.59), doit également être une grandeur réelle. Les autres coefficients m_0, m_1, m_2 de la fonction de représentation sont dans le cas général des grandeurs complexes.

La formule (V.59) détermine la liaison entre la vitesse donnée $v_{\infty z}$ et la vitesse d'écoulement autour du cercle $v_{\infty\zeta}$ dans le plan des ζ.

Déterminons la liaison entre les circulations Γ_z et Γ_ζ dans les deux plans. Suivant l'expression (V.6) la circulation le long d'un contour quelconque (fig. V.8) est

$$\Gamma_z=[\varphi(z_B)-\varphi(z_A)]_{z_B=z_A}; \quad \Gamma_\zeta=[\varphi(\zeta_B)-\varphi(\zeta_A)]_{\zeta_B=\zeta_A}.$$

En des points semblables, les valeurs des potentiels $\varphi(z)$ et $\varphi(\zeta)$ sont identiques, pour cette raison

$$\Gamma_z = \Gamma_\zeta = \Gamma, \tag{V.60}$$

c'est-à-dire que la représentation conforme ne change pas la circulation.

De façon analogue, on peut montrer que le débit d'une source lors d'une représentation conforme ne varie pas.

Cherchons à obtenir la formule de la détermination de la vitesse en des points du contour, en faisant appel à la méthode des représentations conformes sous la forme paramétrique. Pour faciliter les calculs. admettons que la représentation s'effectue sur un cercle de rayon égal à l'unité. Alors, en des points du cercle $\zeta = e^{i\theta}$, où θ est l'angle polaire dans le plan du cercle jouant le rôle de paramètre.

Envisageons l'écoulement sans circulation autour d'un contour. La fonction caractéristique de l'écoulement autour du cercle est

$$w(\zeta) = v_{\infty\zeta}\left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right).$$

La vitesse complexe dans le plan des z pour les points du contour suivant la formule (V.58) est

$$\frac{dw}{dz} = \frac{v_{\infty\zeta}\left(e^{-i\alpha} - \frac{e^{i\alpha}}{\zeta^2}\right)}{\frac{dz}{d\zeta}} = \frac{v_{\infty\zeta}\left(\zeta e^{-i\alpha} - \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta}}{\frac{dz}{d\zeta}}.$$

Il est facile de voir que

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{d\zeta} \quad \text{et} \quad \frac{d\zeta}{d\theta} = ie^{i\theta} = i\zeta.$$

En tenant compte de ce fait

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{d(x+iy)}{d\theta}\frac{d\theta}{d\zeta} = \left(\frac{dx}{d\theta} + i\frac{dy}{d\theta}\right)\frac{1}{i\zeta}.$$

Suivant la formule (V.59) $v_{\infty\zeta} = v_{\infty z} m_{-1}$. Après la substitution dans l'expression de $\frac{dw}{dz}$ des résultats obtenus et après le remplacement de ζ par $e^{i\theta}$ nous avons

$$\frac{dw}{dz} = i\frac{v_{\infty z} m_{-1}\left[e^{i(\theta-\alpha)} - e^{-i(\theta-\alpha)}\right]}{\frac{dx}{d\theta} + i\frac{dy}{d\theta}}.$$

En utilisant la formule d'Euler

$$e^{i(\theta-\alpha)} - e^{-i(\theta-\alpha)} = 2i\sin(\theta-\alpha),$$

nous obtenons l'expression de la vitesse complexe

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{2v_{\infty z}m_{-1}\sin(\theta-\alpha)}{\frac{dx}{d\theta}+i\frac{dy}{d\theta}}. \qquad (V.61)$$

La valeur conjuguée de la vitesse complexe s'obtient par remplacement dans (V.61) de i par $-i$; alors en tenant compte de la formule (V.17)

$$v^2 = \frac{dw}{dz}\frac{d\bar{w}}{dz} = v_{\infty z}^2 \frac{4m_{-1}^2\sin^2(\theta-\alpha)}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}. \qquad (V.62)$$

La formule (V.62) est commode pour l'emploi de l'intégrale d'Euler lors des calculs de l'écoulement sans circulation autour des contours.

La méthode des représentations conformes est largement employée en mécanique des fluides, en particulier dans l'étude de l'écoulement autour des profils d'ailes.

§ 25. ÉCOULEMENTS IRROTATIONNELS À TROIS DIMENSIONS SIMPLES

Le cas général d'un mouvement irrotationnel, où le potentiel φ dépend de trois coordonnées x, y, z, est très compliqué à étudier. Il est sensiblement plus simple d'étudier les écoulements tridimensionnels à symétrie axiale pour lesquels il existe une fonction de courant ψ.

Pour les problèmes à symétrie axiale, il est rationnel d'utiliser au lieu des coordonnées cartésiennes les coordonnées cylindriques et parfois les coordonnées sphériques (fig. V.9). Suivant la définition du mouvement à symétrie axiale, l'image de l'écoulement de fluide dans le plan xr^* est identique. Le plan xr^* s'appelle plan méridien. La section par celui-ci d'un corps de révolution se nomme section méridienne. De la fig. V.9 il suit que les coordonnées sphériques r, α jouent le rôle de coordonnées polaires dans le plan de la section méridienne. Entre les coordonnées cartésiennes, polaires et sphériques existent des relations suivantes

$$x = r\cos\alpha;\; y = r^*\cos\theta = r\sin\alpha\cos\theta;$$
$$z = r^*\sin\theta = r\sin\alpha\sin\theta. \qquad (V.63)$$

Ainsi qu'il est connu de ce qui précède, dans un écoulement à symétrie axiale il y a deux projections de la vitesse v_x et v_{r^*}, liées à la fonction de courant par des relations

$$v_x = \frac{1}{r^*}\frac{\partial\psi}{\partial r^*};\quad v_{r^*} = -\frac{1}{r^*}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

En écoulement irrotationnel d'un fluide, les projections des vitesses sont exprimées en fonction du potentiel de la vitesse

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_{r*} = \frac{\partial \varphi}{\partial r^*}.$$

La fonction de courant ψ et le potentiel φ dépendent des coordonnées x et r^*. En comparant cette dernière expression avec la for-

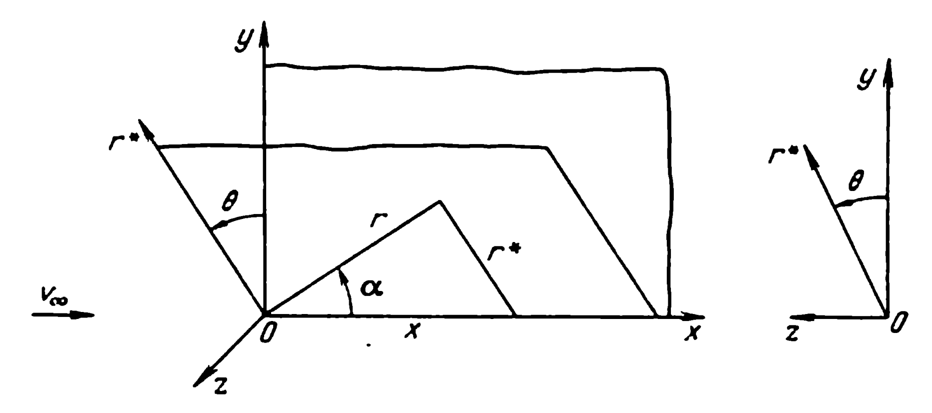


Fig. V.9

mule (III.66), on établit une liaison suivante entre le potentiel et la fonction de courant d'un écoulement à symétrie axiale:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{r^*}\frac{\partial \psi}{\partial r^*}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r^*} = -\frac{1}{r^*}\frac{\partial \psi}{\partial x}. \qquad \text{(V.64)}$$

Les équations qui lient φ et ψ en écoulement à symétrie axiale diffèrent sensiblement des conditions de Cauchy-Riemann (V.13). Physiquement cette différence s'explique par les dimensions différentes des fonctions φ et ψ et mathématiquement, par la présence dans le système (V.64) du facteur $1/r^*$, ce qui dans un écoulement à symétrie axiale du fluide exclut la possibilité d'introduire la fonction caractéristique de courant, dépendante de la coordonnée complexe. Ceci, à son tour, rend impossible l'emploi de la méthode des représentations conformes.

Trouvons les expressions des potentiels et des fonctions de courant pour des écoulements simples à symétrie axiale, largement utilisés dans l'étude des écoulements autour des corps solides par la méthode de superposition des écoulements.

1. *Ecoulement de translation dans un espace*

Déterminons le potentiel et la fonction de courant d'un écoulement de translation se déplaçant à une vitesse constante en tous les points de l'espace $v_x = v_\infty$ dans la direction de l'axe des x positifs. Dans ce cas on a deux équations

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_\infty; \quad v_{r*} = \frac{\partial \varphi}{\partial r^*} = 0.$$

Suivant la seconde de ces équations, le potentiel φ est fonction seulement de la coordonnée x. En tenant compte de ce fait, on peut remplacer la dérivée partielle dans l'expression de $\partial\varphi/\partial x$ par la dérivée totale $d\varphi/dx = v_\infty$ et après intégration on obtient

$$\varphi = v_\infty x. \tag{V.65}$$

La constante arbitraire d'intégration peut être prise égale à zéro, car ce n'est pas le potentiel qui présente ici de l'intérêt, mais seulement les dérivées de celui-ci par rapport aux coordonnées.

Des équations (III.66) nous trouvons l'expression de la fonction de courant

$$v_x = \frac{1}{r^*}\frac{\partial\psi}{\partial r^*} = v_\infty = \frac{1}{r^*}\frac{d\psi}{dr^*}; \quad v_{r*} = -\frac{1}{r^*}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$

d'après laquelle nous obtenons

$$\psi = v_\infty \frac{r^{*2}}{2} + C. \tag{V.66}$$

Comme le débit à travers l'axe x est égal à zéro, alors, en posant $r^* = 0$, nous obtenons $C = 0$ et

$$\psi = v_\infty \frac{r^{*2}}{2}. \tag{V.67}$$

2. *Source à trois dimensions*

Etudions un écoulement dont le potentiel est donné par l'expression

$$\varphi = -\frac{A}{r} = -\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

où $A > 0$ est une constante.

Déterminons les projections de la vitesse sur les axes d'un système de coordonnées sphériques. Etant donné que φ dépend seulement du rayon r, alors $v_\theta = 0$; $v_\alpha = 0$ et $v_r = v = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{A}{r^2}$.

Déterminons le sens physique de la constante A. A cet effet calculons le débit de fluide Q par la surface sphérique S de rayon r (fig. V.10,*a*). Remarquons que la normale à la surface de la sphère coïncide avec la direction du rayon r. Par suite $v_n = v_r$, c'est-à-dire

$$Q = \oint_S v_n\, dS = \oint_S \frac{A}{r^2} r^2\, d\Omega = 4\pi A,$$

où $dS = r^2 d\Omega$ est l'élément de la surface; Ω, l'angle solide.

Suivant la dernière équation

$$A = \frac{Q}{4\pi},$$

par conséquent l'expression du potentiel de la vitesse peut être écrite sous la forme

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{r}. \qquad \text{(V.68)}$$

L'écoulement dans lequel le fluide s'écoule à partir d'un point radialement de tous les côtés s'appelle source tridimensionnelle. La vitesse d'une source tridimensionnelle est

$$v = v_r = \frac{Q}{4\pi}\frac{1}{r^2}. \qquad \text{(V.69)}$$

Il est facile de s'assurer que la fonction φ satisfait à l'équation de Laplace. De ces dernières formules il suit que lorsque $r \to 0$, $v \to \infty$,

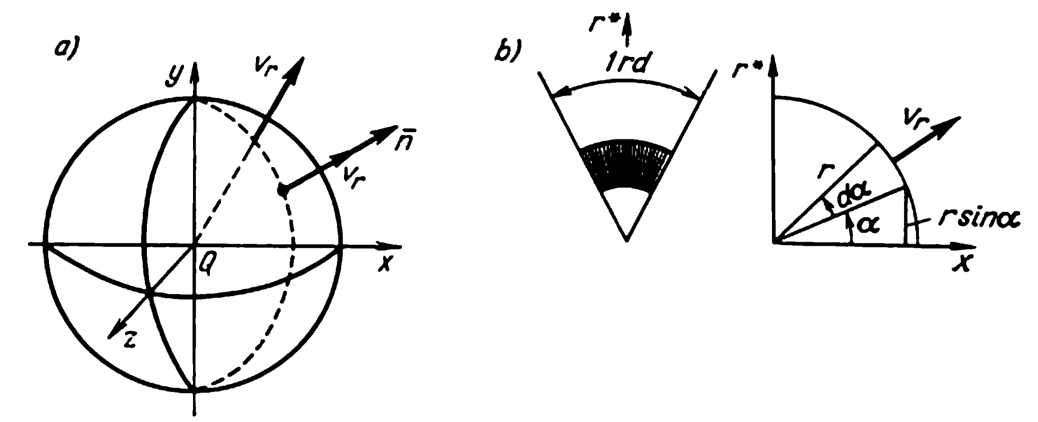


Fig. V.10

c'est-à-dire que le centre de la source est un point singulier de l'écoulement. Avec $r \to \infty$, les vitesses provoquées par l'écoulement tendent vers zéro de façon inversement proportionnelle au carré du rayon. La comparaison de (V.69) avec (V.24) montre que les vitesses d'une source tridimensionnelle diminuent beaucoup plus vite devant les vitesses d'une source plane.

Déterminons la fonction de courant d'un écoulement provoqué par une source en utilisant pour cela la liaison existant entre cette fonction et le débit: le débit élémentaire de fluide $dQ_{1\text{rd}}$ dans un angle de 1 rd est numériquement égal à la différentielle de la fonction de courant $d\psi = dQ_{1\text{rd}}$.

Calculons le débit élémentaire de fluide dans l'angle d'ouverture de 1 rd. Suivant les notations de la fig. V.10,*b*

$$d\psi = v_r\,(r\,d\alpha)\,(r^*1) = \frac{Q}{4\pi r^2}\,r\,d\alpha\,r\sin\alpha = \frac{Q}{4\pi}\sin\alpha\,d\alpha,$$

où $r\,d\alpha$ est la largeur de l'aire élémentaire, r^*1 sa longueur dans l'angle de 1rd.

En intégrant cette dernière expression par rapport à l'angle α dans les limites de 0 à α nous obtenons

$$\psi = \int_0^\alpha \frac{Q}{4\pi} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{Q}{4\pi}(1 - \cos \alpha).$$

Parfois on utilise les expressions de φ et ψ dans le système de coordonnées cylindriques. Suivant (V.63)

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{r} = -\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+r^{*2}}}; \\ \psi &= \frac{Q}{4\pi}(1-\cos\alpha) = \frac{Q}{4\pi}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+r^{*2}}}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (V.70)$$

Si la source est disposée en un point de coordonnées x_1, y_1, z_1, dans les formules précédentes on doit prendre

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}.$$

Le cas d'un écoulement radial convergent est obtenu par changement du signe devant Q dans les formules (V.70).

3. *Dipôle à trois dimensions*

On appelle dipôle à trois dimensions le courant formé par une source et un puits de même débit Q quand la distance entre eux Δx tend vers zéro.

Disposons sur l'axe des x à une distance $\frac{\Delta x}{2}$ à gauche de l'axe des r^* une source et symétriquement par rapport à celle-ci à la même distance un puits. Le potentiel de l'écoulement total

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + r^{*2}}} + \frac{Q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + r^{*2}}}.$$

Transformons cette expression en multipliant et divisant le deuxième membre par la distance entre la source et le puits Δx

$$\varphi = -\frac{Q\Delta x}{4\pi}\left\{\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + r^{*2}}} - \frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + r^{*2}}}\right]\right\}.$$

Faisons tendre dans le deuxième membre de cette égalité la distance Δx vers zéro en admettant la condition

$$\lim_{\Delta x \to 0} (Q\Delta x) = \text{const} = M,$$

où M est le moment du dipôle: la direction du puits vers la source s'appelle axe du dipôle.

Le second facteur de l'expression de φ représente une dérivée par rapport à x de la fonction $\frac{1}{(x^2+r^{*2})^{1/2}}$; en tenant compte de ce fait, le potentiel du dipôle est

$$\varphi = -\frac{M}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(x^2+r^{*2})^{1/2}} = \frac{M}{4\pi}\frac{x}{(x^2+r^{*2})^{3/2}}. \qquad (V.71)$$

Dans le cas donné, l'axe du dipôle est orienté dans la direction de l'axe négatif des x. Pour une direction arbitraire de l'axe du dipôle l sous un angle (l, x) par rapport à l'axe des x

$$\varphi = -\frac{M}{4\pi}\cos(l, x)\frac{x}{(x^2+r^{*2})^{3/2}} =$$

$$= -\frac{M}{4\pi}\frac{\cos(l, x)}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{M}{4\pi r^2}\cos(l, x)\cos(x, r).$$

En tenant compte de la formule de l'angle entre les deux directions l et r, nous obtenons finalement

$$\varphi = -\frac{M}{4\pi r^2}\cos(l, r). \qquad (V.72)$$

La fonction de courant d'un écoulement compliqué dû à une source et à un puits suivant la formule (V.70) est

$$\psi = \frac{Q}{4\pi}\left\{1 - \frac{x+\frac{\Delta x}{2}}{\left[\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + r^{*2}\right]^{1/2}}\right\} -$$

$$-\frac{Q}{4\pi}\left\{1 - \frac{x-\frac{\Delta x}{2}}{\left[\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + r^{*2}\right]^{1/2}}\right\}.$$

En effectuant dans cette expression le passage aux limites de façon analogue à celle réalisée ci-dessus, nous obtenons la fonction de courant du dipôle

$$\psi = -\frac{M}{4\pi}\frac{r^{*2}}{(x^2+r^{*2})^{3/2}} = -\frac{M}{4\pi}\frac{r^{*2}}{r^3}. \qquad (V.73)$$

Remarquons que l'image des lignes de courant dû à un dipôle dans le plan de la section méridienne est analogue à l'image des lignes de courant d'un dipôle plan.

§ 26. ÉCOULEMENT AUTOUR DES CORPS DE RÉVOLUTION SIMPLES

Utilisons les écoulements simples considérés ci-dessus pour l'étude de l'écoulement autour des corps de révolution. Rappelons que les sources et les dipôles s'appellent singularités hydrodynamiques ;

par conséquent, une telle méthode de construction de l'écoulement autour des corps se nomme méthode des singularités hydrodynamiques.

Plus loin nous désignerons par Φ le potentiel de l'écoulement autour des corps et par φ le potentiel des vitesses provoquées. Entre Φ et φ il existe une relation évidente

$$\Phi = \varphi + v_\infty x. \tag{V.74}$$

Des relations obtenues au § 25 il suit qu'à l'infini $(r \to \infty)$ le potentiel φ tend vers zéro.

De façon analogue, désignons par Ψ la fonction de courant d'un écoulement autour d'un corps et par ψ la fonction de courant de l'écoulement provoqué. La liaison entre ces grandeurs s'exprime par une relation

$$\Psi = \psi + v_\infty \frac{r^{*2}}{2}. \tag{V.75}$$

1. *Ecoulement autour d'une sphère*

L'écoulement autour d'une sphère avec une vitesse à l'infini v_∞ peut être obtenu par superposition d'un écoulement de translation sur un écoulement du dipôle. Additionnons les potentiels et les fonctions de courant de l'écoulement de translation, s'écoulant dans le sens de l'axe positif des x, et de l'écoulement allant du dipôle avec l'axe dirigé dans le sens de l'axe négatif des x. En utilisant les formules (V.71) et (V.73) nous obtenons

$$\Phi = v_\infty x + \frac{M}{4\pi} \frac{x}{(x^2 + r^{*2})^{3/2}};$$

$$\Psi = v_\infty \frac{r^{*2}}{2} - \frac{M}{4\pi} \frac{r^{*2}}{(x^2 + r^{*2})^{3/2}}.$$

La valeur constante M dans ces formules reste indéterminée. Trouvons l'expression des lignes de courant (plus exactement des surfaces de courant) ; pour ce faire, égalons l'expression de Ψ à une grandeur constante. Examinons l'équation de la ligne de courant nulle

$$\Psi = v_\infty \frac{r^{*2}}{2} - \frac{M}{4\pi} \frac{r^{*2}}{(x^2 + r^{*2})^{3/2}} = v_\infty \frac{r^{*2}}{2} \left(1 - \frac{M}{2\pi v_\infty} \frac{1}{r^3}\right) = 0.$$

Elle possède deux solutions : la première solution $r^* = 0$ correspond à une équation de l'axe des x ; la seconde solution $\left(1 - \frac{M}{2\pi v_\infty} \frac{1}{r^3} = 0\right)$ ou $r = \sqrt[3]{\frac{M}{2\pi v_\infty}} = r_0$ caractérise une sphère de rayon r_0. Ainsi, la surface nulle d'un écoulement, due à la rotation de la ligne de courant autour de l'axe de symétrie, se compose de l'axe des x et de la surface de la sphère de rayon r_0.

Considérons la partie de la surface de courant nulle qui correspond à la sphère comme une paroi solide. Dans ce cas on aura un écoulement autour d'une sphère de rayon r_0 par un courant à la vitesse à l'infini v_∞.

De ce qui précède il suit que la relation entre le rayon donné de la sphère r_0 et le moment du dipôle M est

$$M = 2\pi v_\infty r_0^3. \qquad \text{(V.76)}$$

En portant cette relation dans l'expression de Φ et en passant

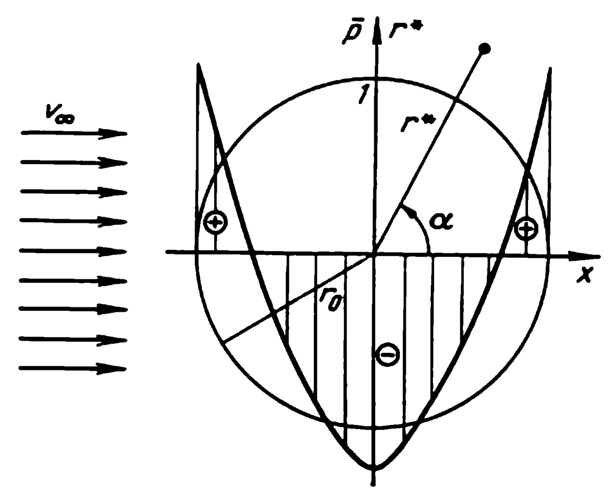


Fig. V.11

aux coordonnées sphériques, nous obtenons le potentiel de l'écoulement autour d'une sphère

$$\Phi = v_\infty \left(r + \frac{r_0^3}{2r^2} \right) \cos\alpha. \qquad \text{(V.77)}$$

Déterminons les projections des vitesses dans le cas de l'écoulement autour d'une sphère

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\Phi}{\partial r} = v_\infty \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right) \cos\alpha\,; \\ v_\alpha &= \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = -v_\infty \left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_0^3}{r^3}\right) \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.78)}$$

En portant dans (V.78) $r = r_0$, nous obtenons les projections des vitesses sur la surface de la sphère

$$v_r = 0\,; \quad v_\alpha = -\frac{3}{2} v_\infty \sin\alpha.$$

La vitesse v sur la surface de la sphère

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\alpha^2} = \frac{3}{2} v_\infty \sin\alpha. \qquad \text{(V.79)}$$

D'après cette formule on voit que la vitesse maximale, égale à 1,5 v_∞, s'obtient dans le maître couple de la sphère. Le coefficient de pression $\bar{p}$ sur la sphère est

$$\bar{p}=1-\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2=1-\frac{9}{4}\sin^2\alpha. \qquad \text{(V.80)}$$

L'épure de ce coefficient est montrée sur la fig. V.11. La comparaison des formules caractérisant les écoulements autour d'une sphère et autour d'un cylindre montre que les vitesses maximales sur la sphère sont inférieures aux vitesses sur le cylindre ; par conséquent, les coefficients de pression sont également inférieurs sur la sphère.

2. *Ecoulement autour d'un ovoïde de révolution*

Disposons sur l'axe des x à gauche de l'origine des coordonnées, à la distance a_s une source d'intensité Q, et à droite à la même distance a_p un puits de même intensité. Superposons sur le système source-puits un écoulement de translation s'écoulant à la vitesse à l'infi-

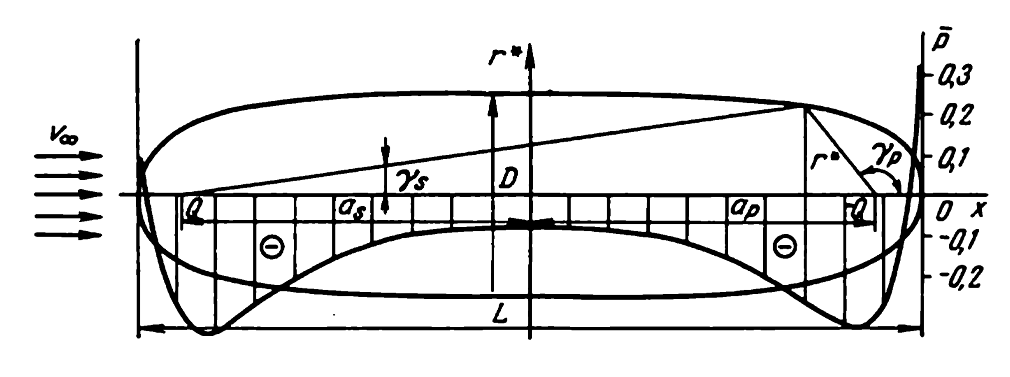


Fig. V.12

ni v_∞ dans le sens de l'axe positif des x (fig. V.12). Le potentiel et la fonction de courant de l'écoulement total sont de la forme ($a_s = a_p = a$)

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= v_\infty x-\frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{1}{[(x+a)^2+r^{*2}]^{1/2}}-\frac{1}{[(x-a)^2+r^{*2}]^{1/2}}\right\};\\ \Psi &= v_\infty\frac{r^{*2}}{2}-\frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{x+a}{[(x+a)^2+r^{*2}]^{1/2}}-\frac{x-a}{[(x-a)^2+r^{*2}]^{1/2}}\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.81)}$$

La ligne de courant nulle s'exprimera par l'équation $\Psi=0$, c'est-à-dire

$$\frac{v_\infty r^{*2}}{2}\left\{1-\frac{Q}{2\pi r^{*2}v_\infty}\left[\frac{\frac{x+a}{r^*}}{\left[\left(\frac{x+a}{r^*}\right)^2+1\right]^{1/2}}-\frac{\frac{x-a}{r^*}}{\left[\left(\frac{x-a}{r^*}\right)^2+1\right]^{1/2}}\right]\right\}=0.$$

(V.82)

Cette équation se divise en deux: la 1-ière solution $r^* = 0$ correspond à l'équation de l'axe des x; la 2-ème solution s'obtient de la condition d'égalité à zéro de l'expression entre les accolades.

En tenant compte du fait que

$$\frac{x+a}{r^*} = \operatorname{ctg} \gamma_s ; \qquad \frac{x-a}{r^*} = \operatorname{ctg} \gamma_p,$$

où γ est l'angle entre l'axe des x et la direction du rayon vecteur tracé respectivement de la source et du puits au point situé sur la ligne de courant nulle et en utilisant la relation évidente $\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{[\operatorname{ctg}^2\gamma + 1]^{1/2}} = \cos \gamma$, nous obtenons l'équation suivante de la ligne de courant nulle

$$r^{*2} = \frac{Q}{2\pi v_\infty} (\cos \gamma_s - \cos \gamma_p). \qquad \text{(V.83)}$$

Le contour de la ligne de courant nulle, correspondant à l'équation (V.83) et montré sur la fig. V.12, se nomme ovoïde.

En prenant la partie de la ligne de courant nulle qui correspond à l'ovoïde pour une paroi solide, nous obtenons l'écoulement autour d'un ovoïde de révolution. Trouvons les coordonnées des points critiques en déterminant à cet effet les projections de la vitesse

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_\infty - \frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{x+a}{[(x+a)^2 + r^{*2}]^{3/2}} - \frac{x-a}{[(x-a)^2 + r^{*2}]^{3/2}} \right\} ; \\ v_{r^*} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r^*} = -\frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{r^*}{[(x+a)^2 + r^{*2}]^{3/2}} - \frac{r^*}{[(x-a)^2 + r^{*2}]^{3/2}} \right\} . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.84)}$$

Au point critique nous avons $x = L/2$; $r^* = 0$; $v_x = 0$; $v_{r^*} = 0$.

En substituant ces valeurs dans l'expression de v_x, nous obtenons la relation liant la demi-longueur de l'ovale $L/2$ et le débit Q

$$\frac{Q}{4\pi v_\infty} \left[\frac{1}{\left(\frac{L}{2} + a\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{L}{2} - a\right)^2} \right] = 1. \qquad \text{(V.85)}$$

Pour l'ovoïde, les grandeurs données sont la longueur L et le diamètre maximum D; il est nécessaire de déterminer la liaison entre ces grandeurs et les grandeurs $\frac{Q}{4\pi v_\infty}$ et a. Pour obtenir la seconde équation de liaison, utilisons l'équation de la ligne de courant nulle (V.82). En admettant dans cette dernière $x = 0$ et en désignant $r^* = \frac{D}{2}$, nous trouvons

$$\frac{v_\infty}{2} \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \frac{Q}{2\pi} \left\{ \frac{a}{\left[a^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right]^{1/2}} \right\} = 0. \qquad \text{(V.86)}$$

Des équations (V.85) et (V.86) on déduit la relation entre Q, a, v_∞ et les éléments de l'ovoïde. Pour la détermination des points intermédiaires sur l'ovoïde, on doit utiliser l'équation (V.83) qu'il est avantageux de résoudre par la méthode des approximations successives.

La figure V.12 montre l'épure de la distribution du coefficient de pression suivant l'ovoïde de révolution avec un rapport des axes $L : D = 4$. On doit prêter attention à la présence dans les parties amont et aval de l'ovale d'une pointe considérable de dépression dépassant en valeur la dépression dans le maître couple. Une telle épure avec deux pointes de dépression est typique des corps à extrémités obtuses.

Très souvent, dans les applications, il est nécessaire de déterminer la distribution des vitesses sur le corps de révolution avec un rapport $L: D$ donné. Les calculs précis dont il sera question plus bas sont très volumineux et fatigants. Dans les calculs d'estimation du champ de la vitesse et de la pression, on peut approximativement remplacer le corps réel de révolution par un ovoïde de révolution avec le même rapport $L: D$ et effectuer le calcul suivant les formules pour l'ovoïde.

3. *Ecoulement longitudinal autour des corps de révolution*

Admettons que les sources (puits) à intensité linéaire q soient réparties le long d'un segment de droite $[a, b]$ confondu avec l'axe longitudinal du courant (l'axe des x, fig. V.13). Sous cette forme

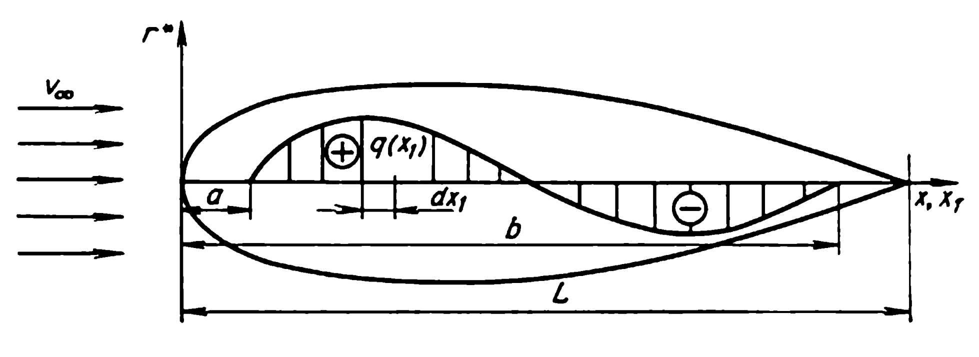


Fig. V.13

la méthode des singularités est utilisable pour l'étude des problèmes d'écoulements à symétrie axiale autour des corps de révolution. L'intensité a les dimensions du débit divisées par la longueur $[q] = [Q] : [L] = L^2T^{-1}$.

Désignons la coordonnée de la disposition des sources par x_1. Isolons un segment élémentaire dx_1; l'intensité linéaire de la distribution des sources, constante dans les limites du segment élémentaire, sera $q(x_1)$. Le débit du segment dx_1 sera $dQ = q\,dx_1$. Le poten-

tiel de courant élémentaire provoqué sera le suivant (V.70)

$$d\varphi=-\frac{dQ}{4\pi}\frac{1}{[(x-x_1)^2+r^{*2}]^{1/2}}=-\frac{1}{4\pi}\frac{q\,dx_1}{[(x-x_1)^2+r^{*2}]^{1/2}}\,.$$

La fonction élémentaire du courant de l'écoulement de fluide provoqué

$$d\psi=\frac{dQ}{4\pi}\left\{1-\frac{x-x_1}{[(x-x_1)^2+r^{*2}]^{1/2}}\right\}=$$
$$=\frac{q\,dx_1}{4\pi}\left\{1-\frac{x-x_1}{[(x-x_1)^2+r^{*2}]^{1/2}}\right\}\,. \qquad \text{(V.87)}$$

Pour obtenir le potentiel et la fonction de courant de l'écoulement provoqué par la distribution linéaire des sources, il suffit de sommer les potentiels et les fonctions de courant élémentaires, ce qui se réduit à intégrer des expressions obtenues précédemment suivant la variable x_1 dans les limites de a à b

$$\varphi=\int_a^b d\varphi=-\frac{1}{4\pi}\int_a^b\frac{q\,dx_1}{[(x-x_1)^2+r^{*2}]^{1/2}}\,; \qquad \text{(V.88)}$$

$$\psi=\frac{1}{4\pi}\int_a^b q\left\{1-\frac{x-x_1}{[(x-x_1)^2+r^{*2}]^{1/2}}\right\}dx_1=$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\int_a^b\frac{q\,(x-x_1)\,dx_1}{[(x-x_1)^2+r^{*2}]^{1/2}}\,.$$

Dans la formule (V.88), il est tenu compte de ce que pour le contour fermé l'intensité totale des sources et des puits est nulle

$$\int_a^b q\,dx_1=0. \qquad \text{(V.89)}$$

Superposons sur un système de sources linéairement réparties un écoulement de translation coulant le long de l'axe des x à la vitesse v_∞.

Le potentiel de cet écoulement complexe est

$$\Phi=v_\infty x-\frac{1}{4\pi}\int_a^b\frac{q\,dx_1}{[(x-x_1)^2+r^{*2}]^{1/2}}\,. \qquad \text{(V.90)}$$

La fonction de courant

$$\Psi=v_\infty\frac{r^{*2}}{2}-\frac{1}{4\pi}\int_a^b\frac{q\,(x-x_1)\,dx_1}{[(x-x_1)^2+r^{*2}]^{1/2}}\,. \qquad \text{(V.91)}$$

On obtient l'image des lignes de courant (dans le plan de la section méridienne) en égalant Ψ à une valeur constante C. En posant $C = 0$, nous trouvons la ligne de courant nulle. D'après la condition (V.89) une partie de la ligne de courant nulle sera fermée. Si l'on considère cette partie fermée comme une paroi solide, alors on peut compter que les relations (V.90) et (V.91) caractérisent l'écoulement autour d'un corps solide dont l'équation de contour se détermine par la condition

$$v_\infty \frac{r^{*2}}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_a^b \frac{q(x-x_1)\,dx_1}{[(x-x_1)^2 + r^{*2}]^{1/2}} = 0. \qquad \text{(V.92)}$$

En partant de la méthode des singularités hydrodynamiques, on peut poser deux problèmes.

1. Problème directe : sont donnés les contours d'un corps de révolution $r^* = r^*(x)$; on cherche à déterminer la distribution nécessaire des sources $q = q(x)$ assurant la coïncidence de la ligne de courant nulle avec le contour du corps.

2. Problème inverse : est donnée la distribution des sources, on cherche à trouver le contour du corps, représentant la ligne de courant nulle de l'écoulement.

Arrêtons-nous d'abord sur le second problème. Pour sa résolution il faut calculer l'intégrale figurant dans (V.92) et ensuite déterminer les coordonnées du contour.

Examinons maintenant le problème directe.

D'après l'expression (V.92) on voit que l'intensité inconnue des sources $q(x_1)$ se trouve sous le signe de l'intégrale. Les équations de cette nature s'appellent en mathématiques équations intégrales. En particulier, l'équation examinée ci-dessus se rapporte aux équations dites équations intégrales de Fredholm du 1er ordre. La résolution d'une telle équation présente de très grandes difficultés.

Dans nombre de cas la solution n'existe pas : physiquement cela signifie que le contour donné ne peut pas être représenté sous la forme d'une distribution linéaire des sources le long de l'axe

§ 27. ÉCOULEMENT À POTENTIEL AUTOUR DES CORPS

Examinons une surface arbitraire S dans un fluide. Supposons que sur cette surface soient réparties d'une façon continue des sources (puits) d'intensité variable σ^*. Isolons sur la surface une aire élémentaire dS de centre le point $N(x_1, y_1, z_1)$. Dans les limites de dS l'intensité σ^* peut être considérée constante. Le débit élémentaire des sources dQ, disposées sur cette aire, est

$$dQ = \sigma^* dS,$$

d'où il suit que les dimensions de $[\sigma^*] = [Q] : [S] = LT^{-1}$.

Par suite de la petitesse de l'aire dS, la distribution superficielle des sources sur celle-ci peut être remplacée par une source ponctuelle de débit dQ, disposée au centre de l'aire, au point N (x_1, y_1, z_1).

Le potentiel élémentaire $d\varphi$ en un point de l'écoulement en dehors de la surface (point M de coordonnées x, y, z) provoqué par l'écoulement ponctuel dQ est, suivant la formule (V.70),

$$d\varphi=\frac{dQ}{4\pi r}=\frac{\sigma^* \, dS}{4\pi r},$$

où $r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$ est le rayon vecteur réunissant les points N et M.

En intégrant cette expression sur la surface, nous trouvons le potentiel dû à un système des sources (puits) superficielles

$$\varphi=\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma^* \, dS}{r}. \qquad \text{(V.93)}$$

L'expression (V.93) est dite potentiel d'une simple couche; σ^* l'intensité d'une simple couche. En mathématiques on montre [21] que le potentiel d'une simple couche est une fonction continue des coordonnées en tous les points, aussi bien en dehors que sur la surface S.

La dérivée normale du potentiel d'une simple couche $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ à la traversée de la surface subit une rupture de continuité. Pour définir la valeur de cette rupture, isolons une aire élémentaire dS sur laquelle est orientée la normale extérieure n_e suivant la fig. V.14. Entourons l'aire dS par une surface fermée dS_{ABCDA}. Les surfaces dS_{AB} et dS_{CD} sont égales et parallèles à dS et sont distantes de celle-ci d'une valeur infiniment petite ε. Désignons par v_{n_e} la valeur de la composante normale de la vitesse sur la surface dS_{AB} et par v_{n_i} sur la surface dS_{CD}. Si les sources sont réparties sur la section dS alors la direction de la vitesse v_{n_e} confondra avec la normale extérieure et la direction v_{n_i} lui sera opposée (fig. V.15). Le débit de fluide dQ à travers la surface fermée dS_{ABCDA} sera

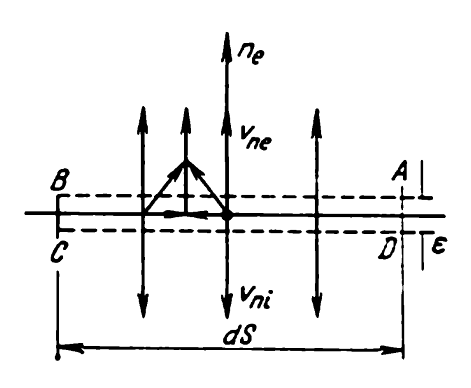


Fig. V.14

$$dQ=\oint_{dS_{ABCDA}} v_n \, dS=\int_{dS_{AB}} v_{n_e} \, dS-\int_{dS_{CD}} v_{n_i} \, dS+2\int_{dS_{BC}} v_n \, dS.$$

Par suite de la petitesse des aires, on peut considérer les vitesses v_{n_e} et v_{n_i} sur celles-ci comme constantes et négliger le débit à travers

les surfaces dS_{BC} lors d'un passage à la limite pour $\varepsilon \to 0$. En tenant compte de ce fait, ainsi que de ce que $dS_{AB} = dS_{CD} = dS$, nous obtenons

$$dQ = v_{n_e}\, dS_{AB} - v_{n_i}\, dS_{CD} = (v_{n_e} - v_{n_i})\, dS.$$

D'autre part, le débit élémentaire $dQ = \sigma^* dS$. En égalant les deux expressions du débit, nous obtenons

$$v_{n_e} - v_{n_i} = \sigma^*. \qquad (V.94)$$

En utilisant l'expression liant la composante normale de la vitesse et le potentiel φ, nous pouvons écrire (V.94) sous la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_e} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = \sigma^*. \qquad (V.95)$$

Ainsi, l'intensité d'une simple couche est égale à la différence des dérivées normales du potentiel lors de son approche aux côtés extérieur et intérieur de la surface.

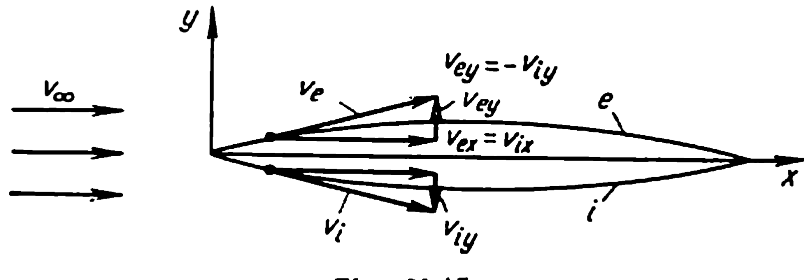


Fig. V.15

Les composantes tangentielles de la dérivée du potentiel de la simple couche ne subissent pas de discontinuité sur la surface.

De l'expression de σ^* obtenue il suit que si l'écoulement à potentiel autour d'une surface s'accompagne des discontinuités dans les composantes normales des vitesses cette surface peut être considérée comme une surface sur laquelle est répartie une simple couche (sources et puits) ; le potentiel φ provoqué est déterminé comme le potentiel d'une simple couche suivant la formule (V.93). On s'en sert souvent pour résoudre d'une façon approximative le problème d'un écoulement longitudinal autour des corps allongés.

Supposons qu'un corps étroit, symétrique par rapport au plan diamétral, avec un grand rapport de la longueur L à la largeur B ($L : B > 8$—9), est placé dans un courant de translation se déplaçant à la vitesse v_∞ dans le sens de l'axe positif des x (fig. V.15). Désignons par v_e et v_i les vitesses sur les surfaces supérieure et inférieure du corps. En raison de symétrie en des points semblables $v_e = v_i$. Soit l'équation de la surface supérieure du corps $y = f(x, z)$ et inférieure $y = -f(x, z)$. Les vitesses v_e et v_i sont tangentielles au

contour du corps. Leurs projections sur les axes de coordonnées seront respectivement v_{ex}, v_{ey}, v_{ix}, v_{iy}. D'après la fig. V.15 on voit qu'aux points semblables des surfaces supérieure et inférieure

$$v_{ex} = v_{ix}; \quad v_{ey} = -v_{iy}.$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est une dérivée de l'équation de la surface, égale à la tangente de l'angle entre la tangente à la surface et l'axe des x, alors il est évident que d'après la condition d'imperméabilité

$$v_{ey} = v_{ex} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Pour les corps de grande longueur, dans les régions amont et aval, la vitesse v_{ex} est proche de la vitesse à l'infini v_∞. Posons

$$v_{ex} = v_\infty + v_{x1},$$

où v_{x1} est une grandeur petite par rapport à v_∞.

En portant cette relation dans la condition d'imperméabilité, nous obtenons

$$v_{ey} = (v_\infty + v_{x1}) \frac{\partial f}{\partial x} = v_\infty \frac{\partial f}{\partial x} + v_{x1} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Pour les corps de grande longueur dans la région de la partie moyenne $\frac{\partial f}{\partial x}$ est petit. En négligeant dans cette expression la grandeur de 2-ième degré $v_{x1} \frac{\partial f}{\partial x}$ nous trouvons l'expression approximative de v_{ey} et par analogie celle de v_{iy}

$$v_{ey} \approx v_\infty \frac{\partial f}{\partial x}; \quad v_{iy} = -v_\infty \frac{\partial f}{\partial x}. \tag{V.96}$$

Les relations (V.96) ne sont pas justes dans les parties amont et aval du corps, où $v_x \approx 0$, $v_\infty \approx -v_{x1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est grand. Cependant en première approximation on peut négliger les influences locales provoquées par les parties amont et aval.

Les relations (V.96) sont vérifiées sur la surface du corps. Etant donné que le corps est mince, supposons que cette condition soit remplie non pas sur la surface du contour, mais sur le plan diamétral S_{PD}; dans ce cas on dit que la condition aux limites de l'imperméabilité se transpose sur le plan diamétral du corps mince S_{PD}, v_{ey} étant normal au plan diamétral $v_{ey} = v_{n_e}$.

En tenant compte de (V.96) à la surface de S_{PD}

$$v_{n_e} = v_\infty \frac{\partial f}{\partial x}; \quad v_{n_i} = -v_\infty \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{V.97}$$

c'est-à-dire que sur le plan diamétral il y a la discontinuité des composantes normales de la vitesse. Par conséquent, on peut le remplacer par une surface de simple couche.

En vertu de (V.94) et (V.97) l'intensité inconnue d'une simple couche est

$$\sigma^* = v_{n_e} - v_{n_i} = 2v_\infty \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Le potentiel de l'écoulement provoqué φ suivant la formule (V.93)

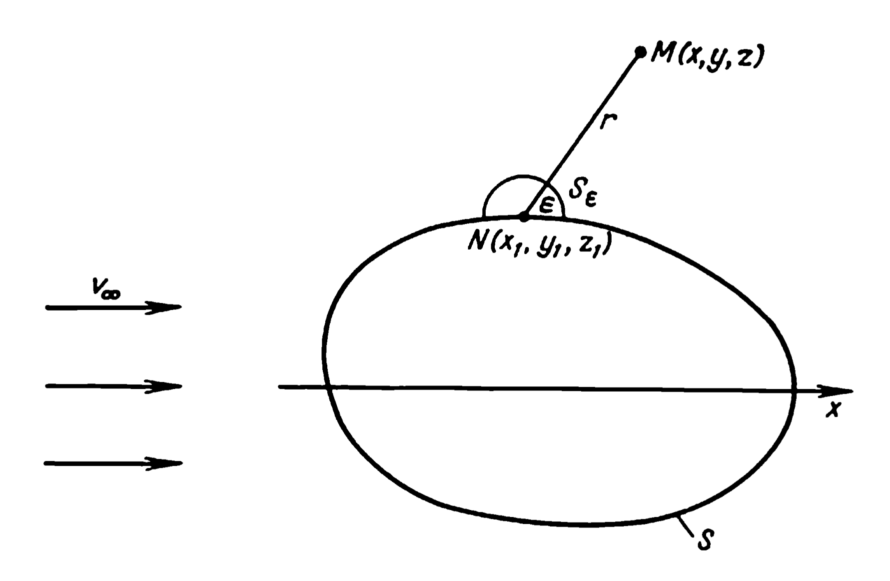


Fig. V.16

compte tenu de la dépendance précédente prend la forme

$$\varphi = \frac{2v_\infty}{\pi 4} \int_{S_{PD}} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{r} dS. \tag{V.98}$$

Le potentiel de l'écoulement inversé obtenu par addition de φ et du potentiel de l'écoulement de translation $v_\infty x$ sera

$$\Phi = v_\infty y + \frac{v_\infty}{2\pi} \int_{S_{PD}} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{r} dS. \tag{V.99}$$

Connaissant les valeurs $\frac{\partial f}{\partial x}$ on peut calculer l'intégrale au deuxième membre de cette dernière expression.

Examinons maintenant l'écoulement autour d'un corps de forme arbitraire dans un fluide (fig. V.16). Distribuons sur la surface S du corps les sources d'intensité σ^*. Le potentiel d'écoulement de fluide provoqué φ se détermine par la formule (V.93) et le potentiel d'écoulement autour du corps $\Phi = \varphi + v_\infty x$.

Sur la surface du corps doit se vérifier la condition d'imperméabilité

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}+v_\infty\cos(n,\ x)\right|_S=0. \qquad (V.100)$$

D'après (V.93), nous pouvons écrire l'expression

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\frac{\partial}{\partial n}\frac{\sigma^*}{r}dS=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\sigma^*\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}dS=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\frac{\sigma^*\cos(n,\ r)}{r^2}dS. \qquad (V.101)$$

Cependant, il est impossible de l'utiliser directement pour les points de la surface S, où $r=0$, car l'intégrale ainsi obtenue est impropre. Pour calculer cette intégrale impropre, isolons un point singulier N en lequel est disposée la source au moyen d'une demi-sphère S_ε de petit rayon ε (fig. V.16). D'après la définition de l'intégrale impropre

$$\int\limits_S=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S-S_\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}.$$

Calculons la seconde intégrale sur la surface de la demi-sphère, où $r=\varepsilon$, $\cos(n,\ r)=1$, $dS=\varepsilon^2 d\Omega$ (Ω est l'angle solide),

$$\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\sigma^*\cos(n,\ r)}{\varepsilon^2}\varepsilon^2 d\Omega=2\pi\sigma^*.$$

A la limite, si $\varepsilon\to 0$, σ^* tend vers la valeur du point N. Par conséquent l'expression (V.101) prend la forme

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S=-\frac{1}{4\pi}\left[\int\limits_S\frac{\sigma^*\cos(n,\ r)}{r^2}dS+2\pi\sigma^*\right]. \qquad (V.102)$$

En tenant compte de (V.102), écrivons la condition d'imperméabilité (V.101)

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\frac{\sigma^*\cos(n,\ r)}{r^2}dS+\frac{\sigma^*}{2}=v_\infty\cos(n\,;\ x). \qquad (V.103)$$

L'équation (V.103) sert à déterminer la fonction inconnue σ^*. Elle se rapporte au type d'équations intégrales hétérogènes de Fredholm du 2-ième ordre. Cette équation peut être résolue par la méthode des approximations successives (méthode des itérations) ou par la méthode de Fredholm qui consiste à remplacer l'intégrale par la somme finie.

D'après la méthode des itérations on prend pour l'approximation nulle la valeur $\sigma^{*(0)}$ déterminée par la dépendance

$$\sigma^{*(0)}=v_\infty\cos(n,\ x).$$

La première approximation $\sigma^{*(1)}$ s'obtient en substituant la valeur $\sigma^{*(0)}$ dans l'intégrale faisant partie de (V.103)

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma^{*(0)}}{r^2}\cos(n,\ r)\,dS+\sigma^{*(1)}=v_\infty\cos(n,\ x).$$

La valeur $\sigma^{*(1)}$ obtenue de cette expression est de nouveau portée dans (V.103) et ainsi jusqu'à ce que l'on obtienne les valeurs des approximations qui coïncident pratiquement.

Suivant la méthode de Fredholm, l'intégrale est remplacée par la somme finie étendue à k aires en lesquelles est divisée la surface du corps

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma^*\cos(n,\ r)}{r^2}\,dS=\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^*\left[\frac{\cos(n,\ r)}{r^2}\right]_i\Delta S_i.$$

En utilisant cette dernière expression, écrivons (V.103) sous la forme suivante

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^*\left[\frac{\cos(n,\ r)}{r^2}\right]_i\Delta S_i+\sigma^*=v_\infty\cos(n,\ x). \qquad \text{(V.104)}$$

Après avoir satisfait à l'équation (V.104) au centre de chacune des i aires de division, nous arrivons à un système d'équations linéaires par rapport à des intensités inconnues σ_m^* ($m=1,\ 2,\ \ldots,\ k$)

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^*\left[\frac{\cos(r,\ n)}{r^2}\right]_{im}\Delta S_i+\sigma_m^*=v_\infty[\cos(n,\ x)]_m, \qquad \text{(V.105)}$$

où r_{im} est la distance entre le point m sur la surface et le point choisi dans l'i-ième région.

Pour éliminer le point singulier, où $r_{im}=0$, on doit éliminer de (V.105) les grandeurs avec les indices $i=m$.

Un tel système dans le cas d'un grand nombre d'équations se résout au moyen d'une calculatrice électronique.

Pour les carènes des navires le nombre des aires de division de la surface $k=100\div 400$. Dans le cas d'écoulement autour d'un corps de révolution, on peut se limiter au nombre $k=20\div 40$.

§ 28. UTILISATION DES COORDONNÉES ELLIPTIQUES POUR L'ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT LONGITUDINAL AUTOUR DES CORPS DE RÉVOLUTION

Dans certains cas il est avantageux d'étudier les écoulements de fluide irrotationnels à symétrie axiale en utilisant des coordonnées curvilignes. Leur choix approprié à la résolution de l'équation de

Laplace $\Delta\varphi = 0$ aux dérivées partielles permet d'utiliser la méthode de séparation des variables de Fourier [21] et de ramener le problème à des équations différentielles ordinaires et aussi, ce qui est non moins important, de satisfaire de façon le plus simple aux conditions aux limites de l'imperméabilité sur le corps.

Enonçons succinctement les principales positions de la méthode des coordonnées curvilignes [15]. Désignons par q_1, q_2, q_3 les coordonnées curvilignes othogonales, liées aux coordonnées cartésiennes par les rélations générales

$$x = x(q_1, q_2, q_3); \quad y = y(q_1, q_2, q_3); \quad z = z(q_1, q_2 q_3).$$

Un rôle important dans les problèmes dans lesquels on introduit les coordonnées curvilignes revient aux coefficients de Lamé

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Les projections de la vitesse sur les axes de coordonnées curvilignes se déterminent par les relations suivantes

$$v_{q_i} \equiv v_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, 3. \qquad \text{(V.106)}$$

L'équation de Laplace à laquelle satisfait le potentiel de la vitesse en coordonnées curvilignes orthogonales a la forme

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}\right)\right] = 0. \qquad \text{(V.107)}$$

Pour la résolution des problèmes d'écoulement à symétrie axiale autour des corps de révolution, on utilise le plus souvent des coordonnées sphériques (pour les corps dont la forme est proche de la sphère) et elliptiques (pour les corps de révolution allongés).

Utilisons la méthode des coordonnées curvilignes pour la résolution d'un problème d'écoulement potentiel longitudinal autour des corps de révolution. Introduisons dans le plan de la section méridienne le système de coordonnées curvilignes liées aux coordonnées cartésiennes x, r^* par les relations

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta = c\lambda\mu; \quad r^* = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta = c\sqrt{\lambda^2 - 1}\sqrt{1 - \mu^2}, \qquad \text{(V.108)}$$

où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ est l'excentricité linéaire de l'ellipse de demi-axes a et b;

$$\lambda = \operatorname{ch} \xi, \qquad \mu = \cos \eta. \qquad \text{(V.109)}$$

Pour l'étude des coordonnées elliptiques λ et μ, trouvons les équations des lignes de coordonnées. Rappelons que le long de la ligne de coordonnée dans le plan l'une des coordonnées curvilignes est constante. Posons $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$; alors les coordonnées carté-

siennes des points de la ligne λ_0

$$x = c\lambda_0\mu\,; \qquad r^* = c\sqrt{\lambda_0^2 - 1}\sqrt{1-\mu^2}.$$

Récrivons ces relations sous la forme

$$\left(\frac{x}{c\lambda_0}\right)^2 = \mu^2\,; \quad \left(\frac{r^*}{c\sqrt{\lambda_0^2 - 1}}\right)^2 = 1 - \mu^2,$$

d'où, en éliminant le paramètre μ, nous arrivons à l'équation qui lie x et r^*

$$\left(\frac{x}{c\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{r^*}{c\sqrt{\lambda_0^2 - 1}}\right)^2 = 1,$$

caractérisant l'ellipse de demi-axes

$$a = c\lambda_0\,; \qquad b = c\sqrt{\lambda_0^2 - 1}.$$

Suivant ces expressions, la relation entre λ_0 et les paramètres de l'ellipse est

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{c}{a} = e, \tag{V.110}$$

où e est l'excentricité de l'ellipse.

Ainsi, les lignes de coordonnées représentent dans le plan des xr^* une famille d'ellipses de différentes excentricités. De la même manière, on peut montrer que les lignes de coordonnées $\mu = \mu_0 =$ const dans le plan (x, r^*) représentent une famille d'hyperboles confocales des ellipses $\lambda = \lambda_0$. Les coordonnées elliptiques λ et μ sont orthogonales, c'est-à-dire que l'intersection des ellipses et des hyperboles confocales s'effectue sous un angle droit.

En tenant compte de ce que la liaison de la coordonnée cylindrique r^* avec les coordonnées cartésiennes y et z se détermine suivant (V.63) par les formules $y = r^* \cos\theta$ et $z = r^* \sin\theta$ on peut écrire les expressions définitives de la liaison entre les coordonnées cartésiennes et curvilignes λ, μ, θ

$$x = c\lambda\mu\,; \quad y = c\sqrt{\lambda^2 - 1}\sqrt{1-\mu^2}\cos\theta\,;$$
$$z = c\sqrt{\lambda^2 - 1}\sqrt{1-\mu^2}\sin\theta. \tag{V.111}$$

En calculant les coefficients de Lamé correspondants nous obtenons après des transformations simples

$$\left.\begin{aligned} H_1 = H_\lambda &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2} = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}}\,;\\ H_2 = H_\mu &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2} = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}}\,;\\ H_3 = H_\theta &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} =\\ &= r^* = c\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1-\mu^2}. \end{aligned}\right\} \tag{V.112}$$

Dans le cas examiné d'écoulement à symétrie axiale les projections des vitesses $v_\theta = v_3 = \frac{1}{H^3}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0$, et $v_\lambda = v_1$ et $v_\mu = v_2$ ne dépendent pas de l'angle θ. En tenant compte de ce fait l'équation de Laplace (V.107) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda^2-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right]+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right]=0. \qquad \text{(V.113)}$$

Pour la résolution de (V.113) employons la méthode de Fourier, de séparation des variables en représentant le potentiel d'écoulement provoqué φ sous la forme du produit de deux fonctions, dont l'une ne dépend que de la variable λ et l'autre de la variable μ

$$\varphi = L(\lambda)\,M(\mu) = LM.$$

En portant cette dernière expression dans (V.113) nous obtenons

$$\frac{d}{d\lambda}\left[(\lambda^2-1)\frac{dL}{d\lambda}M\right]+\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}L\right]=0.$$

En divisant les deux membres de cette équation par LM nous l'écrivons sous la forme suivante

$$\frac{1}{L}\frac{d}{d\lambda}\left[(\lambda^2-1)\frac{dL}{d\lambda}\right]=-\frac{1}{M}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]. \qquad \text{(V.114)}$$

Etant donné que les variables λ et μ sont indépendantes, l'égalité (V.114) n'aura lieu que dans le cas où ses deux membres seront séparément égaux à une valeur constante. Comme on le montre en mathématiques, il est avantageux de prendre cette constante sous la forme $n(n+1)$, où n est le nombre entier positif. En vertu de ce fait, nous obtenons pour la détermination des fonctions L et M deux équations différentielles ordinaires identiques du 2-ième ordre à coefficients variables

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{d\lambda}\left[(1-\lambda^2)\frac{dL}{d\lambda}\right]+n(n+1)L=0;\\&\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]+n(n+1)M=0.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.115)}$$

L'équation du type

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0$$

se nomme équation de Legendre [15], [21].

A cette équation du 2-ième ordre satisfont deux classes de solutions indépendantes:

1) les fonctions de Legendre du 1er genre (polynômes de Legendre) désignées par $P_n(x)$; $n = 0, 1, 2 \ldots$

La forme des polynômes de Legendre successifs est la suivante:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \ \ldots; \tag{V.116}$$

avec $x \to \infty$, comme il est facile de voir, $P_n(x) \to \infty$; avec $x \to 0$ les polynômes de Legendre sont limités;

2) les fonctions de Legendre du 2-ième ordre $Q_n(x)$.

Leurs expressions successives sont

$$Q_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}; \quad Q_1 = \frac{1}{2} x \ln \frac{x+1}{x-1} - 1; \quad \ldots, \tag{V.117}$$

d'où l'on voit que pour $x \to \infty$ les fonctions $Q_n(x) \to 0$; pour $x \to 1$ les fonctions $Q_n(x)$ possèdent une singularité logarithmique.

Comme il suit des propriétés des fonctions hyperboliques, $\infty > \lambda \geqslant 1$ représente les limites de la variation de la coordonnée elliptique $\lambda = \operatorname{ch} \xi$; $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$ de la coordonnée $\mu = \cos \eta$.

Suivant les particularités physiques du problème, il devient clair que le potentiel du mouvement absolu de fluide doit diminuer avec l'éloignement du corps.

En vertu de ce qui venait d'être dit ci-dessus, on peut conclure qu'il faut prendre pour solutions particulières des équations (V.115) limitées en dehors du corps les expressions $P_n(\mu)$ et $Q_n(\lambda)$. En définitive, la solution particulière pour le potentiel φ obtenue par la méthode de Fourier peut s'écrire sous la forme

$$\varphi_{\text{s.p.}} = B_n P_n(\mu) Q_n(\lambda),$$

où B_n est la constante arbitraire.

Ce n'est que dans ce cas que, loin du corps pour $\lambda \to \infty$, le potentiel φ deviendra nul comme l'exigent les conditions du problème.

La solution générale s'obtient en additionnant les solutions particulières

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\mu) Q_n(\lambda). \tag{V.118}$$

Le potentiel du mouvement inversé Φ se détermine par addition de (V.118) avec le potentiel d'un écoulement de translation coulant à la vitesse de mouvement du corps v_∞ dans le sens de l'axe positif des x

$$\Phi = v_\infty x + \varphi.$$

En utilisant la relation $x = c\,\lambda\mu$ et en introduisant de nouvelles constantes arbitraires A_n suivant la formule

$$B_n = c v_\infty A_n,$$

on peut écrire l'expression de Φ sous la forme définitive suivante:

$$\Phi = cv_\infty \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\mu) Q_n(\lambda) + \lambda\mu \right]. \qquad \text{(V.119)}$$

L'utilisation de (V.119) est possible si l'on connaît les valeurs de A_n qui dépendent de la forme du corps. A cet effet, servons-nous de la fonction de courant d'écoulement Ψ.

En partant des équations de liaison entre le potentiel et la fonction de courant, analogues aux relations (V.64), après quelques transformations on trouve l'expression cherchée de Ψ

$$\Psi = \frac{1}{2} c^2 v_\infty (\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2) \times$$
$$\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n}{n(n+1)} \frac{dQ_n}{d\lambda} \frac{dP_n}{d\mu} + 1 \right]. \qquad \text{(V.120)}$$

L'équation de la ligne de courant nulle (équation du contour méridien du corps) $\Psi = 0$ ou d'après (V.120)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n}{n(n+1)} \frac{dQ_n}{d\lambda} \frac{dP_n}{d\mu} + 1 = 0. \qquad \text{(V.121)}$$

En comparant (V.121) avec l'équation donnée du contour méridien du corps de révolution en coordonnées elliptiques, on peut déterminer A_n.

Expliquons le principe de la méthode de détermination des coefficients A_n qui a été développé dans les travaux de Kaplan. Soit l'équation du contour du corps en coordonnées elliptiques $\lambda = f(\mu)$. Prenons sur le corps N points; choisissons le j-ième point arbitraire du contour $(0 < j < N)$. La ligne de courant nulle coïncide avec l'équation du contour, à la suite de quoi les coordonnées λ_j et μ_j doivent satisfaire à l'équation (V.121). Au lieu d'une série infinie limitons-nous dans l'expression du contour $\Psi = 0$ à un nombre fini de termes. Portons les coordonnées de ce point λ_j et μ_j dans l'équation de la ligne de courant nulle

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{2A_n}{n(n+1)} \frac{dQ_n(\lambda_j)}{d\lambda} \frac{dP_n(\mu_j)}{d\mu} + 1 = 0. \qquad \text{(V.122)}$$

Dans (V.122) les dérivées des fonctions de Legendre, calculées pour le j-ième point donné, sont des coefficients numériques.

En satisfaisant à l'équation (V.122) en N points, nous obtenons un système d'équations linéaires par rapport aux inconnues A_n

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{n=1}^{m} \frac{2A_n}{n(n+1)} \frac{dQ_n(\lambda_j)}{d\lambda} \frac{dP_n(\mu_j)}{d\mu} + 1 = 0, \qquad \text{(V.123)}$$

dont la résolution est très difficile ; dans ce cas il est rationnel d'utiliser des calculatrices. Lors d'un calcul manuel on prend ordinairement 15-20 points sur le contour et au plus 5-7 coefficients A_n. Le système ainsi obtenu dans lequel le nombre d'équations dépasse le nombre d'inconnues est résolu par la méthode des moindres carrés de Gauss.

Pour les corps relativement allongés ($L : D > 6$), la détermination des coefficients A_n s'effectue suivant la méthode approximative de J. Sérébriiski [15].

Les projections de la vitesse sur les axes du système de coordonnées elliptiques sont determinées par les formules (V.106).

Le carré de la vitesse totale après certaines transformations s'exprimera par la relation suivante:

$$\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2=\left(\frac{v_\lambda}{v_\infty}\right)^2+\left(\frac{v_\mu}{v_\infty}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{\lambda^2-\mu^2}\left[(\lambda^2-1)\left(\sum_{n=1}^{m}A_nP_n\frac{dQ_n}{d\lambda}+\mu\right)^2+\right.$$
$$\left.+(1-\mu^2)\left(\sum_{n=1}^{m}A_n\frac{dP_n}{d\mu}Q_n+\lambda\right)^2\right]. \qquad \text{(V.124)}$$

La méthode décrite ci-dessus permet de résoudre facilement le problème de l'écoulement longitudinal autour d'un ellipsoïde de révolution de demi-axes a et b et d'excentricité e. L'équation du contour méridien, c'est-à-dire de l'ellipse, se représente sous la forme $\lambda=\lambda_0=1/e$. Il est évident que le contour elliptique coïncide avec l'une des lignes de coordonnées, c'est-à-dire que de tous les coefficients A_n il ne restera que A_1 ($A_n=0$ pour $n=2, 3, \ldots$).

En portant dans l'expression (V.121) $\lambda=\lambda_0$ et en y admettant $n=1$, $A_2=A_3=0$, écrivons l'équation de la ligne de courant nulle sous la forme

$$\frac{2A_1}{2}\frac{dQ_1(\lambda_0)}{d\lambda}\frac{dP_1(\mu)}{d\mu}+1=0. \qquad \text{(V.125)}$$

En utilisant les relations pour les fonctions de Legendre et en introduisant à la place de λ_0 l'excentricité, nous trouvons l'expression de A_1 sous la forme

$$A_1=-\frac{1}{\frac{dQ_1(\lambda_0)}{d\lambda}}=-\frac{1}{\frac{1}{2}\ln\frac{1+e}{1-e}-\frac{e}{1-e^2}}. \qquad \text{(V.126)}$$

En portant la valeur de A_1 dans l'expression du potentiel (V.119), en remplaçant $Q_1(\lambda)$ suivant la formule (V.117) et en introduisant

le grand demi-axe de l'ellipse $a = c\lambda_0$, nous obtenons

$$\Phi = cv_\infty (A_1 P_1 Q_1 + \lambda\mu) =$$

$$= -v_\infty a \left[\frac{\frac{1}{2}\lambda \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1}}{\frac{1}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e} - \frac{1}{1-e^2}} - e\lambda \right] \mu. \qquad \text{(V.127)}$$

Calculons les projections des vitesses en des points situés sur l'ellipsoïde. Sur sa surface doit se remplir la condition d'imperméabilité. Etant donné que l'équation du contour méridien est $\lambda = \lambda_0$, la projection de la vitesse $v_\lambda = 0$, ce dont on s'assure facilement par calcul direct. La projection de la vitesse v_μ, tangente au contour de l'ellipsoïde et égale à la vitesse totale v, se détermine par la relation

$$\left(\frac{v}{v_\infty}\right) = \left(\frac{v_\mu}{v_\infty}\right) = \frac{1}{v_\infty}\frac{1}{H_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu} =$$

$$= \frac{e^3}{e - \frac{1}{2}(1-e^2)\ln\frac{1+e}{1-e}} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{1-e^2\mu^2}}. \qquad \text{(V.128)}$$

La vitesse maximale v_m ayant lieu dans la section du maître couple de l'ellipsoïde $x = c\lambda_0$, $\mu = 0$, $\mu = 0$ est numériquement égale à

$$\frac{v_m}{v_\infty} = \frac{e^3}{e - \frac{1}{2}(1-e^2)\ln\frac{1+e}{1-e}} \approx \frac{1,5}{1+\frac{e^2}{2}}. \qquad \text{(V.129)}$$

Cette dernière relation approchée est obtenue par le développement du dénominateur en série par rapport aux faibles valeurs de e. Ce développement montre en particulier qu'avec $e = 0$, $\frac{v_m}{v_\infty} = 1,5$ pour une sphère, c'est-à-dire que le résultat coïncide avec la solution obtenue précédemment.

§ 29. PRISE EN COMPTE DE L'INFLUENCE DES FRONTIÈRES D'ÉCOULEMENT SUR L'ÉCOULEMENT AUTOUR DES CORPS. MÉTHODE DES IMAGES REFLÉTÉES

Ci-dessus nous avons examiné le mouvement des corps dans un fluide infini, mouvement dans lequel les parois et la surface libre du fluide n'influent pratiquement pas sur les caractéristiques hydrodynamiques du corps. Lors du mouvement des navires, il est indispensable dans un certain nombre de cas de tenir compte de l'influence de la surface libre de la houle et du fond du bassin.

Les méthodes d'évaluation de l'influence de la surface libre de la houle sur l'écoulement autour des corps seront énoncées dans le

chapitre XIII. Nous nous arrêterons ici succinctement sur les méthodes d'évaluation de l'influence des frontières solides.

Envisageons le principe d'évaluation de l'influence des frontières d'écoulement sur le cas le plus simple de l'écoulement autour d'un corps à la vitesse v_∞ dirigée le long d'une paroi plane immobile infini (fig. V.17).

Désignons par $\varphi(x, y, z)$ le potentiel d'écoulement de fluide provoqué en présence des parois et par $\varphi_\infty(x, y, z)$ le potentiel d'écoulement provoqué dans un fluide infini, ce potentiel étant considéré

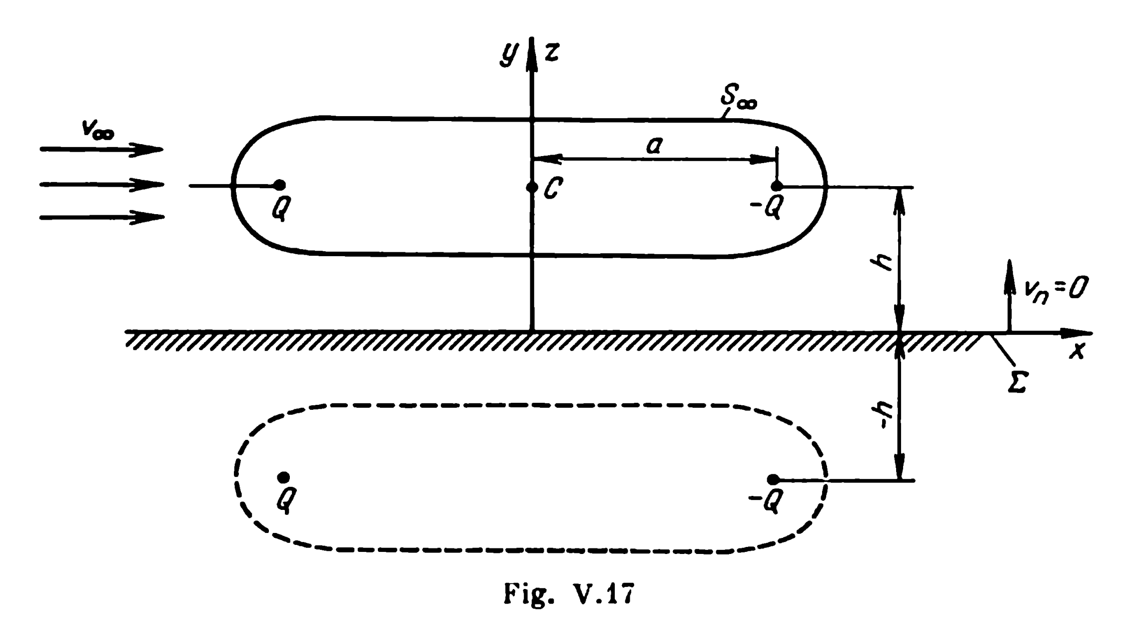


Fig. V.17

comme connu. En partant du principe de superposition des écoulements potentiels, on peut représenter le potentiel cherché sous la forme d'une somme de deux termes

$$\varphi = \varphi_\infty + \varphi_p, \tag{V.130}$$

où φ_p est le potentiel supplémentaire inconnu qui tient compte de l'influence de la paroi.

Pour la détermination de φ_p prenons en compte la condition aux limites de l'imperméabilité sur la paroi solide Σ

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

D'après (V.130) il vient que sur la paroi solide doit se remplir la condition

$$\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_p}{\partial n}, \tag{V.131}$$

qui signifie que les vitesses normales dérivant des potentiels φ_∞ et φ_p sur la paroi solide doivent s'annuler mutuellement.

Le potentiel du mouvement inversé Φ s'obtient par l'addition de φ et du potentiel de l'écoulement de translation

$$\Phi = v_\infty x + \varphi = v_\infty x + \varphi_\infty + \varphi_p, \tag{V.132}$$

et la condition aux limites sur le corps S_∞ sera

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = v_\infty \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \tag{V.133}$$

Examinons l'influence de la paroi solide sur l'écoulement provoqué par des singularités hydrodynamiques (par des sources).

La résolution de ce problème particulier permettra d'examiner dans ce qui suit le problème d'écoulement autour des corps avec utilisation de la méthode de superposition des écoulements.

Soit une source à trois dimensions de débit Q disposée dans le demi-plan supérieur (fig. V.18). Nous chercherons la solution sous la forme (V.130). Le potentiel de la source dans un fluide infini, disposée en un point de coordonnées (o, o, h), est connu

$$\varphi_\infty = -\frac{Q}{4\pi r_1} = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{1/2}} .$$

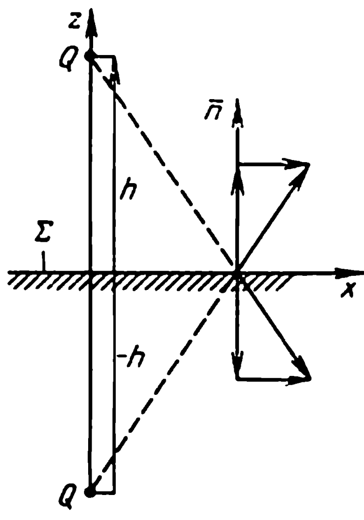


Fig. V.18

Aux points situés à la frontière Σ, la composante normale de la vitesse due à la source n'est pas égale à zéro, comme il est montré sur la fig. V.18. D'après la figure on voit que pour l'annulation de cette vitesse normale, c'est-à-dire pour remplir la condition aux limites (V.131), il faut placer dans le demi-plan inférieur une source fictive de même intensité Q qui sera l'image de la première source. Ainsi,

$$\varphi_p = -\frac{Q}{4\pi r_2} = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{1/2}} . \tag{V.134}$$

Ce potentiel est dit potentiel de l'image de la source. La comparaison des expressions de φ_∞ et φ_p montre que

$$\varphi_p = \varphi_\infty^*, \tag{V.135}$$

où φ_∞^* est le potentiel de l'image, obtenu par remplacement de h par $-h$ dans l'expression de φ_∞.

Le potentiel de l'écoulement provoqué

$$\varphi = \varphi_\infty + \varphi_\infty^* = -\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) . \tag{V.136}$$

Une telle méthode de résolution d'un problème, quand le potentiel φ_p est supposé correspondant à un fluide infini en un point symétrique par rapport à la paroi solide, s'appelle méthode des images.

Remarquons qu'au cas des singularités hydrodynamiques, les conditions aux limites (V.133) ne doivent pas être prises en compte.

Examinons le problème d'écoulement autour des corps se trouvant près d'une paroi solide sur l'exemple d'un écoulement autour d'un ovoïde de révolution (§ 26) disposé près d'une paroi (fig. V.17). Désignons sa surface par S_∞.

Cherchons la solution du potentiel Φ d'écoulement autour d'un ovoïde en présence d'une paroi sous la forme de (V.132). Suivant les conclusions du § 26 le potentiel du mouvement provoqué dans un fluide infini est

$$\varphi_\infty = -\frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{1}{[(x+a)^2+y^2+(z-h)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-a)^2+y^2+(z-h)^2]^{1/2}}\right\},$$

où Q est le débit de la source et du puits; h la distance de l'axe de l'ovoïde à la paroi.

Pour déterminer le potentiel supplémentaire φ_p qui tient compte de l'influence de la paroi, plaçons dans le demi-plan inférieur les images de la source et du puits de potentiel φ_∞^*

$$\varphi_\infty^* = -\frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{1}{[(x+a)^2+y^2+(z+h)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-a)^2+y^2+(z+h)^2]^{1/2}}\right\}.$$

Les singularités reflétées de potentiel φ_∞^* feront annuler les vitesses normales sur les parois. Cependant elles engendreront des vitesses supplémentaires aux points de la surface S_∞ de l'ovoïde. De cette façon, si l'on considère $\varphi_p = \varphi_\infty^*$, alors la condition aux limites d'imperméabilité sur la surface donnée S_∞ sera affectée. Il est évident que dans ce cas la surface de courant correspondant au contour du corps changera.

Pour satisfaire à la condition aux limites d'imperméabilité sur la surface donnée S_∞ il faut répartir à l'intérieur du corps des singularites hydrodynamiques supplémentaires de potentiel φ_{s1} qui ne respectent pas les conditions d'imperméabilité sur la paroi solide Σ.

Pour éviter cette infraction, il faut évidemment placer dans le demi-plan inférieur des singularités reflétées de potentiel φ_{s1}^*. Elles provoqueront la violation des conditions aux limites d'imperméabilité sur la surface du corps S_∞. Pour éviter cette violation, il faut répartir à l'intérieur du corps des singularités supplémentaires du second ordre de potentiel φ_{s2}, etc.

Conformément à ce qui a été dit, l'expression du potentiel φ_p satisfaisant simultanément aux conditions aux limites sur la surface Σ et sur la surface du corps S_∞, peut être représentée sous la forme

$$\varphi_p = \varphi^*_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_{sk} + \varphi^*_{sk}),$$

et l'expression générale du potentiel Φ sera

$$\Phi = v_\infty x + \varphi_\infty + \varphi^*_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_{sk} + \varphi^*_{sk}). \qquad \text{(V.137)}$$

Les potentiels φ_∞ et φ^*_∞ sont connus de la résolution du problème de mouvement du corps dans un fluide infini. La détermination des potentiels supplémentaires φ_{sk} présente certaines difficultés. Comme il s'ensuit des considérations physiques, ils engendrent des vitesses inférieures à celles provoquées par les potentiels $(\varphi_\infty + \varphi^*_\infty)$. Donc il est naturel de poser la question: ne peut-on pas, en première approximation, rejeter dans l'expression (V.137) tous les termes avec des potentiels supplémentaires, c'est-à-dire poser Φ sous la forme

$$\Phi = v_\infty x + (\varphi_\infty + \varphi^*_\infty). \qquad \text{(V.138)}$$

Cette expression ne peut assurer l'approximation nécessaire à la solution du problème posé. Le fait est que les singularités symétriques engendrent des vitesses supplémentaires dans la direction de l'axe des x, ce qui entraîne le déplacement du corps. Ainsi, quand Φ est donné sous la forme (V.138), cela conduit à l'inobservation de la condition d'inversion de l'écoulement, c'est-à-dire que le corps n'est pas immobile. Les différents points du corps se déplacent avec les différentes vitesses proches de la vitesse de déplacement du point C du centre de l'ovoïde (fig. V.17), que l'on peut prendre pour une certaine vitesse moyenne de déplacement du corps.

Pour une résolution approchée du problème, représentons Φ sous la forme

$$\Phi = v_\infty x + \varepsilon (\varphi_\infty + \varphi^*_\infty), \qquad \text{(V.139)}$$

en choisissant la constante ε de façon à satisfaire à la condition d'inversion du mouvement, autrement dit, de façon que le centre du corps en mouvement inversé reste immobile.

En dérivant Φ par rapport à la coordonnée x et en portant dans l'expression obtenue la coordonnée du point C, trouvons sa vitesse en mouvement inversé

$$v_x = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_C = 0 = v_\infty + \varepsilon \left[\left(\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial x}\right)_C + \left(\frac{\partial \varphi^*_\infty}{\partial x}\right)_C \right] = 0.$$

En mouvement absolu dans un fluide infini, le corps se déplace à la vitesse v_∞ dans le sens de l'axe négatif des x, d'où il suit que

$$\left(\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial x}\right)_C = -v_\infty.$$

En résolvant conjointement les deux dernières équations, nous obtenons

$$\varepsilon = \frac{1}{1-\frac{1}{v_\infty}\left(\frac{\partial \varphi^*_\infty}{\partial x}\right)_C}, \qquad (V.140)$$

où $\left(\frac{\partial \varphi^*_\infty}{\partial x}\right)_C$ est la vitesse au centre provoquée par les images du corps.

En posant Φ sous la forme (V.139) avec un facteur de correction ε déterminé suivant (V.140), on peut dans certains cas assurer une approximation suffisante de la solution du problème d'écoulement autour d'un corps placé près de la paroi. Remarquons que la condition aux limites sur le corps S_∞ n'est pas remplie, d'où une déformation de la forme du corps par rapport à celle donnée. Cette déformation est d'autant plus petite que le corps est plus éloigné de la paroi. Comme le montrent les calculs, à une distance de l'axe du corps à la paroi égale à 1-2 diamètres du corps, on peut négliger la déformation de la forme du corps.

La prise en compte de l'influence des limites curvilignes de l'écoulement est très compliquée dans le cas général. Pour se faire une idée des méthodes utilisées dans ce cas, examinons deux exemples simples. Soit une source de débit Q disposée dans le plan des $z = x + iy$ sur l'axe des x au point B_1 de coordonnée x_1 au voisinage de la paroi curviligne ayant la forme d'une circonférence de rayon r_0 (fig. V.119,a). Le contour de la circonférence dont l'équation peut être représentée sous la forme $z = r_0 e^{i\theta}$ doit être une ligne de courant, c'est-à-dire la fonction de courant sur ce contour $\psi = 0$. Sur la ligne de courant $\psi = 0$ doit s'observer la condition aux limites de l'imperméabilité.

Plaçons à l'intérieur du contour de la circonférence une source supplémentaire de débit Q au point de coordonnée x_2 et un puits de même débit à l'origine des coordonnées. La présence du puits est indispensable pour assurer que le débit total du fluide à travers la circonférence soit nul ; ce n'est qu'alors que la ligne de courant sera une courbe fermée. La fonction caractéristique de cet écoulement prendra la forme

$$w = -\frac{Q}{2\pi}\ln z + \frac{Q}{2\pi}\ln(z-x_2) + \frac{Q}{2\pi}\ln(z-x_1). \qquad (V.141)$$

La vitesse complexe

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = \frac{Q}{2\pi}\left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-x_2} + \frac{1}{z-x_1}\right). \qquad (V.142)$$

Le point A de coordonnée $z = r_0$ doit être critique, c'est-à-dire en ce point $\frac{dw}{dr} = 0$. En substituant cette valeur de z dans (V.142), nous obtenons l'équation pour la détermination de la coordonnée x_2

$$\frac{Q}{2\pi}\left(-\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_0-x_2}+\frac{1}{r_0-x_1}\right)=0, \qquad (V.143)$$

d'où

$$x_2=\frac{r_0^2}{x_1}. \qquad (V.144)$$

Les points dont les coordonnées satisfont à cette relation sont dits points d'inversion par rapport à la circonférence.

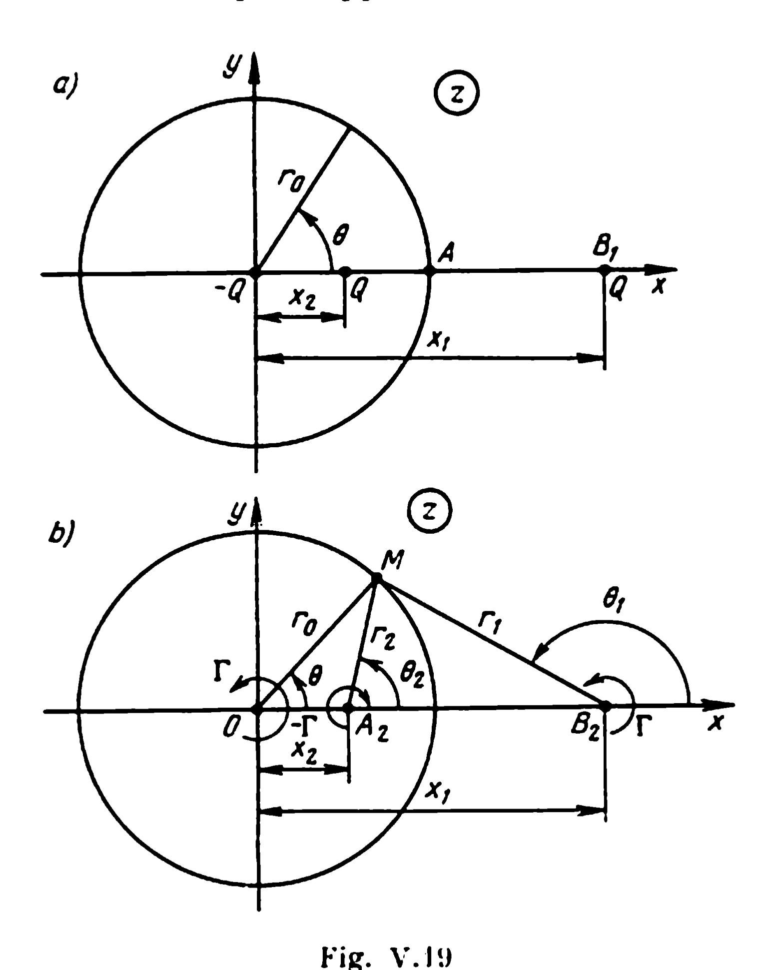


Fig. V.19

De (V.144) il suit que la source supplémentaire doit être disposée au point d'inversion par rapport à la circonférence. Finalement, en tenant compte de (V.144) dans (V.141), nous obtenons l'expression pour la fonction caractéristique

$$w=\frac{Q}{2\pi}\ln\left[\left(z-\frac{r_0^2}{x_1}\right)\left(\frac{z-x_1}{z}\right)\right]. \qquad (V.145)$$

En portant dans (V.145) $z = r_0 e^{i\theta}$, nous arrivons à la formule suivante:

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln \left[z - x_1 - \frac{r_0^2}{x_1} + \frac{r_0^2}{z} \right] =$$
$$= \frac{Q}{2\pi} \ln \left[r_0 e^{i\theta} + r_0 e^{-i\theta} - \left(\frac{r_0^2}{x_1} + x_1 \right) \right] =$$
$$= \frac{Q}{2\pi} \ln \left[2r_0 \cos\theta - (x_2 + x_1) \right]. \qquad (V.146)$$

qui nous permet de nous assurer que w sur la circonférence r_0 est une grandeur réelle, c'est-à-dire $\psi = 0$: cela signifie que la circonférence est une ligne de courant.

A titre d'un autre exemple, examinons un écoulement plan de circulation Γ, dont le centre est placé au point B_2 de coordonnée x_1 en dehors de la circonférence de rayon r_0 (fig. V.19,*b*). Plaçons au point A_2 d'une inversion par rapport à la circonférence un écoulement à circulation supplémentaire de sens inverse $-\Gamma$. Pour que la circulation totale suivant la circonférence soit égale à zéro, plaçons en son centre un écoulement de circulation Γ.

Déterminons que cet écoulement total caractérise un écoulement engendré par l'écoulement à circulation en présence d'une circonférence. Pour cela il suffit de montrer que la fonction de courant ψ de l'écoulement est constante sur la circonférence.

La fonction caractéristique de l'écoulement compliqué examiné est

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\ln (z - x_1) - \ln (z - x_2) + \ln z \right]. \qquad (V.147)$$

En introduisant les notations (fig. V.19,*b*)

$$z - x_1 = r_1 e^{i\theta_1}; \quad z - x_2 = r_2 e^{i\theta_2}; \quad z = r e^{i\theta}$$

et en séparant dans (V.147) les parties réelle et imaginaire, nous obtenons pour ψ l'expression suivante:

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln r_1 - \ln r_2 + \ln r) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\ln \frac{r_1}{r_2} + \ln r \right). \qquad (V.148)$$

Supposons que le point M en lequel on cherche ψ se trouve sur la circonférence $r = r_0$ (fig. V.19,*b*) et montrons que si $x_2 = \frac{r_0^2}{x_1}$, l'expression (V.148) représente une valeur constante. Il est facile de voir que les triangles oA_2M et oB_2M sont semblables. En effet,

$$\frac{oM}{oA_2} = \frac{oB_2}{oM},$$

puisque cette égalité découle de (V.144) qui exprime la propriété d'inversion.

Alors pour les côtés $A_2M = r_2$ et $B_2M = r_1$ on a

$$\frac{B_2M}{A_2M}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{oB_2}{oM}=\frac{x_1}{r_0}=\text{const.}$$

En portant dans (V.148) le rapport de rayons trouvé, nous obtenons

$$\psi=\frac{\Gamma}{2\pi}\left(\ln\frac{x_1}{r_0}+\ln r_0\right). \qquad \text{(V.149)}$$

Toutes les grandeurs figurant dans cette expression sont constantes, d'où il suit que sur la circonférence la fonction de courant est également constante. Ceci démontre l'hypothèse énoncée sur la fonction (V.147) qui décrit un écoulement autour d'un tourbillon ponctuel, disposé au voisinage de la circonférence de rayon r_0.

CHAPITRE VI

DÉTERMINATION DES RÉACTIONS HYDRODYNAMIQUES EN MOUVEMENT DES CORPS DANS UN FLUIDE PARFAIT

§ 30. CLASSIFICATION DES RÉACTIONS HYDRODYNAMIQUES

La réaction $\overline{R}$ agissant du côté du fluide sur le corps solide et le moment $\overline{M}$ se déterminent par les formules générales (I.14) et (I.15). Généralement, ce n'est pas la réaction ou le moment qui importent

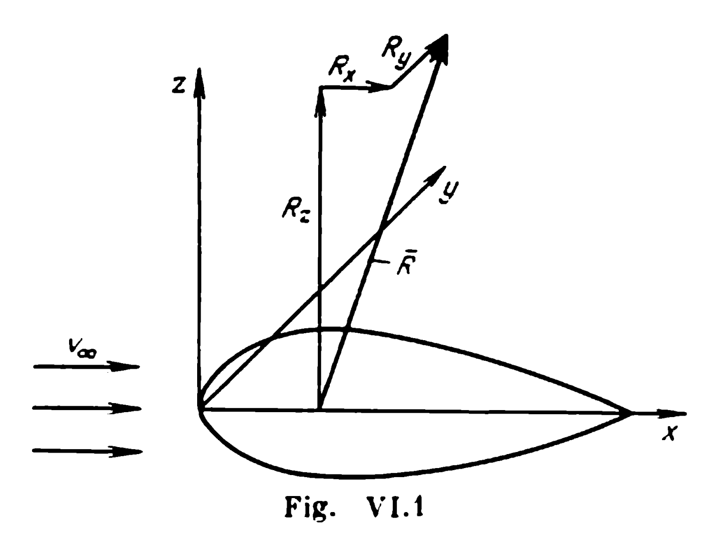


Fig. VI.1

mais leurs composantes sur les axes de coordonnées. Pour leur étude, on emploie le plus souvent les systèmes de coordonnées aérodynamiques et liés.

Dans le système de coordonnées aérodynamiques x, y, z la direction et le sens de l'axe des x coïncident avec ceux du vecteur vitesse du centre de gravité du corps, les deux autres axes étant dirigés de façon à former un système de coordonnées à droite. Dans le cas du mouvement inversé ou de l'écoulement autour d'un corps immobile, le sens positif de l'axe des x est souvent supposé confondu avec le sens de la vitesse du courant v_∞, comme il est montré sur la fig. VI.1. En projetant $\overline{R}$ et $\overline{M}$ sur les axes du système de coordonnées aérodynamiques, nous obtenons

$$\overline{R}=\overline{i}R_x+\overline{j}R_y+\overline{k}R_z; \qquad \text{(VI.1)}$$

$$\overline{M}=\overline{i}M_x+\overline{j}M_y+\overline{k}M_z, \qquad \text{(VI.2)}$$

où R_x est la force de résistance, R_y la force hydrodynamique transversale, R_z la portance, M_x le moment de roulis, M_y le moment de tangage, M_z le moment de lacet.

Le système de coordonnées lié x_1, y_1, z_1 est généralement utilisé pour la résolution des problèmes de la dynamique des corps se déplaçant dans un fluide.

L'origine des coordonnées du système de coordonnées lié est souvent placée au centre de gravité d'un corps. Pour les corps ayant des plans de symétrie, les axes du système de coordonnées lié sont placés à l'intersection de ces plans. Les projections de la réaction hydrodynamique $\overline{R}$ sur les axes du système de coordonnées lié s'appellent : R_{x_1} force longitudinale, R_{y_1} force transversale, R_{z_1} force normale.

Respectivement, les projections du moment $\overline{M}$ dans ce système s'appellent ordinairement : M_{x_1} moment de roulis, M_{y_1} moment de tangage, M_{z_1} moment de lacet.

Pour la détermination des composantes des réactions hydrodynamiques dans un fluide parfait, il faut poser dans les formules (I.14) et (I.15) $\overline{p}_n = -p\overline{n}$

$$\overline{R} = -\oint_S p\overline{n}\,dS\,; \qquad \text{(VI.3)}$$

$$\overline{M} = -\oint_S \overline{r} \times p\overline{n}\,dS. \qquad \text{(VI.4)}$$

§ 31. FORMULES DE S. TCHAPLYGUINE POUR LA DÉTERMINATION DE LA RÉACTION HYDRODYNAMIQUE ET DU MOMENT DE L'ACTION DE L'ÉCOULEMENT PLAN DU FLUIDE SUR LE CONTOUR

Examinons le calcul de la réaction hydrodynamique et du moment dans le cas de l'écoulement autour d'un contour plan par un fluide parfait infini à la vitesse constante v_∞. Dans ce cas les pressions et les vitesses dans l'écoulement sont liées par l'intégrale de Bernoulli (IV.22).

Si l'image des lignes de courant et la distribution des vitesses suivant le corps sont connues, alors, en déterminant d'après (IV.22) la pression $p = C - \frac{\rho v^2}{2}$ et en portant sa valeur dans (VI.3), nous obtenons l'expression de la réaction hydrodynamique sous la forme suivante :

$$\overline{R} = -\oint_S \left(C - \frac{\rho v^2}{2}\right)\overline{n}\,dS. \qquad \text{(VI.5)}$$

S. Tchaplyguine a proposé des moyens efficaces de détermination des réactions hydrodynamiques en écoulement plan autour d'un

corps cylindrique. Considérons l'écoulement autour d'un contour L dans le plan des xy; les axes de coordonnées x, y sont disposés arbitrairement (fig. VI.2).

En tenant compte de ce que pour un problème plan $dS = dl1$, où dl est la différentielle de l'arc du contour et 1 est la dimension unitaire transversale du contour, nous trouvons

$$\overline{R} = \overline{i}X + \overline{j}Y = -\oint_L \left(C - \frac{\rho v^2}{2}\right) \overline{n}\, dl = \oint_L \frac{\rho v^2}{2} \overline{n}\, dl, \qquad \text{(VI.6)}$$

où il est tenu compte de ce que $\oint_L \overline{C}\overline{n}\, dl = 0$; X et Y sont les réactions composantes sur les axes de coordonnées.

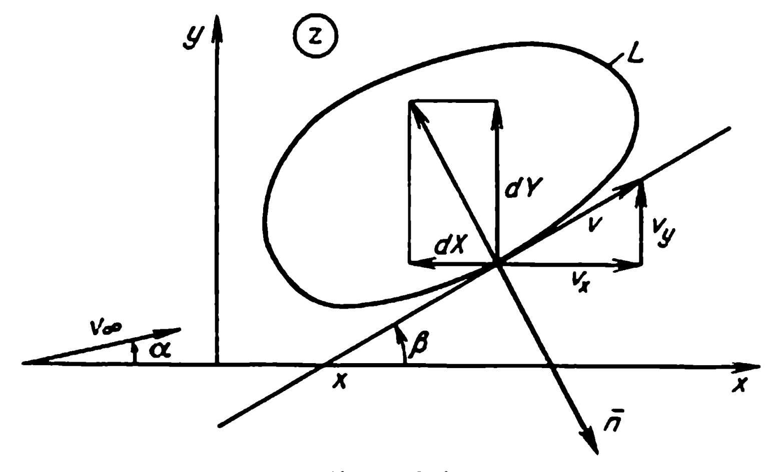


Fig. VI.2

Pour la détermination de $\overline{R}$ suivant cette formule, il est indispensable de connaître la distribution des vitesses suivant le contour. Cependant, on peut transformer (VI.6) de manière à exclure l'intégration assez difficile sur le contour.

Pour cela, au lieu de la réaction hydrodynamique $\overline{R} = \overline{i}X + \overline{j}Y$, il est plus avantageux de considérer une quantité complexe de la forme $X - iY$, qui s'appelle réaction complexe. Elle est composée par analogie avec la vitesse complexe. De plus au lieu des angles formés par les axes x et y avec la normale, il est plus avantageux de passer à l'angle β formé par la tangente au contour avec l'axe des x. En vertu de (VI.6)

$$X = \oint_L \frac{\rho v^2}{2} \cos(n, x)\, dl = \frac{\rho}{2} \oint_L v^2 \sin\beta\, dl;$$

$$Y = \oint_L \frac{\rho v^2}{2} \cos(n, y)\, dl = -\frac{\rho}{2} \oint_L v^2 \cos\beta\, dl.$$

Dans ces expressions, il est tenu compte de ce que $\cos(n, x) = \sin\beta$, $\cos(n, y) = -\cos\beta$.

Ainsi, la réaction complexe $X - iY$ peut être représentée sous forme de l'expression

$$X - iY = \frac{\rho}{2} \oint\limits_L v (\sin\beta + i\cos\beta) v\, dl =$$
$$= \frac{i\rho}{2} \oint\limits_L v (\cos\beta - i\sin\beta) v\, dl, \qquad \text{(VI.7)}$$

qui est valable pour un écoulement plan permanent d'un fluide parfait aussi bien tourbillonnaire qu'irrotationnel.

Supposons que le mouvement du fluide est irrotationnel. La fonction caractéristique de l'écoulement plan est dans ce cas

$$w = \varphi + i\psi,$$

où φ est le potentiel de la vitesse, ψ la fonction du courant.

Sur le contour L qui est une ligne de courant, $\psi = C$, $d\psi = 0$, ce qui nous permet d'obtenir pour les points du contour

$$dw = d\varphi + i\, d\psi = d\varphi.$$

La différentielle de la fonction φ, dépendant des directions de la normale n et de la tangente l, est

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} dn + \frac{\partial\varphi}{\partial l} dl = v_n\, dn + v_l\, dl = v\, dl,$$

où v_l est la projection de la vitesse sur la tangente au contour, égale à la vitesse totale v, et v_n est la projection de la vitesse sur la normale au contour, qui d'après la condition aux limites de l'imperméabilité est égale à zéro. En vertu de ce fait, en utilisant l'expression $d\varphi = dw$, nous obtenons pour les points du contour

$$d\varphi = v\, dl = dw.$$

Puisque, comme on le voit sur la fig. VI.2, $v\cos\beta = v_x$, $v\sin\beta = v_y$, on trouve d'après l'expression pour la vitesse complexe

$$v(\cos\beta - i\sin\beta) = v_x - iv_y = \frac{dw}{dz}.$$

En tenant compte des transformations effectuées, nous obtenons

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint\limits_L \frac{dw}{dz}\, dw = \frac{i\rho}{2} \oint\limits_L \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz. \qquad \text{(VI.8)}$$

Cette expression représente la première formule de Tchaplyguine pour la détermination des projections de la réaction hydrodynamique exercée par le fluide sur le contour. Elle ne comprend pas la poussée d'Archimède que l'on doit calculer séparément et ajouter à la réaction hydrodynamique.

Trouvons l'expression du moment M par rapport à l'origine des coordonnées. De la fig. VI.2, il suit que le moment élémentaire

$$dM = x\,dY - y\,dX.$$

Suivant (VI.8)

$$dX - i\,dY = \frac{i\rho}{2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz.$$

Examinons le produit de deux quantités complexes

$$iz\,(dX - i\,dY) = i\,(x + iy)\,(dX - i\,dY) =$$
$$= (x\,dY - y\,dX) + i\,(x\,dX + y\,dY).$$

D'après la comparaison de ces dernières formules, on voit que le

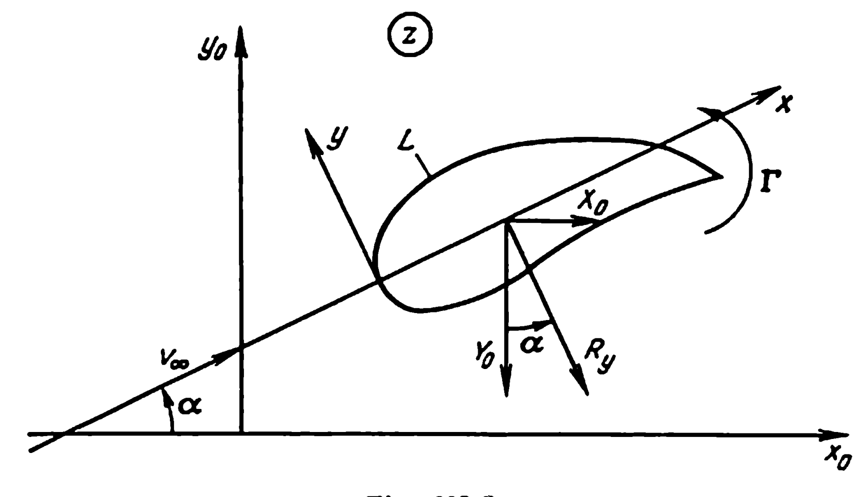


Fig. VI.3

moment élémentaire représente la partie réelle de cette expression complexe

$$dM = \mathrm{Reel}\,[iz\,(dX - i\,dY)] = \mathrm{Reel}\left[-\frac{\rho}{2} z \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\right].$$

Ici le symbole Reel désigne la partie réelle de l'expression complexe. En intégrant suivant le contour, nous obtenons l'expression du moment hydrodynamique

$$M = -\frac{\rho}{2}\,\mathrm{Reel} \oint_L z \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz, \qquad \text{(VI.9)}$$

représentant la seconde formule de Tchaplyguine pour la détermination du moment des forces de pression du fluide sur un contour.

L'utilisation des formules de Tchaplyguine impose la connaissance de la vitesse complexe. Les intégrales des expressions complexes (VI.8) et (VI.9) peuvent être calculées en faisant appel à la théorie des résidus. Remarquons que d'après la théorie des

fonctions de la variable complexe au lieu du contour du profil L on peut prendre un contour quelconque L_1 entourant le profil. Le domaine compris entre les contours L et L_1 ne doit pas comporter de points singuliers qui lors des calculs donnent des résidus.

A titre d'exemple, examinons l'application des formules de Tchaplyguine au cas d'un écoulement irrotationnel de fluide autour d'un contour à la vitesse à l'infini v_∞ (fig. VI.3). Désignons la circulation de la vitesse le long du contour par Γ. La vitesse complexe $\frac{dw}{dz}$, comme une fonction analytique en dehors du contour, peut être développée en série de Laurent

$$\frac{dw}{dz} = \ldots Bz + A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots$$

Le fait que la vitesse est finie au loin du contour entraîne l'absence dans le développement des termes contenant des puissances positives de z. En effet, pour $z = \infty$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_\infty = (v_x - iv_y)_\infty = v_\infty \cos\alpha - iv_\infty \sin\alpha = v_\infty e^{-i\alpha} = A_0, \qquad \text{(VI.10)}$$

c'est-à-dire que la vitesse complexe est bornée. Donc, le développement de la vitesse complexe en série de Laurent sera

$$\frac{dw}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots \qquad \text{(VI.11)}$$

Si l'on ajoute à l'expression de la circulation (V.6) le terme $i\oint\limits_L d\psi$ identiquement nul, elle prend la forme

$$\Gamma = \oint\limits_L d\varphi + i\, d\psi = \oint\limits_L dw = \oint\limits_L \frac{dw}{dz}\, dz. \qquad \text{(VI.12)}$$

En substituant dans (VI.12) la formule (VI.11) et en utilisant le théorème des résidus suivant lequel

$$\oint\limits_L \frac{dz}{z^n} = 0 \quad \text{avec} \quad n > 1 \quad \text{et} \quad \oint\limits_L \frac{dz}{z} = 2\pi i, \qquad \text{(VI.13)}$$

nous obtenons

$$A_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}. \qquad \text{(VI.14)}$$

Les autres coefficients du développement en série de la vitesse complexe se déterminent par la géométrie du contour.

Trouvons la réaction complexe $X - iY$; pour cela portons le développement (VI.11) dans la première formule de Tchaplyguine

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint\limits_L \left(A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots\right)^2 dz =$$

$$= \frac{i\rho}{2} \oint\limits_L \left(\ldots + \frac{2A_0A_1}{z} + \ldots\right) dz.$$

Dans l'expression de $\left(\frac{dw}{dr}\right)^2$ il ne reste que le terme en z^{-1} étant donné que tous ses autres termes suivant (VI.13) s'annulent au cours de l'intégration.

Suivant le théorème des résidus, en remplaçant A_0 et A_1 par leurs valeurs, nous obtenons

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} 2\pi i \,(2A_0A_1) = i\rho\Gamma v_\infty e^{-i\alpha}, \qquad \text{(VI.15)}$$

d'où

$$X = \rho v_\infty \Gamma \sin \alpha, \qquad Y = -\rho v_\infty \Gamma \cos \alpha. \qquad \text{(VI.16)}$$

La réaction hydrodynamique $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ se détermine par l'expression

$$R = \rho v_\infty \Gamma 1. \qquad \text{(VI.17)}$$

D'après la fig. VI.3 on voit que la réaction hydrodynamique R forme un angle de 90° avec la direction de la vitesse v_∞. En introduisant le système de coordonnées aérodynamiques x, y, nous voyons que dans le cas donné sur le contour agit seulement la portance R_y. La force de résistance R_x est égale à zéro.

Ainsi,

$$|R_y| = \rho v_\infty \Gamma 1 ; \qquad R_x = 0, \qquad \text{(VI.18)}$$

R_y étant calculé ici pour l'unité d'envergure transversale du profil.

La formule (VI.18) représente l'expression mathématique du théorème de Joukowski sur la portance du contour qui s'énonce ainsi : la portance apparaissant sur le contour est directement proportionnelle à la masse volumique du fluide, à la vitesse à l'infini v_∞ et à la circulation. On peut déterminer la direction de la portance si l'on fait tourner le vecteur vitesse du courant arrivant de 90° par rapport à la direction de la circulation. Remarquons que pour utiliser ce théorème, il est indispensable de connaître la valeur de la circulation Γ le long du contour. Les moyens de sa détermination sont exposés dans le chapitre XII.

Déterminons le moment des forces de pression de l'écoulement du fluide sur le contour en utilisant la seconde formule de Tchaplyguine (VI.9). En y portant (VI.11) et en tenant compte de (VI.13), nous obtenons

$$M = -\frac{\rho}{2} \text{Reel} \oint_L z \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz =$$

$$= -\frac{\rho}{2} \text{Reel} \oint_L \left(\ldots \frac{A_1^2 + 2A_0A_2}{z} + \ldots\right) dz =$$

$$= -\pi\rho \operatorname{Reel} i (A_1^2 + 2A_0A_2) = -\pi\rho \operatorname{Reel} \left[-i \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + i2v_\infty e^{-i\alpha} A_2 \right] = -2\pi\rho \operatorname{Reel} (iv_\infty e^{-i\alpha} A_2). \qquad \text{(VI.19)}$$

Des formules (VI.18) et (VI.19) il suit que pour la détermination des forces et du moment, il suffit de connaître seulement les trois premiers coefficients A_0, A_1, A_2 du développement de la vitesse complexe en série de Laurent ; les autres coefficients influent seulement sur le caractère de la distribution des vitesses le long du contour.

S. Tchaplyguine a généralisé les formules de la réaction hydrodynamique et du moment au cas d'un mouvement non stationnaire du contour. Des formules analogues sous une forme quelque peu différente ont été données par L. Sédov [20]. Remarquons que les formules de Tchaplyguine peuvent être employées également dans le cas où l'écoulement est délimité (par les parois solides ou par la surface libre). La vitesse complexe doit être déterminée en tenant compte de l'influence des frontières de l'écoulement.

Déterminons la réaction du fluide se mouvant avec la vitesse v_∞ dans la direction de l'axe positif des x, sur une source plane immobile de débit Q.

La fonction caractéristique de cet écoulement complexe est, suivant les déductions faites au § 21,

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln z + v_\infty z,$$

d'où nous trouvons la vitesse complexe

$$\frac{dw}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z} + v_\infty.$$

En utilisant la première formule de Tchaplyguine et en y portant $\frac{dw}{dz}$, nous obtenons

$$X - iY = -\rho v_\infty Q.$$

En comparant les parties réelles et imaginaires de cette dernière expression, nous trouvons

$$X = -\rho v_\infty Q ; \quad Y = 0, \qquad \text{(VI.20)}$$

d'où l'on voit que la source qui se trouve dans l'écoulement en mouvement subit une force de traction. Dans le cas d'un puits (Q est remplacé par $-Q$) contourné par un courant de translation, il apparaît une force de résistance $X = \rho v_\infty Q$.

Les relations obtenues ci-dessus pour une force agissant sur une source (puits) représentent un cas particulier des formules de Lagally, qui permettent de calculer les réactions s'exerçant sur le corps du côté du fluide, si on les remplace par un système de

singularités hydrodynamiques (sources, dipôles, etc.). Lorsqu'on remplace un corps (aussi bien plan que tridimensionnel) par un système de sources-puits, on peut déterminer les réactions hydrodynamiques d'après les formules proposées par M. Krein et A. Kostukov [12]. Leur emploi est surtout efficace dans le cas du mouvement des corps au voisinage des frontières de l'écoulement.

§ 32. RÉACTIONS HYDRODYNAMIQUES S'EXERÇANT SUR LES CORPS EN MOUVEMENT NON STATIONNAIRE DU FLUIDE. NOTION DES MASSES VIRTUELLES

Lorsqu'un corps se déplace à la vitesse $\overline{v}_{0t}$ variable dans le temps aussi bien en valeur qu'en direction, l'écoulement du fluide qu'il engendre est non stationnaire. Le champ de la vitesse v est une fonction des coordonnées et du temps $\overline{v} = \overline{v}\,(x,\ y,\ z,\ t)$. Dans ce cas l'inversion du mouvement ne simplifie pas le problème étant donné que les accélérations et, par conséquent, les forces s'exerçant dans le fluide en mouvement absolu et inversé sont différentes. Compte tenu de ce fait, les problèmes liés à un mouvement non stationnaire des corps dans un fluide sont examinés dans le système de coordonnées qui se déplace avec le corps. Ici et plus loin, on supprime l'indice « 1 » dans la notation de ces coordonnées. En mouvement non stationnaire du fluide, la pression p dépendra également du temps.

Examinons le cas le plus simple du mouvement rectiligne d'un corps solide avec une vitesse variable dans le temps. Nous considérons que la direction et le sens du mouvement coïncident avec ceux de l'axe des x; la vitesse en un point quelconque du fluide $\overline{v} = \overline{v}\,(x, y, z, t)$ et loin du corps le fluide est au repos $\overline{v} \rightarrow 0$. Calculons l'énergie cinétique du fluide due au mouvement du corps. En isolant un volume élémentaire de fluide dV de masse $\rho\,dV$, déterminons son énergie cinétique

$$dT_{\text{fl}} = \rho\,dV\,\frac{v^2}{2}.$$

L'énergie cinétique d'un volume illimité de fluide V_∞, extérieur par rapport au corps, sera obtenue par intégration

$$T_{\text{fl}} = \int\limits_{V_\infty} \frac{\rho v^2}{2}\,dV. \tag{VI.21}$$

Suivant les considérations physiques, l'intégrale impropre (VI.21) étendue au volume extérieur infini est finie. En effet, un corps de dimensions finies au cours d'un temps fini de son mouvement ne peut communiquer à un fluide qu'une énergie cinétique finie.

Transformons l'expression (VI.21) en multipliant et en divisant son deuxième membre par v_0^2

$$T_{fl} = \frac{v_0^2}{2}\left[\rho \int\limits_{V_\infty} \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 dV\right]. \tag{VI.22}$$

La grandeur entre crochets possède une dimension de la masse. Désignons cette grandeur par

$$\lambda = \rho \int\limits_{V_\infty} \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 dV \tag{VI.23}$$

et appellons-la masse virtuelle correspondant au mouvement d'un corps dans la direction donnée.

En tenant compte de (VI.23), on peut écrire

$$T_{fl} = \frac{\lambda v_0^2}{2}, \tag{VI.24}$$

d'où il suit la définition suivante: on appelle masse virtuelle une masse fictive de fluide telle que son énergie cinétique au cours de son mouvement à la vitesse du corps est égale à l'énergie cinétique du fluide qui entoure ce corps. La masse virtuelle dépend de la forme du corps et de la direction de son mouvement, ce qui la distingue sensiblement de la masse ordinaire.

Désignons par R_{xl} la projection sur l'axe des x de la force d'action qui fluide sur le corps. D'après la 3-ième loi de Newton, la force que s'exercera sur le fluide du côté du corps sera $-R_{xl}$. Pour sa détermination appliquons à ce fluide la loi de variation de l'énergie cinétique: la variation de l'énergie cinétique du système pendant un intervalle de temps dt est égale au travail des forces appliquées à ce système. En désignant par $dx = v_0 dt$ le déplacement du corps pendant le temps dt et en tenant compte de ce que lors du déplacement d'un corps le travail est dépensé pour la variation de l'énergie cinétique du fluide, nous aurons

$$dT_{fl} = -R_{xl}\,dx = -R_{xl} v_0\,dt,$$

d'où

$$R_{xl} = -\frac{1}{v_0}\frac{dT_{fl}}{dt} = -\frac{1}{v_0}\frac{d}{dt}\left(\lambda\frac{v_0^2}{2}\right) = -\lambda\frac{dv_0}{dt}, \tag{VI.25}$$

où il est admis que $d\lambda/dt = 0$, c'est-à-dire la masse virtuelle ne dépend pas du temps.

De l'expression (VI.25) il suit que la force d'action du côté du fluide sur le corps en mouvement accéléré est numériquement égale à la masse virtuelle multipliée par l'accélération du corps. Cette force est proportionnelle à l'accélération et suivant la terminologie connue de la mécanique générale s'appelle force d'inertie.

Dans le cas du mouvement rectiligne d'un corps à une vitesse constante $dv_0/dt = 0$, la force hydrodynamique d'inertie n'existe pas. Etant donné que $\lambda > 0$, le signe de la force d'inertie se détermine par le signe de l'accélération. Si l'accélération est positive, R_{x1} est négative, c'est-à-dire qu'elle joue le rôle d'une force de résistance.

Tous les raisonnements énoncés ci-dessus s'étendent également au cas du mouvement d'un corps dans un fluide visqueux. Cependant dans ce cas, les valeurs de R_{x1} et λ doivent être déterminées compte tenu de l'influence de la viscosité.

Elucidons l'origine du terme «masse virtuelle». Composons l'équation du mouvement d'un corps dans un fluide réel pour le cas du mouvement de translation d'un corps. En sus des notations admises, introduisons encore les suivantes: m masse du corps, P_e force motrice (force exercée sur le fluide par l'hélice, etc.).

Suivant la deuxième loi de Newton, l'équation du mouvement d'un corps dans un fluide prendra la forme

$$m\frac{dv_0}{dt} = P_e - R_x + R_{x1} = P_e - R_x - \lambda\frac{dv_0}{dt}, \qquad \text{(VI.26)}$$

où $R_{x1} = -\lambda\frac{dv_0}{dt}$ est la force agissant sur le corps. En transposant le terme $-\lambda\, dv_0/dt$ dans le premier membre, nous obtenons l'équation du mouvement

$$(m+\lambda)\frac{dv_0}{dt} = P_e - R_x, \qquad \text{(VI.27)}$$

qui peut être interprétée comme si l'influence exercée par le fluide sur le corps en mouvement accéléré conduisait à une augmentation de la masse du corps m de la grandeur λ. Pour cette raison, la grandeur λ s'appelle masse virtuelle. Remarquons qu'une telle interprétation n'est admissible que dans le cas des mouvements simples.

Dans des cas tels que le mouvement d'un corps déformable, le mouvement d'un corps s'accompagnant d'un changement brusque de forme du volume immergé, les masses virtuelles peuvent dépendre du temps. Alors suivant (VI.25) nous obtenons l'expression

$$R_{x1} = -\lambda\frac{dv_0}{dt} - \frac{v_0}{2}\frac{d\lambda}{dt}, \qquad \text{(VI.28)}$$

d'où il suit que dans le cas donné la force d'inertie est constituée par deux composantes. L'une est proportionnelle à la vitesse du mouvement, l'autre à l'accélération. La composante proportionnelle à la vitesse peut être représentée sous la forme d'une fonction quadratique de v_0

$$\frac{v_0}{2}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{v_0}{2}\frac{d\lambda}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\lambda}{dx}\frac{v_0^2}{2},$$

où x est le déplacement du corps.

§ 33. ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN FLUIDE

Trouvons l'expression de l'énergie cinétique d'un fluide infini dans le cas général du mouvement d'un corps. Considérons le corps limité par la surface S (fig. VI.4). Lions à ce corps un système de coordonnées x, y, z situant l'origine au pôle O, en comptant qu'à

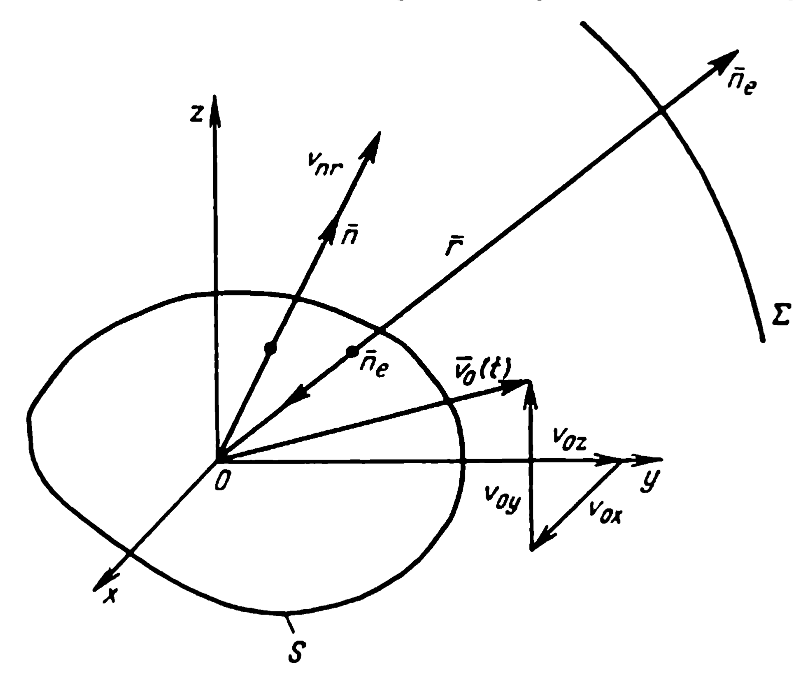


Fig. VI.4

l'instant considéré ce système coïncide avec le système de coordonnées fixes dans l'espace x_f, y_f, z_f. Traçons une surface sphérique Σ de grand rayon $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ de centre à l'origine des coordonnées. En faisant tendre ensuite le rayon de la sphère vers l'infini $r \to \infty$, nous obtenons le cas d'un fluide illimité. Désignons la vitesse de fluide provoquée en un point quelconque entre les surfaces S et Σ par $\bar{v} = \bar{v}(x, y, z, t)$. A l'infini le fluide est au repos, c'est-à-dire $\bar{v} \to 0$. L'énergie cinétique du volume V_∞ de fluide, compris entre les surfaces $S + \Sigma$, sera

$$T_{fl} = \int\limits_{V_\infty} \rho \frac{v^2}{2} dV = \int\limits_{V_\infty} \rho \frac{\bar{v}\cdot\bar{v}}{2} dV.$$

Le calcul de cette expression est très difficile dans le cas général, car pour cela on doit connaître les vitesses dans tout le volume en dehors du corps.

Supposons que le mouvement engendré du fluide est irrotationnel avec un potentiel de vitesse univoque φ. Alors $v = \operatorname{grad} \varphi$. A l'infini en dehors du corps $\operatorname{grad} \varphi \to 0$, car le mouvement de

fluide engendré ne doit pas avoir lieu. Sans restreindre la généralité, on peut poser $\varphi = 0$ pour $r = \infty$. Alors nous obtenons l'expression suivante:

$$T_{fl} = \frac{\rho}{2} \int\limits_{V_\infty} |\operatorname{grad} \varphi|^2 dV = \frac{\rho}{2} \int\limits_{V_\infty} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dV. \qquad \text{(VI.29)}$$

Effectuons la transformation analogue des termes figurant dans l'expression sous le signe de l'intégrale

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2};$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2};$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

En additionnant ces expressions membre à membre, nous obtenons

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] - \varphi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right).$$

Etant donné que le potentiel de la vitesse vérifie l'équation de Laplace, le dernier terme du deuxième membre de l'égalité donnée s'annule et l'expression de l'énergie cinétique du fluide prend la forme

$$T_{fl} = \frac{\rho}{2} \int\limits_{V_\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] dV.$$

Utilisons la formule de Gauss-Ostrogradski pour transformer l'intégrale de volume en intégrale de surface en désignant par $\bar{n}_e$ la normale extérieure aux surfaces $S + \Sigma$

$$T_{fl} = \frac{\rho}{2} \oint\limits_{S+\Sigma} \left[\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n_e, x) + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n_e, y) + \right.$$

$$\left. + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(n_e, z) \right] dS = \frac{\rho}{2} \oint\limits_{S} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_e} dS + \frac{\rho}{2} \oint\limits_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_e} dS, \qquad \text{(VI.30)}$$

où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_e} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n_e, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n_e, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(n_e, z).$$

Pour évaluer l'intégrale suivant la surface de la sphère de grand rayon r, représentons le potentiel φ loin du corps sous la forme d'une série en puissances de r.

Si l'on part du fait que loin du corps $\varphi \to 0$, la seule forme possible de représentation de φ sera une série de la forme suivante

$$\varphi = \frac{A_1}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{r^n},$$

où A_1 et A_n sont les coefficients ne dépendant pas de r.

Calculons $\partial\varphi/\partial n_e$ sur la surface de la sphère Σ en tenant compte de ce que les directions de la normale n_e et du rayon r coïncident

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_e} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{A_1}{r^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nA_n}{r^{n+1}}.$$

Montrons que le coefficient A_1 dans le développement de φ doit être nul. En tenant compte de ce que le débit du fluide à travers la surface Σ suivant l'équation de continuité est nul, écrivons

$$Q = \oint_{\Sigma} v_{ne}\, dS = \oint_{\Sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial n_e}\, dS = -\oint_{\Sigma} \frac{A_1}{r^2}\, dS - \oint_{\Sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nA_n}{r^{n+1}}\, dS = 0.$$

En prenant l'élément de surface $dS = r^2 d\Omega$, où Ω est l'angle solide, nous obtenons

$$Q = -\oint_{\Sigma} \frac{A_1}{r^2} r^2\, d\Omega - \oint_{\Sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nA_n}{r^{n+1}} r^2\, d\Omega = 0.$$

Etant donné que A_1 et A_n ne dépendent pas du rayon et que la dernière égalité reste valable également pour la limite $r \to \infty$, alors

$$Q = -4\pi A_1 = 0, \text{ c.-à-d. } A_1 = 0.$$

Ainsi, les développements en série de puissances de r du potentiel et de sa dérivée suivant la normale, qui correspondent aux conditions physiques d'écoulement, seront

$$\varphi = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{r^n}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{nA_n}{r^{n+1}}, \qquad \text{(VI.31)}$$

d'où il suit que le potentiel φ diminue comme le carré de la distance au corps, source de perturbations, et $\partial\varphi/\partial n$, comme le cube.

En introduisant (VI.31) dans la seconde intégrale de (VI.30) et en élargissant la sphère Σ jusqu'à l'infini $r \to \infty$, ce qui correspond au cas du mouvement d'un corps dans un fluide illimité, nous voyons que l'intégrale sur la surface de la sphère s'annule

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\rho}{2} \oint_{\Sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{r^n} \sum_{k=2}^{\infty} -\frac{kA_k}{r^{k+1}} r^2\, d\Omega = 0.$$

En partant de ce fait on peut représenter l'expression de l'énergie cinétique du fluide en écoulement irrotationnel sous la forme d'une intégrale sur la surface, étendue seulement à la surface du corps S,

$$T_{fl} = \frac{\rho}{2} \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_c} dS. \qquad \text{(VI.32)}$$

Dans les problèmes liés au mouvement d'un corps, on utilise ordinairement la normale $\bar{n}$ extérieure à celui-ci.

D'après la fig. VI.4 on voit que les sens de $\bar{n}_c$ et $\bar{n}$ sont contraires. En introduisant dans (VI.32) $\bar{n} = -\bar{n}_c$, nous obtenons l'expression suivante :

$$T_{fl} = -\frac{\rho}{2} \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \qquad \text{(VI.33)}$$

représentant la formule générale pour le calcul de l'énergie cinétique d'un fluide en écoulement irrotationnel.

§ 34. CAS GÉNÉRAL DU MOUVEMENT D'UN CORPS DANS UN FLUIDE PARFAIT. MASSES VIRTUELLES GÉNÉRALISÉES

Trouvons l'expression du potentiel des vitesses induites φ. La fonction φ doit satisfaire à l'équation de Laplace. A l'infini, en dehors du corps, suivant ce qui a été démontré ci-dessus $\varphi \to 0$. Sur la surface du corps doit se remplir la condition aux limites d'imperméabilité

$$v_{nc} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S,$$

où v_{nc} est la vitesse normale d'un point de la surface du corps, et $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ la vitesse normale de la particule fluide contiguë au corps. Représentons v_{nc} sous une forme développée. Soient $\bar{v}_0 = \bar{i}v_{0x} + \bar{j}v_{0y} + \bar{k}v_{0z}$ la vitesse de translation du pôle et $\bar{\omega} = \bar{i}\omega_x + \bar{j}\omega_y + \bar{k}\omega_z$ la vitesse de rotation du corps par rapport à l'axe instantané passant par le pôle. Les grandeurs $\bar{v}_0$ et $\bar{\omega}$ dépendent explicitement du temps.

La vitesse d'un point quelconque du corps est

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r},$$

où $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$ est le rayon vecteur de ce point.

La composante normale de la vitesse d'un point de la surface du corps

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = v_{nc} = \bar{v} \cdot \bar{n} = \bar{v}_0 \cdot \bar{n} + (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot \bar{n} =$$
$$= v_{0x} \cos(n, x) + v_{0y} \cos(n, y) + v_{0z} \cos(n, z) +$$
$$+ (\omega_y z - \omega_z y) \cos(n, x) + (\omega_z x - \omega_x z) \cos(n, y) +$$
$$+ (\omega_x y - \omega_y x) \cos(n, z).$$

Après le regroupement des termes contenant les vitesses angulaires, nous obtenons

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = v_{nc} = v_{0x}\cos(n,\ x) + v_{0y}\cos(n,\ y) + v_{0z}\cos(n,\ z) +$$
$$+ \omega_x[y\cos(n,\ z) - z\cos(n,\ y)] + \omega_y[z\cos(n,\ x) - x\cos(n,\ z)] +$$
$$+ \omega_z[x\cos(n,\ y) - y\cos(n,\ x)]. \qquad \text{(VI.34)}$$

Les coordonnées x, y et z et les cosinus directeurs dans le système de coordonnées lié au corps ne dépendent pas du temps. Seules les projections des vitesses de translation et angulaires du corps ($v_{0x}, \ldots, \omega_x$) sont fonction du temps.

La condition aux limites sur la surface du corps sous la forme d'une somme de six termes (VI.34) et la linéarité de l'équation de Laplace permettent de chercher l'expression générale pour le potentiel également sous la forme de six termes

$$\varphi = v_{0x}\varphi_1 + v_{0y}\varphi_2 + v_{0z}\varphi_3 + \omega_x\varphi_4 + \omega_y\varphi_5 + \omega_z\varphi_6, \qquad \text{(VI.35)}$$

où φ_i sont les potentiels unitaires satisfaisant à l'équation de Laplace $\Delta\varphi_i = 0$ et aux conditions à l'infini $\varphi_i \to 0$.

En différentiant φ suivant la normale, nous obtenons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = v_{0x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} + v_{0y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} + v_{0z}\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} +$$
$$+ \omega_x\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} + \omega_y\frac{\partial\varphi_5}{\partial n} + \omega_z\frac{\partial\varphi_6}{\partial n}. \qquad \text{(VI.36)}$$

La comparaison de cette expression avec (VI.34) montre que les potentiels unitaires doivent satisfaire sur la surface du corps aux conditions aux limites

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \cos(n,\ x); \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \cos(n,\ y); \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \cos(n,\ z);\\
&\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = y\cos(n,\ z) - z\cos(n,\ y);\\
&\frac{\partial\varphi_5}{\partial n} = z\cos(n,\ x) - x\cos(n,\ z);\\
&\frac{\partial\varphi_6}{\partial n} = x\cos(n,\ y) - y\cos(n,\ x).
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.37)}$$

Les seconds membres des égalités (VI.37) ne dépendent pas du temps, d'où il suit que les potentiels unitaires φ_i dans le système de coordonnées lié au corps dépendent seulement des coordonnées. Dans l'expression de φ les projections de la vitesse sont les fonctions du temps ne dépendant pas des coordonnées. Pour simplifier les calculs ultérieurs, il est rationnel de changer les notations en

introduisant les vitesses généralisées

$$v_1 = v_{0x}; \quad v_2 = v_{0y}; \quad v_3 = v_{0z}; \quad v_4 = \omega_x; \quad v_5 = \omega_y; \quad v_6 = \omega_z. \qquad \text{(VI.38)}$$

Alors l'expression du potentiel φ sera

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{6} v_i(t)\,\varphi_i(x, y, z,) = \sum_{i=1}^{6} v_i\varphi_i. \qquad \text{(VI.39)}$$

On en déduit que le potentiel φ doit être présenté sous la forme d'une somme des produits des vitesses généralisées par les potentiels unitaires pour mettre explicitement en évidence les termes dépendant seulement du temps $v_i(t)$ et seulement des coordonnées $\varphi_i(x, y, z)$, ainsi que pour ramener le problème du mouvement général d'un corps à un certain nombre de problèmes plus simples. Etablissons les dimensions des potentiels unitaires. Etant donné que $[\varphi] = L^2T^{-1}$, $[v] = LT^{-1}$ et $[\omega] = T^{-1}$, on établit en comparant les dimensions des deux membres de (VI.35) que

$$[\varphi_i]_{i=1,2,3} = L; \quad [\varphi_i]_{i=4,5,6} = L^2. \qquad \text{(VI.40)}$$

En supposant par exemple que le corps se meuve sans rotation suivant l'axe des x ($v_{0y} = v_{0z} = \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$), nous trouvons d'après (VI.35) que

$$\varphi = v_{0x}\varphi_1. \qquad \text{(VI.41)}$$

Il en résulte que φ_1 caractérise la perturbation du fluide provoquée par le mouvement du corps seulement suivant l'axe des x. De façon analogue, le potentiel unitaire φ_4 caractérise la perturbation du corps due à la rotation du corps par rapport à l'axe des x.

Comme il suit de l'expression (VI.41), pour trouver le potentiel unitaire, il faut dans l'expression du potentiel de la vitesse séparer le facteur multipliant la vitesse du corps.

Passons à l'expression de l'énergie cinétique du fluide. En prenant φ sous la forme (VI.39), en déterminant $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \sum_{k=1}^{6} v_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial n}$ et en portant ces valeurs dans (VI.33), nous aurons

$$T_{fl} = -\frac{\rho}{2} \oint_S \sum_{i=1}^{6} v_i\varphi_i \sum_{k=1}^{6} v_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\, dS =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} \sum_{k=1}^{6} v_i v_k \left(-\rho \oint_S \varphi_i \frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\, dS \right). \qquad \text{(VI.42)}$$

Dans cette formule v_i sont sorties de sous le signe de l'intégrale comme ne dépendant pas des coordonnées, et de plus, l'ordre des opérations de sommation et d'intégration est changé.

En introduisant les notations

$$\lambda_{ik} = -\rho \oint\limits_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS, \qquad \text{(VI.43)}$$

écrivons l'expression de T_{f1} sous la forme

$$T_{f1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} \sum_{k=1}^{6} v_i v_k \lambda_{ik}. \qquad \text{(VI.44)}$$

La formule (VI.44) est analogue à la relation de l'énergie cinétique d'un corps solide connue de la mécanique générale et respectivement les grandeurs λ_{ik} s'appellent masses virtuelles généralisées.

Etant donné que φ_i sont fonctions seulement des coordonnées, les masses virtuelles généralisées suivant (VI.43) ne dépendent pas du temps.

En vertu de (VI.44), on peut conclure qu'en mouvement arbitraire d'un corps l'énergie cinétique du fluide se détermine par une tmatrice contenant 36 éléments

$$\begin{Vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & \lambda_{15} & \lambda_{16} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} & \lambda_{25} & \lambda_{26} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \lambda_{34} & \lambda_{35} & \lambda_{36} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44} & \lambda_{45} & \lambda_{46} \\ \lambda_{51} & \lambda_{52} & \lambda_{53} & \lambda_{54} & \lambda_{55} & \lambda_{56} \\ \lambda_{61} & \lambda_{62} & \lambda_{63} & \lambda_{64} & \lambda_{65} & \lambda_{66} \end{Vmatrix}. \qquad \text{(VI.45)}$$

Montrons que dans le cas d'un fluide illimité la matrice de l'énergie cinétique est symétrique par rapport à la diagonale principale

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki}. \qquad \text{(VI.46)}$$

Pour cela il suffit de montrer que

$$\oint\limits_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS = \oint\limits_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS.$$

Utilisons la seconde formule de Green, connue en mathématiques, appliquée au domaine V_∞ entre les surfaces $S + \Sigma$ (fig. VI.4),

$$\int\limits_{V_\infty} (\varphi_i \Delta \varphi_k - \varphi_k \Delta \varphi_i) dV = \oint\limits_{S+\Sigma} \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n_e} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n_e} \right) dS.$$

Etant donné que les potentiels unitaires φ_i et φ_k satisfont à l'équation de Laplace $\Delta\varphi_i = 0$, le premier membre de cette égalité s'annule.

En faisant tendre la surface Σ vers l'infini, on peut démontrer que dans le deuxième membre l'intégrale sur Σ s'annule et l'expres-

sion prend la forme

$$\oint\limits_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n_e} dS = \oint\limits_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS.$$

En remplaçant ici $\bar{n}_e$ par $-\bar{n}$ on arrive à la propriété de symétrie de la matrice des masses virtuelles. Ainsi, l'égalité (VI.46) est démontrée et donc le nombre de masses virtuelles généralisées dans la matrice (VI.45) se réduit à 21.

Déterminons les dimensions des masses virtuelles généralisées λ à indices 1, 2, 3. Etant donné que $[\varphi_i] = L$, $[\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}] = 1$ et $\left[\oint\limits_S \varphi_i \times \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS\right] = L^3$, la dimension de la masse virtuelle est $[\lambda_{ik}]_{i,\ k=1,2,3} = [\rho]\ [L^3]$.

L^3 ayant la dimension du volume, λ_{ik} a les dimensions de la masse. Remarquons que pour $i = k$, les valeurs des masses virtuelles λ_{11}, λ_{22} et λ_{33} suivant les axes correspondants sont toujours positives.

Si $i = 1, 2, 3$, $k = 4, 5, 6$, alors $[\varphi_i] = L$, $[\varphi_k] = L^2$. De façon analogue au cas précédent, nous déterminons que $[\lambda_{ik}] = [\rho]\ [L^3]\ L$. Dans ce cas les λ_{ik} ont les dimensions du moment statique.

Si $i, k = 4, 5, 6$, $[\varphi_i] = L^2$, alors $[\lambda_{ik}] = [\rho]\ [L^3]\ L^2$, c'est-à-dire ces grandeurs sont homologues aux moments d'inertie. Pour $i = k$, les grandeurs λ_{44}, λ_{55}, λ_{66} représentant les moments d'inertie virtuels par rapport aux axes centraux sont positives; les signes de λ_{ik} pour $i \neq k$ peuvent être différents suivant la forme du corps.

Dans les calculs pratiques, on emploie généralement les coefficients sans dimensions suivants des masses virtuelles μ_{ik}:

a) pour λ_{ik} ayant les dimensions de masse (i, $k = 1, 2, 3$)

$$\mu_{ik} = \frac{\lambda_{ik}}{\rho V_c}. \qquad \text{(VI.47)}$$

où ρV_c est la masse de fluide déplacée par le corps;

b) pour λ_{ik} ayant les dimensions du moment statique ($i = 1, 2, 3$; $k = 4, 5, 6$)

$$\mu_{ik} = \frac{\lambda_{ik}}{\rho V_c L_1}, \qquad \text{(VI.48)}$$

où L_1 est la dimension linéaire caractéristique;

c) pour λ_{ik} ayant les dimensions du moment d'inertie (i, $k = 4, 5, 6$)

$$\mu_{ik} = \frac{\lambda_{ik}}{\rho V_c L_2^2}, \qquad \text{(VI.49)}$$

où L_2 est la dimension linéaire caractéristique.

En cas des moments d'inertie virtuels à indices identiques ($i = k$), on entend généralement par L_2 le rayon d'inertie des masses de fluide déplacées par le corps.

On peut montrer que pour un corps à un plan de symétrie le nombre de masses virtuelles généralisées se réduit à 12. Ainsi, si le plan de symétrie est le plan diamétral xz, alors

$$\lambda_{12}=\lambda_{14}=\lambda_{16}=\lambda_{23}=\lambda_{25}=\lambda_{34}=\lambda_{36}=\lambda_{45}=\lambda_{56}=0. \quad \text{(VI.50)}$$

Examinons le principe de démonstration de l'égalité (VI.50) sur l'exemple du calcul de λ_{12}. En désignant par S_1 et S_2 (fig. VI.5) les parties supérieure et inférieure de la surface du corps, supposées symétriques par rapport au plan diamétral xz et en utilisant (VI.37), nous obtenons

$$\lambda_{12}=-\rho\oint_{S_1+S_2}\varphi_1\cos(n,\,y)\,dS=$$

$$=-\rho\left[\oint_{S_1}\varphi_1\cos(n,\,y)\,dS+\oint_{S_2}\varphi_1\cos(n,\,y)\,dS\right].$$

Il est évident qu'aux points homologues A_1 et A_2 des surfaces S_1 et S_2 le potentiel unitaire φ_1, caractérisant la perturbation lors du mouvement suivant l'axe des x, possède des valeurs identiques $\varphi_1(A_1)=\varphi_1(A_2)$. D'après la fig. VI.5 on voit que $\cos(n,\,y)=\cos\alpha$ pour le point A_1 et $\cos(n,\,y)=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ pour le point A_2.

On en déduit qu'aux points homologues A_1 et A_2 la fonction $\varphi_1\cos(n,\,y)$ est identique en valeur et de signe contraire. Les intégrales de cette fonction sur les surfaces identiques S_1 et S_2 s'annulent mutuellement. Ainsi, $\lambda_{12}=0$.

Fig. VI.5

Dans un corps symétrique par rapport à deux plans (par exemple, un corps avec des plans de symétrie xz et xy) il ne reste que huit masses virtuelles

$$\lambda_{11},\ \lambda_{22},\ \lambda_{33},\ \lambda_{44},\ \lambda_{55},\ \lambda_{66},\ \lambda_{26},\ \lambda_{35}. \quad \text{(VI.51)}$$

Comme exemple on peut prendre un corps doublé, obtenu par addition suivant le plan de la ligne de flottaison (plan de symétrie) des carènes des navires. Le second plan de symétrie est diamétral. Une telle hypothèse est admise pour l'étude des problèmes de commande des navires se déplaçant sur la surface libre, sans tenir compte de la houle.

Si le corps est un corps de révolution avec un axe longitudinal suivant l'axe des x, on aura par raison de symétrie

$$\lambda_{55}=\lambda_{66}\,;\ \lambda_{26}=\lambda_{35}. \quad \text{(VI.52)}$$

En effet, si un corps tourne par rapport aux axes des y et des z, les perturbations qui se produisent dans le fluide sont identiques, ce qui entraîne l'égalité des moments d'inertie virtuels λ_{55} et λ_{66}. Identiques sont également les perturbations apparaissant dans le fluide par suite du mouvement de translation d'un corps de révolution suivant les axes des y et des z avec une rotation simultanée par rapport à ces axes et caractérisées par les moments statiques virtuels λ_{26} et λ_{35}.

Pour un corps symétrique par rapport à trois plans de symétrie (ellipsoïde à trois axes) $\lambda_{26} = \lambda_{35}$, et donc il reste six masses virtuelles

$$\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \lambda_{44}, \lambda_{55}, \lambda_{66}. \qquad \text{(VI.53)}$$

En cas d'un problème plan, c'est-à-dire lorsqu'un contour se déplace dans le plan des xy, les projections des vitesses $v_3 = v_{0z}$, $v_4 = \omega_x$, $v_5 = \omega_y$ sont nulles. Dans ce cas l'expression de l'énergie cinétique se détermine seulement par six termes

$$T_{f1} = \frac{1}{2}(\lambda_{11}v_1^2 + \lambda_{22}v_2^2 + \lambda_{66}v_6^2 + \\ + 2\lambda_{12}v_1v_2 + 2\lambda_{16}v_1v_6 + 2\lambda_{26}v_2v_6). \qquad \text{(VI.54)}$$

En passant aux projections des vitesses $v_1 = v_{0x}$, $v_2 = v_{0y}$, $v_6 = \omega$ et en désignant

$$\lambda_{11} = \lambda_x, \ \lambda_{22} = \lambda_y ; \ \lambda_{66} = \lambda_\omega ; \\ \lambda_{12} = \lambda_{xy} ; \ \lambda_{16} = \lambda_{x\omega} ; \ \lambda_{26} = \lambda_{y\omega}, \qquad \text{(VI.55)}$$

nous réduisons l'expression de T_{f1} à la forme suivante

$$T_{f1} = \frac{1}{2}(\lambda_x v_{0x}^2 + \lambda_y v_{0y}^2 + \lambda_\omega \omega^2 + 2\lambda_{xy}v_{0x}v_{0y} + \\ + 2\lambda_{x\omega}v_{0x}\omega + 2\lambda_{y\omega}v_{0y}\omega). \qquad \text{(VI.56)}$$

§ 35. FORCES ET MOMENTS HYDRODYNAMIQUES DE NATURE D'INERTIE. CAS DU MOUVEMENT DE TRANSLATION D'UN CORPS. NOTION DES DIRECTIONS PRINCIPALES D'UN MOUVEMENT

Appliquons au calcul des forces d'inertie hydrodynamiques $\overline{R}_1$ et des moments $\overline{M}_1$ agissant sur le corps du côté du fluide les lois de la quantité de mouvement et des moments de la quantité de mouvement. Suivant la troisième loi de Newton le fluide subira du côté du corps les forces $-\overline{R}_1$ et le moment $-\overline{M}_1$. Soient $\overline{Q}_{f1} = \overline{i}Q_{f1x} + \overline{j}Q_{f1y} + \overline{k}Q_{f1z}$ la quantité de mouvement du fluide

et $\overline{K}_{f1} = \overline{i}K_{f1x} + \overline{j}K_{f1y} + \overline{k}K_{f1z}$ le moment de la quantité du mouvement. Alors les lois de la quantité de mouvement et des moments de la quantité de mouvement seront

$$\frac{d_f\overline{Q}_{f1}}{dt} = -\overline{R}_1 ; \quad \frac{d_f\overline{K}_{f1}}{dt} = -\overline{M}_1. \qquad \text{(VI.57)}$$

En déduisant ces formules, nous avons utilisé le système de coordonnées fixe dans l'espace (désigné par l'indice « f »). Cependant pour un mouvement arbitraire d'un corps, il est rationnel d'employer un système de coordonnées mobile lié au corps. De la mécanique générale on connaît la liaison qui existe entre les dérivées d'un vecteur par rapport au temps dans les systèmes de coordonnées mobile et fixe

$$\frac{d_f\overline{Q}_{f1}}{dt} = \frac{d\overline{Q}_{f1}}{dt} + \overline{\omega} \times \overline{Q}_{f1} ; \quad \frac{d_f\overline{K}_{f1}}{dt} = \frac{d\overline{K}_{f1}}{dt} + \overline{\omega} \times \overline{K}_{f1} + \overline{v}_0 \times \overline{Q}_{f1}, \qquad \text{(VI.58)}$$

où par le symbole d/dt est désignée la différentiation dans un système de coordonnées mobile; $\overline{Q}_{f1}$ et $\overline{K}_{f1}$ sont calculés dans le système de coordonnées mobile. En portant (VI.58) dans (VI.57), nous obtenons les expressions de la force d'inertie et du moment

$$\overline{R}_1 = -\frac{d\overline{Q}_{f1}}{dt} - \overline{\omega} \times \overline{Q}_{f1} ; \qquad \text{(VI.59)}$$

$$\overline{M}_1 = -\frac{d\overline{K}_{f1}}{dt} - \overline{\omega} \times \overline{K}_{f1} - \overline{v}_0 \times \overline{Q}_{f1}. \qquad \text{(VI.60)}$$

Comme il est démontré en mécanique générale, les projections de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement peuvent être exprimées en fonction de l'énergie cinétique T_{f1} comme les dérivées par rapport aux vitesses généralisées correspondantes

$$\left.\begin{aligned} Q_{f1x} &= \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_1} ; \quad Q_{f1y} = \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_2} ; \quad Q_{f1z} = \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_3} ; \\ K_{f1x} &= \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_4} ; \quad K_{f1y} = \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_5} ; \quad K_{f1z} = \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_6} . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.61)}$$

Ainsi, dans les formules de $\overline{R}_1$ et $\overline{M}_1$ les grandeurs $\overline{Q}_{f1}$ et $\overline{K}_{f1}$ peuvent être remplacées par leurs valeurs exprimées en fonction de l'énergie cinétique du fluide. En projetant $\overline{R}_1$ et $\overline{M}_1$ sur les axes de coordonnés liés au corps et en substituant les projections de la quantité de mouvement et des moments de la quantité de mouvement suivant les formules (VI.61), nous obtenons les expressions générales des composantes des forces et des moments de nature

d'inertie

$$\left.\begin{aligned}
R_{1x} &= -\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0x}} + \left(\omega_y \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0z}} - \omega_z \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0y}}\right)\right];\\
R_{1y} &= -\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0y}} + \left(\omega_z \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0x}} - \omega_x \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0z}}\right)\right];\\
R_{1z} &= -\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0z}} + \left(\omega_x \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0y}} - \omega_y \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0x}}\right)\right];\\
M_{1x} &= -\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{f1}}{\partial \omega_x} + \left(\omega_y \frac{\partial T_{f1}}{\partial \omega_z} - \omega_z \frac{\partial T_{f1}}{\partial \omega_y}\right) +\right.\\
&\qquad \left. + \left(v_{0y} \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0z}} - v_{0z} \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0y}}\right)\right];\\
M_{1y} &= -\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{f1}}{\partial \omega_y} + \left(\omega_z \frac{\partial T_{f1}}{\partial \omega_x} - \omega_x \frac{\partial T_{f1}}{\partial \omega_z}\right) +\right.\\
&\qquad \left. + \left(v_{0z} \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0x}} - v_{0x} \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0z}}\right)\right];\\
M_{1z} &= -\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{f1}}{\partial \omega_z} + \left(\omega_x \frac{\partial T_{f1}}{\partial \omega_y} - \omega_y \frac{\partial T_{f1}}{\partial \omega_x}\right) +\right.\\
&\qquad \left. + \left(v_{0x} \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0y}} - v_{0y} \frac{\partial T_{f1}}{\partial v_{0x}}\right)\right],
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.62)}$$

où les désignations des projections des vitesses correspondent aux formules de liaison (VI.38).

Pour ramener les formules (VI.62) à la forme définitive, il faut utiliser la relation pour l'énergie cinétique du fluide T_{f1} et effectuer une différentiation correspondante. En dérivant par rapport au temps il faut tenir compte de ce que les masses virtuelles λ_{ik} ne dépendent pas du temps, et que les projections des vitesses de translation et angulaires sont dans le cas général des fonctions du temps t.

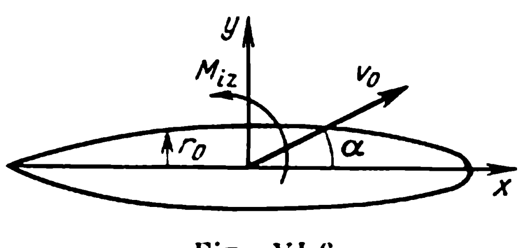


Fig. VI.6

Etudions plus en détail le cas du mouvement de translation d'un corps $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Soit un corps se déplaçant avec une vitesse $\bar{v}_0 = \bar{i}v_{0x} + \bar{j}v_{0y} + \bar{k}v_{0z}$ (fig. VI.6). Désignons la masse virtuelle du fluide lors du mouvement dans la direction donnée par λ. En introduisant le coefficient de la masse virtuelle μ suivant (VI.47), nous obtenons

$$\lambda = \mu\rho V_c,$$

V_c étant le volume du corps.

L'énergie cinétique du fluide se détermine par la relation

$$T_{f1} = \lambda \frac{v_0^2}{2} = \mu\rho V_c \frac{v_0^2}{2}. \qquad \text{(VI.63)}$$

D'autre part, T_{f1} peut être exprimée au moyen de la formule générale (VI.44)

$$T_{f1} = \frac{\rho V_c}{2} [\mu_{11} v_{0x}^2 + \mu_{22} v_{0y}^2 + \mu_{33} v_{0z}^2 +$$

$$+ 2\mu_{12} v_{0x} v_{0y} + 2\mu_{13} v_{0x} v_{0z} + 2\mu_{23} v_{0y} v_{0z}] = \mu\rho V_c \frac{v_0^2}{2}, \qquad \text{(VI.64)}$$

où μ_{ik} sont les coefficients des masses virtuelles.

En divisant les deux membres de l'égalité (VI.64) par $\rho V_c \mu v_0^2$ nous obtenons

$$\frac{\mu_{11}}{\mu}\left(\frac{v_{0x}}{v_0}\right)^2 + \frac{\mu_{22}}{\mu}\left(\frac{v_{0y}}{v_0}\right)^2 + \frac{\mu_{33}}{\mu}\left(\frac{v_{0z}}{v_0}\right)^2 + 2\frac{\mu_{12}}{\mu}\left(\frac{v_{0x}}{v_0}\right)\left(\frac{v_{0y}}{v_0}\right) +$$

$$+ 2\frac{\mu_{13}}{\mu}\left(\frac{v_{0x}}{v_0}\right)\left(\frac{v_{0z}}{v_0}\right) + 2\frac{\mu_{23}}{\mu}\left(\frac{v_{0y}}{v_0}\right)\left(\frac{v_{0z}}{v_0}\right) = 1.$$

En introduisant les notations

$$\frac{v_{0x}}{v_0}\frac{1}{\sqrt{\mu}} = x_1; \quad \frac{v_{0y}}{v_0}\frac{1}{\sqrt{\mu}} = y_1; \quad \frac{v_{0z}}{v_0}\frac{1}{\sqrt{\mu}} = z_1.$$

nous pouvons récrire l'expression précédente

$$\mu_{11} x_1^2 + \mu_{22} y_1^2 + \mu_{33} z_1^2 + 2\mu_{12} x_1 y_1 + 2\mu_{13} x_1 z_1 + 2\mu_{23} y_1 z_1 = 1. \qquad \text{(VI.65)}$$

L'équation (VI.65) représente une équation de la surface du second ordre. Montrons que c'est une équation de l'ellipsoïde. En effet, étant donné que la grandeur μ est finie (l'énergie cinétique du fluide pour n'importe quel mouvement du corps est finie), les grandeurs x_1, y_1, z_1 sont limitées. Ainsi que l'on sait, parmi les surfaces du second ordre seul l'ellipsoïde ne possède pas de points infiniment éloignés; il s'appelle l'ellipsoïde de l'énergie cinétique.

Rapportons l'équation de l'ellipsoïde à ses axes principaux que nous désignerons par x_2, y_2, z_2. Dans ce cas on obtiendra l'équation de l'ellipsoïde sous la forme canonique, ne contenant pas de termes avec les produits des coordonnées

$$\bar{\mu}_{11} x_2^2 + \bar{\mu}_{22} y_2^2 + \bar{\mu}_{33} y_3^2 = 1 \qquad \text{(VI.66)}$$

ou

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} = 1; \quad a = \frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}_{11}}}; \quad b = \frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}_{22}}}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}_{33}}},$$

où $\bar{\mu}_{11}$, $\bar{\mu}_{22}$, $\bar{\mu}_{33}$ sont les coefficients des masses virtuelles, correspondant au mouvement du corps suivant les axes x_2, y_2, z_2; a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde.

Les directions des axes de cet ellipsoïde s'appellent directions principales.

Montrons qu'à l'aide de l'équation de l'ellipsoïde de l'énergie cinétique on détermine facilement le coefficient de la masse virtuelle dans le cas d'un mouvement suivant une direction quelconque avec une vitesse $\bar{v}_0$.

En utilisant les équations de liaison, analogues à celles données ci-dessus, nous pouvons écrire

$$x_2 = \frac{v_{0x}}{v_0} \frac{1}{\sqrt{\mu}}; \quad y_2 = \frac{v_{0y}}{v_0} \frac{1}{\sqrt{\mu}}; \quad z_2 = \frac{v_{0z}}{v_0} \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

En portant ces expressions dans l'équation de l'ellipsoïde (VI.66), nous obtiendrons la relation cherchée

$$\left(\frac{v_{0x}}{v_0}\right)^2 \bar{\mu}_{11} + \left(\frac{v_{0y}}{v_0}\right)^2 \bar{\mu}_{22} + \left(\frac{v_{0z}}{v_0}\right)^2 \bar{\mu}_{33} = \mu. \tag{VI.67}$$

En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $\frac{\rho V_c v_0^2}{2}$ et en tenant compte de l'expression pour les masses virtuelles, nous trouvons

$$\bar{\lambda}_{11} \frac{v_{0x}^2}{2} + \bar{\lambda}_{22} \frac{v_{0y}^2}{2} + \bar{\lambda}_{33} \frac{v_{0z}^2}{2} = \lambda \frac{v_0^2}{2}. \tag{VI.68}$$

Il s'ensuit que l'énergie cinétique d'un fluide dans le cas du mouvement de translation d'un corps dans une direction quelconque à une vitesse v_0 est égale à la somme des énergies cinétiques des mouvements des composantes suivant les directions principales (avec des vitesses v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}). On introduit les directions principales pour les corps de forme quelconque. Pour un corps possédant des axes de symétrie les directions principales coïncident avec ces axes.

Des propriétés géométriques de l'ellipsoïde il découle que lorsqu'on se déplace le long des directions principales, les coefficients des masses virtuelles prennent des valeurs extrêmes. Si par exemple $a > b > c$, alors suivant la relation (VI.66) $\bar{\mu}_{11} < \bar{\mu}_{22} < \bar{\mu}_{33}$.

Considérons le cas particulier du mouvement de translation uniforme d'un corps dans un fluide

$$\frac{dv_{0x}}{dt} = \frac{dv_{0y}}{dt} = \frac{dv_{0z}}{dt} = 0; \quad \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0.$$

Il découle des formules générales (VI.62) que dans le cas donné la force hydrodynamique est égale à zéro et l'action du fluide sur le corps ne conduit qu'à l'apparition du moment hydrodynamique.

Il est facile de lier directement la valeur de ce moment M_1 à l'énergie cinétique du fluide. Désignons par α l'angle entre le vecteur vitesse et un axe quelconque lié rigidement au corps. Au mouvement donné correspond une énergie cinétique déterminée dépendant de l'angle α; $T_{f1} = T_{f1}(\alpha)$. Supposons que sous l'action de faibles perturbations extérieures le corps a changé la direction de son mouvement d'un angle élémentaire $d\alpha$. Avec ceci, l'énergie cinétique du fluide changera également d'une valeur dT_{f1} qui est numériquement égale au travail du moment $M_1 d\alpha$. Par conséquent,

$$M_1 = \frac{dT_{f1}}{d\alpha}. \tag{VI.69}$$

Connaissant l'expression de l'énergie cinétique du fluide, correspondant au mouvement du corps dans la direction donnée, et en liant les projections des vitesses avec la vitesse du mouvement v_0 au moyen de l'angle α, on peut déterminer le moment des forces de nature d'inertie.

Envisageons le cas du mouvement plan d'un corps (fig. VI.6) $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Admettons que les axes de coordonnées coïncident avec les directions principales. En utilisant l'expression (VI.68), nous obtenons

$$T_{f1} = \frac{\rho V_c}{2} (\mu_{11} v_{0x}^2 + \mu_{22} v_{0y}^2) = \frac{\rho v_0^2 V_c}{2} (\mu_{11} \cos^2 \alpha + \mu_{22} \sin^2 \alpha). \quad \text{(VI.70)}$$

Le moment $M_1 = M_{1z}$ ($M_{1x} = M_{1y} = 0$) compte tenu de (VI.69) est

$$M_1 = \frac{\rho V_c v_0^2}{2} (\mu_{22} - \mu_{11}) \sin 2\alpha. \quad \text{(VI.71)}$$

On aurait pu obtenir le même résultat en utilisant les formules générales (VI.62).

La relation (VI.71) trouve un large emploi dans l'étude de la facilité d'évolution et de manœuvrabilité des corps.

Etudions maintenant le mouvement de translation uniforme d'un corps suivant les directions principales. Comme il résulte du caractère extrémal de T_{f1} pour ces directions, lorsqu'un corps se déplace le long de ces directions $\frac{dT_{f1}}{d\alpha} = 0$.

On en déduit que lorsqu'un corps se déplace le long des directions principales, le moment d'inertie s'annule, c'est-à-dire que le corps ne subit pas d'action de la part du fluide, ce dont on peut facilement s'assurer en analysant la formule (VI.71). Le moment d'inertie M_1 devient nul pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$; ces angles déterminent les directions principales du mouvement.

Envisageons la stabilité du mouvement d'un corps le long des directions principales sur l'exemple de son mouvement dans un plan des xy. Pour fixer les idées, posons $\mu_{22} > \mu_{11}$. Ce cas correspond au mouvement d'un corps allongé le long de l'axe des x. En prenant pour α dans la formule (VI.69) différentes valeurs ($0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$), on peut obtenir une dépendance $T_{f1}(\alpha)$ montrée sur la fig. VI.7. Le minimum d'énergie cinétique correspond à l'angle $\alpha = 0$, le maximum à l'angle $\alpha = \pi/2$. Arrêtons-nous d'abord sur le mouvement d'un corps le long de l'axe des x ($\alpha = 0$). Par suite des causes fortuites, l'angle α peut varier d'une valeur $d\alpha$. Supposons que $d\alpha > 0$. Dans ce cas, comme on le voit d'après la fig. VI.7, l'énergie cinétique du fluide augmentera $dT_{f1} > 0$, de même que le moment M_1. Ainsi, sous l'action du moment positif l'angle α va en augmentant.

Des raisonnements analogues sont valables aussi pour un accroissement négatif de l;angle. Ainsi, le mouvement le long de cette direction principale est instable. Pour la direction principale correspondant au maximum d'énergie cinétique, on observe une image inverse : soit $d\alpha > 0$, alors, étant donné que T_{f1} diminue, $dT_{f1} < 0$ et $M_1 < 0$, c'est-à-dire que le moment d'inertie contribue à la diminution de l'angle α. Si $d\alpha < 0$, alors $dT_{f1} < 0$, c'est-à-dire que le moment diminue également la déviation apparue. Par conséquent, le mouvement du corps le long de la direction principale, correspondant au maximum de l'énergie cinétique du fluide, est stable. Ce même résultat peut facilement être obtenu par la voie analytique.

Fig. VI.7

De la formule (VI.71) nous déterminons

$$dM_1 = \frac{\rho V_c v_0^2}{2} (\mu_{22} - \mu_{11}) 2 \cos 2\alpha \, d\alpha.$$

Pour $\alpha = 0$, le signe de dM_1 coïncide avec le signe de $d\alpha$, c'est-à-dire que l'augmentation de l'angle conduit à l'augmentation du moment. Pour $\alpha = \pi/2$ les signes de dM_1 et de $d\alpha$ sont contraires.

Dans le cas général, quand il y a trois directions principales, le mouvement du corps est stable seulement dans la direction correspondant au maximum d'énergie cinétique du fluide ; quant à deux autres directions, le mouvement y est instable. Ceci est observé dans les conditions pratiques. Si un corps allongé placé dans un fluide est contourné le long de l'axe longitudinal (direction principale correspondant au minimum d'énergie cinétique), alors sa position est instable et le corps tend à virer en travers du courant. Pour cette même raison, un navire non gouverné se met le bord au vent.

§ 36. MÉTHODES DE DÉTERMINATION DES MASSES VIRTUELLES

Pour calculer les masses virtuelles généralisées à l aide de la relation

$$\lambda_{ik} = -\rho \oint_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 6)$$

il faut connaître les valeurs des potentiels unitaires φ_i qui caractérisent les perturbations produites par le corps dans un fluide lors des mouvements de translation et de rotation.

Dans le cas général du mouvement d'un corps de forme quelconque, la détermination de φ_i est liée à de grandes difficultés.

Examinons quelques exemples de détermination des masses virtuelles pour les corps de forme simple.

Calculons λ_{11} pour un cylindre de révolution de rayon r_0. Le potentiel du courant engendré par le cylindre de révolution, se déplaçant à la vitesse v_∞ dans le sens de l'axe négatif des x, s'exprime par la formule (V.45).

En comparant (V.45) à l'expression du potentiel unitaire (VI.41) et en tenant compte de ce que $v_1 = v_{0x} = -v_\infty$, nous obtenons

$$\varphi_1 = -\frac{r_0^2}{r}\cos\theta. \qquad \text{(VI.72)}$$

En tenant compte du fait que les directions du rayon et de la normale coïncident, représentons la dérivée normale du potentiel unitaire sous la forme

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \frac{r_0^2}{r^2}\cos\theta.$$

Sur le contour de $r = r_0$ nous avons $\varphi_1 = -r_0\cos\theta$; $\partial\varphi_1/\partial r = \cos\theta$.

Etant donné que l'élément de la surface du cylindre de révolution $dS = r_0 d\theta 1$, nous trouvons

$$\lambda_{11} = -\rho\oint_S \varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}dS = \rho r_0^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \rho\pi r_0^2 1. \qquad \text{(VI.73)}$$

Ainsi, la masse virtuelle du fluide en mouvement d'un cylindre est égale à la masse du fluide déplacée par le cylindre. D'où il suit que le coefficient de la masse virtuelle $\mu_{11} = 1$. Il est évident que la masse virtuelle du cylindre ne dépend pas de la direction du mouvement. Il est clair aussi que la rotation du cylindre de révolution autour de son axe dans un fluide parfait ne provoque pas de perturbation du fluide, c est-à-dire $\lambda_\omega = 0$.

Ecrivons (sans démonstration) les formules des masses virtuelles d'un cylindre elliptique avec les demi-axes a, b

$$\lambda_x = \rho\pi b^2; \quad \lambda_y = \rho\pi a^2; \quad \lambda_\omega = \frac{\rho\pi}{8}(a^2 - b^2)^2. \qquad \text{(VI.74)}$$

En posant ici $b = 0$, nous obtiendrons les expressions des masses virtuelles pour une plaque de largeur $2a$.

D'après les formules du § 28 on peut déterminer le potentiel unitaire φ_1 du mouvement longitudinal d'un ellipsoïde de révolution. Les données pour le calcul des autres potentiels de l'ellipsoïde sont exposées dans [14] et [15]. Les résultats des calculs effectués permettent d'obtenir les relations pour les coefficients des masses virtuelles μ_{11}, μ_{22}, $\mu_{55} = \mu_{66}$ en fonction de l'épaisseur relative de l'ellipsoïde b/a (fig. VI.8).

Dans l'ouvrage [14] sont donnés les coefficients des masses virtuelles pour un ellipsoïde de révolution à trois axes.

Il a été noté plus haut qu'il est difficile de déterminer les masses virtuelles des carènes des navires. Dans certains cas, lors des calculs approchés, on les remplace par un corps équivalent de contours plus simples, dont il est facile de calculer les masses virtuelles. Ainsi, par exemple, la partie immergée d'un navire de longueur L, de largeur B et de tirant d'eau T est parfois remplacée par un ellipsoïde à trois axes avec les demi-axes $a = L/2$, $b = B/2$ et $c = T$.

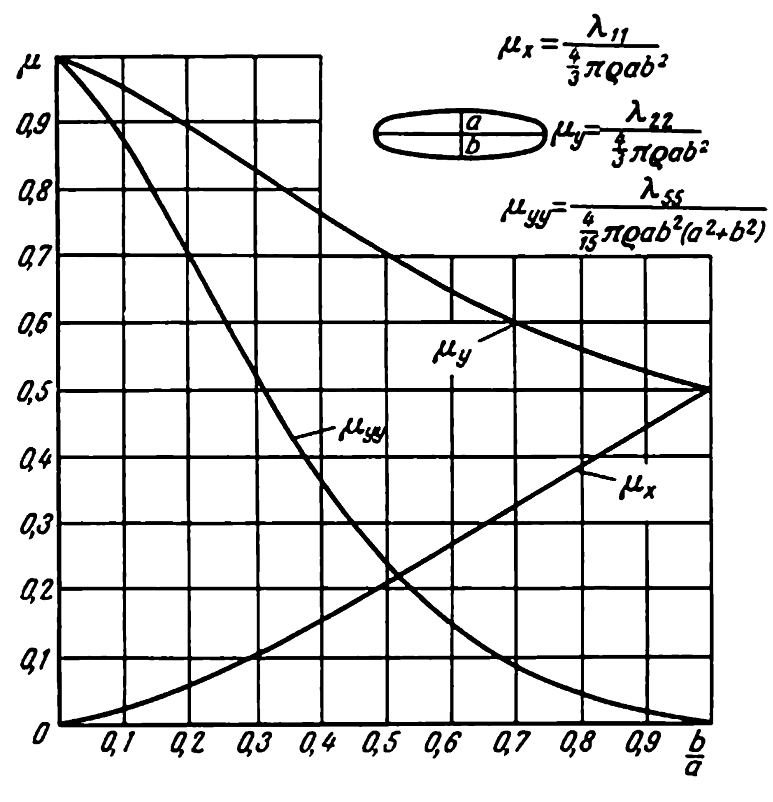


Fig. VI.8

En étudiant les mouvements transversaux des corps allongés, on se sert largement en mécanique des fluides de l'hypothèse des sections planes.

Examinons le mouvement transversal d'un corps de révolution. Pour déterminer la masse virtuelle dans la direction de ce mouvement utilisons l'hypothèse des sections planes. Coupons le corps suivant sa longueur en tronçons l_i, où les contours du corps peuvent être approximativement considérés comme cylindriques. Notons que les sections transversales varient suivant la longueur du corps. Sur chaque tronçon cylindrique le mouvement du fluide est considéré comme plan, c'est-à-dire on néglige les projections de la vitesse v_x qui créent l'écoulement du fluide le long du corps.

On calcule les caractéristiques hydrodynamiques (vitesses, pressions, forces, masses virtuelles) pour chaque tronçon cylindrique en utilisant des relations du problème plan de la mécanique des

fluides. En additionnant ces valeurs, on obtient les caractéristiques hydrodynamiques du corps dans son ensemble.

Appliquons l'hypothèse des sections planes à la détermination de la masse virtuelle $\lambda_{22} = \lambda_{33}$ du corps de révolution. Désignons par $r_0 = r_0(x)$ le rayon du corps variable en longueur. Isolons un tronçon cylindrique de longueur dx. Désignons par μ_{22} le coefficient de la masse virtuelle et écrivons l'expression de la masse virtuelle élémentaire

$$d\lambda_{22} = \mu_{22}\rho\pi r_0^2\, dx.$$

En l'intégrant sur la longueur du corps L, nous obtenons

$$\lambda_{22} = \int\limits_L \mu_{22}\rho\pi r_0^2\, dx = \rho\pi \int\limits_L r_0^2\, dx = \rho\pi V_c, \qquad \text{(VI.75)}$$

où on a posé $\mu_{22} = 1$. Ainsi, la masse virtuelle d'un corps de révolution, correspondant à son mouvement latéral, est égale à la masse du fluide dans le volume du corps.

Dans les conditions réelles, il y a toujours un étalement latéral du fluide. Pour en tenir compte, on représente λ_{22} sous la forme suivante :

$$\lambda_{22} = \eta\lambda_{22\,\text{sec. pl.}}. \qquad \text{(VI.76)}$$

Ici $\lambda_{22\,\text{sec. pl.}}$ est la masse virtuelle, déterminée suivant l'hypothèse des sections planes; η la correction d'étalement, déterminée d'après la formule théorique expérimentale de Pubst

$$\eta = \frac{\frac{L}{B}}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{B}\right)^2}}\left[1 - 0{,}425\frac{\frac{L}{B}}{1+\left(\frac{L}{B}\right)^2}\right], \qquad \text{(VI.77)}$$

où L est la longueur du corps, B sa largeur.

Les raisonnements ci-dessus, liés à l'introduction des masses virtuelles, se rapportaient au cas d'un fluide illimité. En mécanique des fluides on étend ces notions au cas d'un corps se déplaçant dans un fluide limité ainsi qu'en présence d'une surface libre houleuse. Par exemple, lors du ballottement d'un navire, les masses virtuelles dépendent non seulement de la forme du corps, mais aussi de la fréquence et de l'amplitude des oscillations. La propriété des masses virtuelles suivant laquelle $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$ n'a pas lieu ici.

§ 37. DISTRIBUTION DES PRESSIONS SUR UN CORPS ANIMÉ D'UN MOUVEMENT DE TRANSLATION AVEC UNE VITESSE VARIABLE

Elucidons l'influence du mouvement non stationnaire sur la pression dans le fluide. Considérons, pour simplifier, le mouvement de translation d'un corps avec une vitesse variable dans le temps $v_0 = v_0(t)$ suivant l'axe des x. Introduisons un système de coor-

données fixe dans l'espace x_1, y_1, z_1, (fig. VI.9) et un système de coordonnées x, y, z lié au corps. Les axes de ces systèmes de coordonnées sont parallèles. La liaison entre les coordonnées fixes et mobiles se détermine par les relations

$$x_1 = x + \int_0^t v_0\,dt; \quad y_1 = y, \quad z_1 = z. \tag{VI.78}$$

Nous supposons le mouvement absolu du fluide provoqué par le mouvement du corps comme irrotationnel de potentiel φ. Ce

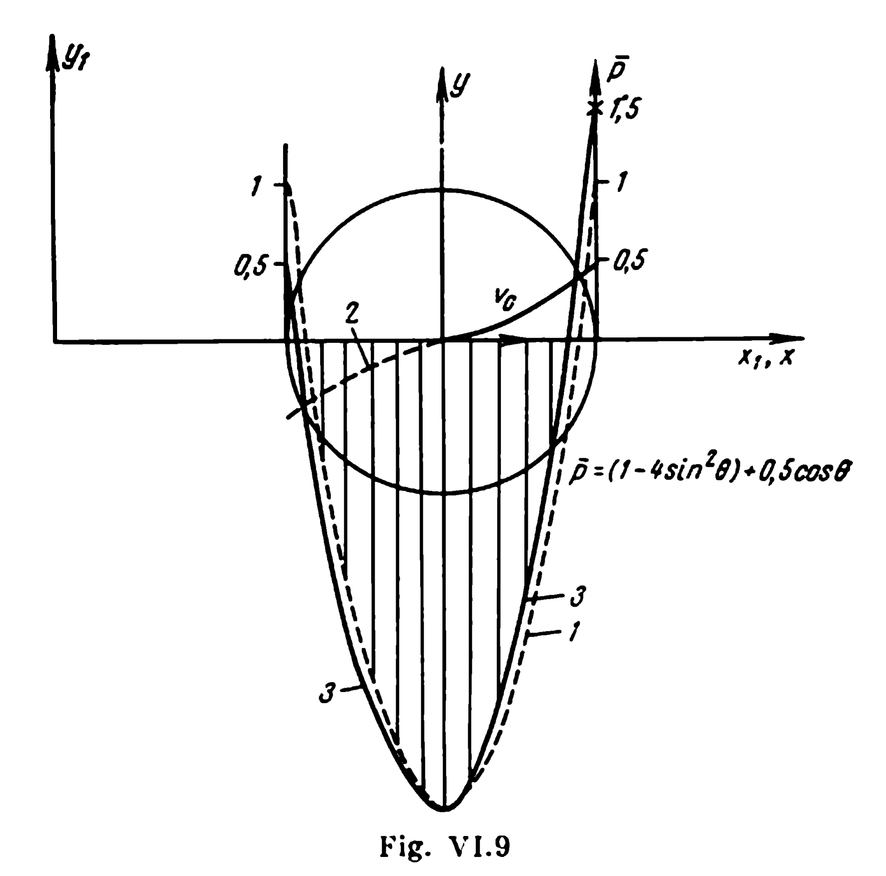


Fig. VI.9

potentiel peut être considéré comme une fonction soit des coordonnées fixes $\varphi(x_1, y_1, z_1, t)$ soit des coordonnées mobiles $\varphi(x, y, z, t)$. Dans les deux cas φ dépend également du temps.

En écoulement irrotationnel non stationnaire d'un fluide, les vitesses engendrées v et les pressions sont liées par l'intégrale de Lagrange. En négligeant les forces massiques et en exprimant les projections de la vitesse en fonction du potentiel, nous écrirons l'intégrale de Lagrange (VI.14) sous la forme

$$\frac{\partial_t \varphi(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}\right)^2\right] + \frac{p}{\rho} = C, \tag{VI.79}$$

où C est la valeur dépendant seulement du temps. Remarquons que l'intégrale de Lagrange sous la forme (VI.79) est écrite pour un système de coordonnées fixe. La dérivée locale du potentiel par rapport au temps est de même calculée dans un système de coordonnées fixe, ce qui est marqué par l'indice « f ».

Pour utiliser l'intégrale de Lagrange dans un système de coordonnées mobiles, il faut exprimer les dérivées du potentiel par rapport au temps et aux coordonnées dans ce système. Calculons la dérivée du potentiel par rapport au temps en un point fixé dans un système de coordonnées fixe. Dans ce cas x_1, y_1, z_1 sont également fonctions du temps

$$\frac{d_f\varphi}{dt}=\frac{\partial_f\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dt}. \qquad \text{(VI.80)}$$

En vertu des équations de liaison (VI.78), en tenant compte de ce que les coordonnées mobiles ne dépendent pas du temps, nous obtenons

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{dx}{dt}+v_0=v_0; \quad \frac{dy_1}{dt}=0; \quad \frac{dz_1}{dt}=0. \qquad \text{(VI.81)}$$

De plus, les relations entre les coordonnées fixes et mobiles étant linéaires, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad \text{(VI.82)}$$

d'où il suit que dans le cas donné, quand les axes des systèmes de coordonnées fixe et mobile sont parallèles, les projections des vitesses sont égales. En portant les expressions obtenues dans (VI.80), nous avons

$$\frac{d_f\varphi}{dt}=\frac{\partial_f\varphi}{\partial t}+v_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \qquad \text{(VI.83)}$$

Calculons la dérivée du potentiel par rapport au temps en un point fixé xyz dans un système de coordonnées mobile

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad \text{(VI.84)}$$

étant donné que x, y, z ne dépendent pas du temps.

Il est évident que la dérivée totale par rapport au temps. calculée dans les systèmes de coordonnées fixe et mobile, est identique. En égalisant (VI.83) et (VI.84), nous trouvons la liaison cherchée entre les variations locales du potentiel

$$\frac{\partial_f\varphi}{\partial t}+v_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \qquad \text{(VI.85)}$$

En déterminant $\frac{\partial_f\varphi}{\partial t}$ de (VI.85) et en utilisant les relations (VI.82) pour la liaison des projections des vitesses engendrées, nous obtien-

drons l'intégrale de Lagrange dans le système de coordonnées mobile sous la forme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-v_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{p}{\rho}=C. \qquad \text{(VI.86)}$$

Pour déterminer la valeur de C, utilisons les conditions à l'infini en amont du corps. Loin à l'amont du corps pour $x\to\infty$ le mouvement engendré est absent : $\varphi\to 0$, $v\to 0$, $p_0\to p_0$. La substitution de ces valeurs dans (VI.86) conduit à $C=p_0/\rho$, d'où pour la pression de surcharge $p-p_0$ on peut écrire

$$\frac{p-p_0}{\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{v^2}{2}. \qquad \text{(VI.87)}$$

Examinons le mouvement de translation suivant l'axe des x dans un fluide d'un cylindre de révolution de rayon r_0 animé d'une vitesse v_0. Le potentiel φ du mouvement provoqué du cylindre avec une vitesse v_0 dans la direction de l'axe positif des x est de la forme (V.45)

$$\varphi=-v_0r_0^2\frac{x}{x^2+y^2}=-v_0r_0^2\frac{\cos\theta}{r}.$$

Calculons les membres figurant dans (VI.87) en passant en même temps aux coordonnées polaires:

$$v^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=\frac{v_0^2r_0^4}{r^4};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{dv_0}{dt}\frac{r_0^2\cos\theta}{r}. \qquad \text{(VI.88)}$$

Déterminons les pressions en des points sur le cylindre. En posant dans (VI.88) $r=r_0$ et en substituant les valeurs trouvées dans l'intégrale de Lagrange (VI.87), nous obtenons

$$\frac{p-p_0}{\rho}=\frac{v_0^2}{2}(1-4\sin^2\theta)+\frac{dv_0}{dt}r_0\cos\theta \qquad \text{(VI.89)}$$

ou. en divisant les deux membres de (VI.88) par $v_0^2/2$, nous déterminons le coefficient de pression

$$\frac{2(p-p_0)}{\rho v_0^2}=(1-4\sin^2\theta)+\frac{2r_0}{v_0^2}\frac{dv_0}{dt}\cos\theta. \qquad \text{(VI.90)}$$

Le second terme, proportionnel à l'accélération du corps, fournit un supplément à la pression par suite du caractère instable du mouvement du cylindre. Si l'on pose $dv_0/dt=0$, c'est-à-dire si l'on considère que le cylindre se déplace de façon rectiligne à une vitesse constante, alors la forme qu'aura le coefficient de pression dans le système de coordonnées mobile sera la même que lors de l'écoulement autour d'un cylindre à la vitesse $v_0=v_\infty$, c'est-à-dire qu'en mouvement inverse. Ainsi, ce cas particulier justifie le principe de l'inversion du mouvement.

Sur la fig. VI.9 est montrée la distribution du coefficient de pression $\bar{p}$ sur le cylindre animé d'un mouvement accéléré. La valeur de l'accélération sans dimension est $\frac{2r_0}{v_0^2}\frac{dv_0}{dt} = 0{,}5$. La courbe *1* correspond à la distribution stationnaire des pressions $\bar{p}_{st} = 1 - 4\sin^2\theta$, la courbe *2* au supplément non stationnaire du coefficient de pression en mouvement non stationnaire. La fig. VI.9 montre qu'en mouvement accéléré l'épure des pressions est asymétrique par rapport à la section du maître couple, les pressions régnant dans la proue sont supérieures à celles dans la poupe. En mouvement non stationnaire le coefficient de pression au point critique de la proue n'est pas égal à l'unité.

Par suite de l'asymétrie de l'épure des pressions par rapport au maître couple, le mouvement accéléré du cylindre dans un fluide parfait fait apparaître une force de résistance. Calculons celle-ci. La pression de surcharge régnant en des points sur le cylindre est liée au coefficient de pression par une relation

$$p - p_0 = \bar{p}\frac{\rho v_0^2}{2}.$$

La force de pression élémentaire appliquée à une aire du cylindre $(r_0 d\theta)$ est

$$d\bar{R} = -\bar{n}(p - p_0)r_0 d\theta,$$

où $\bar{n}$ est la normale extérieure à la surface du cylindre.

La force élémentaire de résistance est

$$dR_x = -(p - p_0)\cos(n, x)r_0\,d\theta = -\bar{p}\frac{\rho v_0^2}{2}\cos\theta r_0\,d\theta. \quad \text{(VI.91)}$$

On obtiendra la force de résistance en intégrant (VI.91) sur la surface

$$R_x = -(\rho\pi r_0^2)\frac{dv_0}{dt}. \quad \text{(VI.92)}$$

En partant de l'expression de la masse virtuelle du cylindre on trouve que

$$R_x = R_{x1} = -\lambda_x\frac{dv_0}{dt}. \quad \text{(VI.93)}$$

Ainsi, en mouvement non stationnaire du cylindre dans un fluide parfait ce cylindre subit une force d'inertie numériquement égale au produit de la masse virtuelle par l'accélération du corps. L'apparition de cette force est due à la variation de la pression sur le corps par suite du caractère non stationnaire du mouvement.

Trouvons la relation permettant de déterminer la pression sur un corps de révolution ou un contour plan, se déplaçant le long de l'axe des x avec une vitesse de translation variable dans le temps v_0.

Pour cela transformons la relation (VI.87)

$$\frac{p-p_0}{\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

où φ est le potentiel des vitesses engendrées. D'après (VI.41)

$$\varphi=v_0(t)\,\varphi_1(x,\,y,\,z)=v_0\varphi_1.$$

Ici φ_1 est le potentiel unitaire ne dépendant pas du temps. En tenant compte de ce que sa dimension $[\varphi_1]=L$, on peut écrire

$$\varphi_1=L\varphi_{1\,sd},\tag{VI.94}$$

où $\varphi_{1\,sd}$ est le potentiel unitaire sans dimensions.

Représentons t sous la forme suivante

$$t=\tau T,\tag{VI.95}$$

où τ est le temps sans dimensions ; T le temps caractéristique (par exemple, le temps d'accélération ou de freinage d'un corps).

Si on représente la vitesse $v_0\,(t)$ comme le produit d'une certaine vitesse moyenne v_{0m} par une fonction de temps sans dimensions $\varepsilon\,(\tau)$

$$v_0=v_{0m}\varepsilon,\tag{VI.96}$$

alors la dérivée $\partial\varphi/\partial t$ suivant (VI.41) et (VI.94)-(VI.96) sera

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{Lv_{0m}}{T}\varphi_{1\,sd}\dot{\varepsilon},\tag{VI.97}$$

où $\dot{\varepsilon}=\partial\varepsilon/\partial\tau$ est l'accélération sans dimensions.

Introduisons les vitesses relatives

$$v_{x\,rel}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-v_0;\quad v_{y\,rel}=\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad v_{z\,rel}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\tag{VI.98}$$

En substituant dans (VI.88) $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=v_{x\,rel}+v_0$, nous obtenons

$$\frac{p-p_0}{\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v_0^2}{2}\left[1-\frac{v^2}{v_0^2}\right].\tag{VI.99}$$

où $v^2=v_{x\,rel}^2+v_{y\,rel}^2+v_{z\,rel}^2$.

Suivant (VI.41) la grandeur v^2/v_0^2 ne dépend pas du temps. Le terme $1-v^2/v_0^2$, représentant par sa forme le coefficient de pressions $\bar{p}_{st}$ en écoulement stationnaire, ne dépend non plus du temps. En divisant les deux membres de la formule (VI.99) par $v_0^2/2$ d'après (VI.96) et (VI.97), nous obtenons le coefficient de pression en mouvement non stationnaire

$$\bar{p}=\frac{2(p-p_0)}{\rho v_0^2}=-2\frac{L}{v_{0m}T}\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon^2}\varphi_{1\,sd}+\bar{p}_{st}.\tag{VI.100}$$

Connaissant le potentiel unitaire φ_1 ainsi que la loi de mouvement du corps ε et en empruntant la valeur du coefficient $\bar{p}_{st}$ des calculs d l'écoulement autour des corps, on peut à l'aide de cette expression déterminer la distribution non stationnaire des pressions sur le corps.

CHAPITRE VII

ÉCOULEMENTS TOURBILLONNAIRES D'UN FLUIDE

§ 38. THÉORÈMES DE HELMHOLTZ SUR LES TOURBILLONS

Les principales propriétés des mouvements tourbillonnaires sont décrites à l'aide du premier théorème, cinématique, et des second et troisième théorèmes, dynamiques, de Helmholtz.

Démontrons le théorème cinématique de Helmholtz sur les tourbillons qui s'énonce ainsi : l'intensité du tourbillon est constante le long du tube tourbillon.

Démontrons préalablement que le champ du vecteur tourbillon vérifie la condition suivante

$$\operatorname{div} \bar{\omega} = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0. \tag{VII.1}$$

En effet, en substituant dans l'expression de la divergence du vecteur tourbillon les valeurs ω_x, ω_y et ω_z suivant (III.20),[1] nous aurons

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \equiv 0,$$

c'est-à-dire la condition de solénoïdalité du vecteur vitesse angulaire, qui représente l'équation de continuité du champ du vecteur $\bar{\omega}$.

Calculons le flux double du vecteur vitesse angulaire à travers une surface quelconque fermée S avec une normale extérieure $\bar{n}$, limitant le volume V. Suivant (III.53) ce flux est égal à l'intensité I du tourbillon. En utilisant l'expression de ω_n et en se basant sur le théorème de Gauss-Ostrogradski, nous trouvons suivant (VII.1)

$$I = 2\oint_S \omega_n \, dS = 2\oint_S [\omega_x \cos(n, x) + \omega_y \cos(n, y) + \omega_z \cos(n, z)] \, dS =$$

$$= 2\int_V \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right) dV = 0, \tag{VII.2}$$

c'est-à-dire que le flux du tourbillon à travers une surface fermée quelconque est nul.

Pour démontrer le théorème de Helmholtz, examinons le tube tourbillon à axe curviligne, montré sur la fig. VII.1. Traçons deux sections quelconques S_1 et S_2 avec des normales extérieures $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_2$. Les vecteurs vitesse angulaire dans ces sections sont dirigés comme il est montré sur la fig. VII.1. En tenant compte de (VII.2), nous voyons que l'intensité du tourbillon à travers une surface fermée, limitée par les sections S_1 et S_2 et par la surface latérale S_{lat}, est

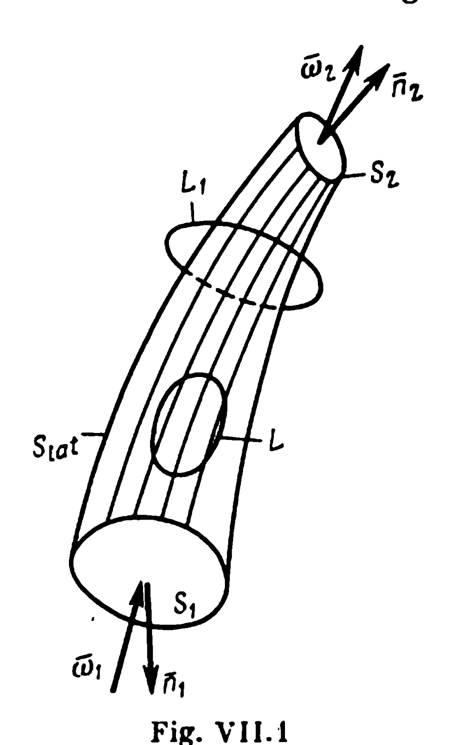


Fig. VII.1

$$I = 2 \oint\limits_{S_1+S_2+S_{lat}} \omega_n \, dS = 0.$$

En divisant l'intégrale sur la surface en une somme d'intégrales étendues aux parties de la surface et en tenant compte de ce que sur la surface latérale $\omega_n = 0$, nous obtenons, en introduisant les indices des sections,

$$2 \int\limits_{S_1} \bar{\omega}_1 \cdot \bar{n}_1 \, dS + 2 \int\limits_{S_2} \bar{\omega}_2 \cdot \bar{n}_2 \, dS = 0,$$

$2 \int\limits_{S_2} \bar{\omega}_2 \cdot \bar{n}_2 dS = I_2$ étant les intensités pour la deuxième section.

Etant donné que $\bar{\omega}_1$ et $\bar{n}_1$ forment un angle obtus, alors

$$2 \int\limits_{S_1} \bar{\omega}_1 \cdot \bar{n}_1 \, dS = -I_1.$$

En réunissant les résultats obtenus, on trouve

$$-I_1 + I_2 = 0 \text{ ou } I_1 = I_2, \tag{VII.3}$$

c'est-à-dire que les intensités du tube tourbillon dans la première et la seconde section sont identiques.

Etant donné que les sections S_1 et S_2 sont choisies arbitrairement, il devient clair de l'expression (VII.3) que le premier théorème de Helmholtz est juste. Ce théorème étant démontré uniquement sur la base des relations cinématiques, il est valable aussi bien pour un fluide visqueux que pour un fluide non visqueux.

Démontrons comme corollaire du théorème cinématique de Helmholtz qu'un tube tourbillon ne peut se terminer dans un fluide. Suivant le théorème de Helmholtz pour n'importe quelle section du tube tourbillon la condition suivante est remplie

$$2\omega_1 S_1 = 2\omega_2 S_2 = \text{const.} \tag{VII.4}$$

où ω_1 et ω_2 sont les vitesses angulaires dans les sections S_1 et S_2 normales à l'axe du tube tourbillon.

Si le tube tourbillon se termine dans un fluide, c'est-à-dire $S_2 \to 0$, alors suivant (VII.4) dans cette section la vitesse angulaire tend vers l'infini, ce qui est physiquement impossible. Cette propriété des tubes tourbillons est complètement analogue aux propriétés des tubes de courant.

Les tourbillons peuvent prendre leur origine sur une paroi solide (sur la surface d'un corps), sur une surface libre et sur une surface de séparation des fluides. Avec ceci, les tourbillons soit se propagent à l'infini, soit se ferment sur une paroi solide ou une surface libre.

Comme exemples de telles formations tourbillonnaires on peut citer des tourbillons qui se détachent de la surface de l'aile et s'éloignent à l'infini derrière celle-ci, ainsi que les formations tourbillonnaires du type des trombes et des vortex. Dans un fluide on peut observer des formations tourbillonnaires fermées (anneaux tourbillons).

Examinons les propriétés des tourbillons dans un fluide parfait. Elles sont décrites par les deux théorèmes dynamiques de Helmholtz.

L'énoncé du premier théorème dynamique est le suivant: dans un fluide parfait soumis à l'action des forces massiques potentielles, les tubes tourbillons sont constitués toujours des mêmes particules fluides. Pour sa démonstration, examinons le tube tourbillon (fig. VII.1) à l'instant t_0. Traçons sur sa surface une courbe fermée L. Etant donné que les lignes tourbillons ne traversent pas la surface du contour, suivant le théorème de Stokes (III.58), la circulation de la vitesse Γ le long de cette courbe est nulle $\Gamma(t_0) = 0$. A l'instant t, le tube tourbillon peut se déplacer.

Pour démontrer ce théorème il faut établir que les lignes tourbillons ne traversent pas la courbe fermée L, c'est-à-dire que le tube tourbillon ne se « dispersera » pas dans l'espace. Suivant le théorème de Thomson (IV.38), la circulation de la vitesse le long de la courbe fermée ne change pas avec le temps, c'est-à-dire $\Gamma(t) = \Gamma(t_0)$. Mais si $\Gamma(t)$ le long de la courbe fermée L est nulle à un instant de temps quelconque t, alors suivant le théorème de Stokes les lignes tourbillons ne passent pas par le plan de la courbe se trouvant sur la surface latérale du tube. De cette façon le théorème est démontré.

Suivant le second théorème dynamique, dans un fluide parfait soumis à l'action des forces massiques potentielles l'intensité du tube tourbillon ne change pas avec le temps.

Dans la section donnée (fig. VII.1), suivant le théorème de Stokes, l'intensité du tube tourbillon est égale à la circulation de la vitesse Γ le long du contour arbitraire L_1 entourant le tube tourbillon. Si à l'instant de temps initial $I(t_0) = \Gamma(t_0)$, alors d'après le théorème de Thomson, à tout autre instant la valeur de la circulation ne change pas $\Gamma(t) = \Gamma(t_0)$. En employant à nouveau le théorème

de Stokes, nous obtenons que l'intensité $I(t) = \Gamma(t) = I(t_0)$, c'est-à-dire le théorème est démontré.

Remarquons que suivant le théorème de Thomson et ses corollaires sur la conservation du mouvement tourbillonnaire dans un fluide parfait, l'apparition des tourbillons dans un fluide parfait est impossible. Ainsi, une des causes de leur apparition est liée à la viscosité du fluide. Pour un fluide visqueux réel, les théorèmes dynamiques de Helmholtz ne sont pas valables, car avec le temps, il se produit une diffusion du tourbillon dans l'espace.

§ 39. CHAMP DE VITESSES ENGENDRÉ PAR LES TOURBILLONS DANS UN FLUIDE. FORMULE DE BIOT ET SAVART

Dans l'étude des mouvements tourbillonnaires d'un fluide deux positions de problèmes sont possibles.

Le premier problème (direct): le champ des vitesses $\bar{v}(x, y, z, t)$ est donné, les caractéristiques du mouvement tourbillonnaire sont à déterminer. En principe, ce problème se résout facilement: à l'aide des formules (III.20) on détermine les vitesses angulaires $2\bar{\omega} = \operatorname{rot} \bar{v}$ et connaissant $\bar{\omega}$ on peut déterminer l'image des lignes tourbillons en résolvant l'équation différentielle (III.52).

Plus souvent on doit résoudre le problème inverse. Dans nombre de cas, en partant des considérations théoriques ou des résultats des expériences, on peut déterminer la forme des formations tourbillonnaires apparaissant dans un écoulement autour d'un corps en mouvement. Dans ce cas se pose le problème de la détermination des vitesses engendrées par le système de tourbillons donné.

Trouvons les expressions générales de la vitesse engendrée par une formation tourbillonnaire de forme quelconque occupant le volume V (fig. VII.2,*a*). Soit donné dans ce volume un champ des vitesses angulaires $\bar{\omega} = \bar{\omega}(x, y, z, t)$. En dehors du volume V, nous considérerons les vitesses angulaires égales à zéro, c'est-à-dire que le mouvement du fluide est potentiel. La liaison entre $\bar{\omega}$ et $\bar{v}$ sera $\operatorname{rot} \bar{v} = 2\bar{\omega}$. Pour la détermination de $\bar{v}$, il faut résoudre l'équation différentielle linéaire aux dérivées partielles. Il est rationnel de chercher la solution sous la forme

$$\bar{v} = 2 \operatorname{rot} \bar{A}, \tag{VII.5}$$

où $\bar{A}$ est l'inconnue nouvelle nommée potentiel vectoriel.

Imposons à la grandeur $\bar{A}$ une nouvelle condition

$$\operatorname{div} \bar{A} = 0 \tag{VII.6}$$

qui exprime la propriété de solénoïdalité du vecteur donné.

En substituant l'expression de $\bar{v}$ dans rot $\bar{v}$, nous obtenons la liaison entre $\bar{A}$ et $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega} = \text{rot rot}\, \bar{A}. \tag{VII.7}$$

Transformons l'une des projections de l'équation vectorielle (VII.7)

$$\omega_x = (\text{rot rot}\, \bar{A})_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) = -\Delta A_x.$$

Au cours des transformations on a ajouté et retranché le terme $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_x}{\partial x}$ et utilisé la condition (VII.6) et l'expression du laplacien. Ainsi,

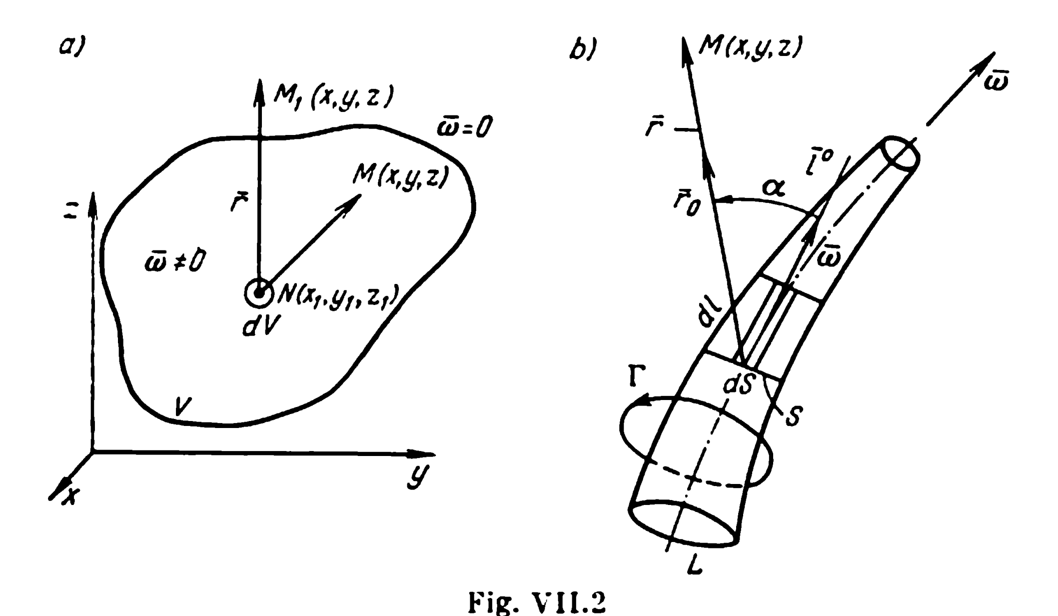


Fig. VII.2

la liaison des projections des vitesses angulaires avec les composantes du vecteur $\bar{A}$ est donnée par les équations suivantes

$$\Delta A_x = -\omega_x; \quad \Delta A_y = -\omega_y; \quad \Delta A_z = -\omega_z, \tag{VII.8}$$

appelées équations de Poisson. Rappelons que ω_x, ω_y et ω_z sont des fonctions données.

Examinons un volume élémentaire de la zone tourbillonnaire dV de centre au point N avec les coordonnées x_1, y_1, z_1 (fig. VII.2,*a*). Le vecteur vitesse angulaire en ce point a une valeur $\bar{\omega}(x_1, y_1, z_1)$. Désignons les coordonnées du point M en lequel il faut déterminer le potentiel vectoriel élémentaire $d\bar{A}$ par x, y, z, et le rayon vecteur réunissant ces deux points par $r = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{1/2}$. Alors, la solution de l'équation de Poisson (VII.8) sera

de la forme

$$A_x = \frac{1}{4\pi} \int\limits_V \frac{\omega_x}{r} dV; \quad A_y = \frac{1}{4\pi} \int\limits_V \frac{\omega_y}{r} dV; \quad A_z = \frac{1}{4\pi} \int\limits_V \frac{\omega_z}{r} dV. \quad \text{(VII.9)}$$

Le point $M(x, y, z)$ peut se trouver également en dehors de la zone tourbillonnaire et dans ce cas $\bar{A}$ sera toujours déterminé par les équations de Poisson. Si le point $N(x_1, y_1, z_1)$ se trouve en dehors de la zone tourbillonnaire, où $\bar{\omega} = 0$, l'équation de Poisson se transforme en équation de Laplace.

Après avoir déterminé $\bar{A}$ par les formules (VII.9), on peut ensuite trouver la vitesse à l'aide de (VII.5).

Dans le cas général du mouvement d'un corps quelconque, les vitesses angulaires $\bar{\omega}$ dans la zone tourbillonnaire sont inconnues, ce qui rend impossible l'utilisation des formules (VII.9) pour le calcul du champ des vitesses.

Lorsque dans un fluide se déplacent des corps profilés (aile, corps de révolution, corps des contours de navires, hélice d'un navire), les systèmes tourbillonnaires qui se forment sont beaucoup plus simples et se composent de tubes tourbillons relativement fins à axe curviligne dans le cas général.

Etant donné que les équations de Poisson (VII.8) pour la détermination du potentiel vectoriel $\bar{A}$ sont linéaires, alors le principe de la superposition des solutions est valable pour elles. Il en résulte que si dans un fluide il existe un certain nombre de tubes tourbillons, la vitesse totale induite par eux en un point quelconque du fluide s'obtient par la méthode des superpositions. Ainsi, il ne reste qu'à montrer comment il faut déterminer les vitesses induites par un seul tube tourbillon.

Examinons un tube tourbillon de section transversale S (fig. VII.2,*b*). Séparons un élément de volume $dV = dS\,dl$, où dl est l'élément de la longueur du tube tourbillon et dS l'élément de la section transversale. Le vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}$, considéré comme constant suivant la section dS, est tangent à l'axe du tube.

Les projections de $\bar{\omega}$ sur les axes de coordonnées x_1, y_1, z_1 seront $\omega_x = \omega \cos(\bar{\omega}, x_1) = \omega \frac{dx_1}{dl}$, $\omega_y = \omega \frac{dy_1}{dl}$. Transformons l'expression de A_x en y introduisant dV et ω_x:

$$A_x = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \int\limits_L \frac{\omega}{r} \frac{dx_1}{dl} dS\,dl = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \omega\, dS \int\limits_L \frac{dx_1}{r}. \quad \text{(VII.10)}$$

Ici l'intégrale sur le volume est transformée en intégrale sur la section transversale du tube tourbillon S et en intégrale curviligne suivant l'axe L du tube.

En tenant compte de ce que l'intensité I, égale à la circulation de la vitesse le long de la courbe fermée entourant le tube tourbillon Γ, se détermine par la relation (III.53) et est constante le long du tube, nous obtenons une expression définitive de A_x (et par analogie de A_y et A_z)

$$A_x = \frac{\Gamma}{8\pi} \int\limits_L \frac{dx_1}{r}; \quad A_y = \frac{\Gamma}{8\pi} \int\limits_L \frac{dy_1}{r}; \quad A_z = \frac{\Gamma}{8\pi} \int\limits_L \frac{dz_1}{r}, \qquad \text{(VII.11)}$$

suivant laquelle nous trouvons la projection de la vitesse v_x

$$v_x = (2 \operatorname{rot} \bar{A})_x = \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\int\limits_L \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} dy_1 - \int\limits_L \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} dz_1 \right). \qquad \text{(VII.12)}$$

La dérivation par rapport aux variables x, y, z est portée sous le signe de l'intégrale, étant donné que la position de l'axe du tourbillon L se détermine seulement par les coordonnées x_1, y_1, z_1. En calculant les dérivées

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z_1 - z}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} = \frac{y_1 - y}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{x_1 - x}{r^3}$$

et en les portant dans l'expression de v_x, nous aurons

$$v_x = \frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_L \left(\frac{y_1 - y}{r^3} dz_1 - \frac{z_1 - z}{r^3} dy_1 \right). \qquad \text{(VII.13)}$$

Donnons à l'expression (VII.13) une forme vectorielle plus condensée. Pour cela, désignons par $\bar{r}^0$ et $\bar{l}^0$ les vecteurs unités du rayon vecteur $\bar{r}$ et de la tangente à l'axe du contour. Il est évident que $\bar{r} = r\bar{r}^0$, $d\bar{l} = \bar{l}^0 dl$. Examinons le produit vectoriel $\bar{r} \times d\bar{l}$ et calculons sa projection sur l'axe des x

$$(\bar{r} \times d\bar{l})_x = [(y - y_1) dz_1 - (z - z_1) dy_1].$$

En comparant la relation obtenue à l'expression sous le signe somme pour v_x, on se convainc qu'en introduisant les vecteurs unités $\bar{r}^0$ et $\bar{l}^0$, on peut représenter (VII.13) ainsi:

$$v_x = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_L \frac{(\bar{r} \times d\bar{l})_x}{r^3} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_L \frac{(\bar{r}^0 \times \bar{l}^0)_x}{r^2} dl. \qquad \text{(VII.14)}$$

En écrivant les formules analogues pour v_y et v_z et en les réunissant, nous obtenons la relation pour $\bar{v}$ sous la forme

$$\bar{v} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_L \frac{\bar{r}^0 \times \bar{l}^0}{r^2} dl. \qquad \text{(VII.15)}$$

La vitesse élémentaire $d\bar{v}$, induite par un segment du filet tourbillon, est

$$d\bar{v} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\bar{r}^0 \times \bar{l}^0}{r^2}\,dl, \qquad \text{(VII.16)}$$

et son module dv

$$dv = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\sin\alpha}{r^2}\,dl, \qquad \text{(VII.17)}$$

où α est l'angle entre la direction du rayon vecteur $\bar{r}$ et la tangente à l'axe du tube tourbillon (fig. VII.2,*b*).

Les formules, analogues aux (VII.15)-(VII.17), ont été pour la première fois déduites par Biot et Savart qui étudiaient le champ magnétique induit par un courant circulant dans un conducteur curviligne, et pour cette raison elles ont été appelées en mécanique des fluides formules de Biot et Savart.

Les vitesses $\bar{v}$ engendrées par les tourbillons sont souvent appelées vitesses induites. Comme il suit de ci-dessus, les formules de Biot et Savart ont un caractère purement cinématique, c'est-à-dire elles sont valables aussi bien pour un fluide visqueux que pour un fluide parfait.

Pour déterminer les pressions dans les zones des courants tourbillonnaires en cas d'un fluide parfait on peut faire appel à l'intégrale de Bernoulli. Si en dehors des tubes tourbillons le mouvement du fluide est potentiel, alors pour cette région est valable l'intégrale d'Euler.

§ 40. CHAMP DE VITESSES ET DE PRESSIONS ENGENDRÉES PAR UN TUBE TOURBILLON RECTILIGNE

Déterminons la vitesse induite par un tube tourbillon à axe rectiligne en un point M (fig. VII.3). La circulation de la vitesse autour du tube tourbillon Γ est donnée. Isolons un segment fini du tube tourbillon AB. Les rayons vecteurs r_1 et r_2 et les angles α_1 et α_2 formés par eux avec l'axe du tourbillon sont montrés sur la fig. VII.3. Désignons par h la distance du point M jusqu'au tube tourbillon.

Séparons sur le segment AB un segment élémentaire $CD = dl$. Du point C abaissons une perpendiculaire sur le rayon vecteur DM. Du triangle CDK nous avons

$$CK = r\,d\alpha = dl \sin\alpha.$$

De plus, $h = r \sin\alpha$. En utilisant (VII.17) et en intégrant dv dans les limites de α_1 à α_2 dans le sens des angles croissants, nous ob-

tenons une vitesse induite par le segment du tourbillon AB au point M

$$v=\frac{\Gamma}{4\pi h}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\,d\alpha=\frac{\Gamma}{4\pi h}(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1). \qquad \text{(VII.18)}$$

Examinons deux cas particuliers importants.

Le premier cas: un tube tourbillon est de longueur infinie. Dans ce cas $\alpha_1\to 0$, $\alpha_2\to\pi$ et la vitesse

$$v=\frac{\Gamma}{2\pi h}. \qquad \text{(VII.19)}$$

Il est évident que l'image de l'écoulement du fluide dans n'importe quel plan perpendiculaire à l'axe du tourbillon est identique,

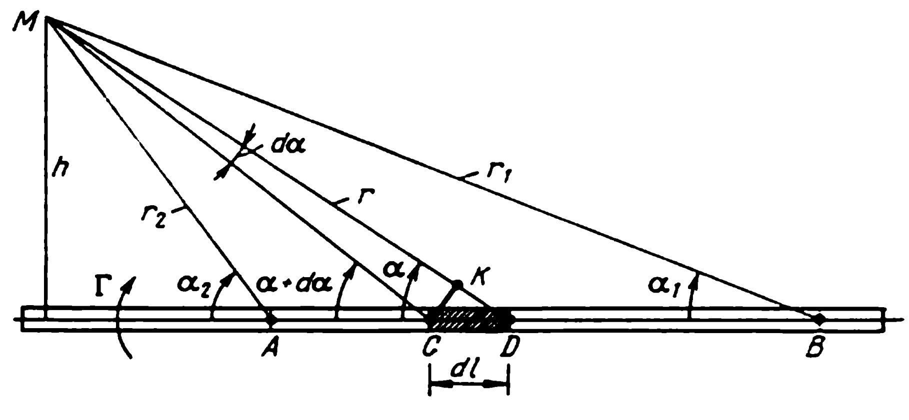


Fig. VII.3

c'est-à-dire que l'écoulement est plan. La comparaison montre que (VII.19) coïncide avec l'expression de la vitesse pour le cas d'un écoulement plan avec circulation (V.28).

Le second cas: un tourbillon semi-infini s'étendant de l'axe des y à l'infini. Etant donné que suivant le théorème cinématique de Helmholtz un tourbillon ne peut pas se terminer au milieu d'un fluide, on doit partir de l'hypothèse que l'axe des y correspond à la limite du corps solide à partir duquel partent les tubes tourbillons semi-infinis. Alors $\alpha_1\to 0$, $\alpha_2=\pi/2$ et la vitesse du tourbillon semi-infini est

$$v=\frac{\Gamma}{4\pi h}. \qquad \text{(VII.20)}$$

De cette façon, le tourbillon semi-infini induit une vitesse deux fois moindre que celui infini. La formule (VII.20) est utilisée dans la théorie de l'aile d'envergure finie.

Examinons d'une façon plus détaillée le cas d'un tube tourbillon infini se trouvant dans un fluide au repos. Les vitesses engendrées par ce tube se déterminent par la relation (VII.19). En ce qui concerne le centre du tube tourbillon $h=0$, la valeur de la vitesse dans celui-ci, déterminée à l'aide de cette formule, s'avérera infiniment

grande. Pour cette raison, la distribution des vitesses dans la zone contiguë directement au centre du tourbillon doit s'exprimer par une autre relation satisfaisant à la condition de la vitesse finie dans cette zone.

Admettons quelques hypothèses relatives à la construction du tube tourbillon. Nous considérerons que la turbulence n'est concentrée que dans le noyau du tourbillon de rayon $h = r_t$, comme sur la fig.

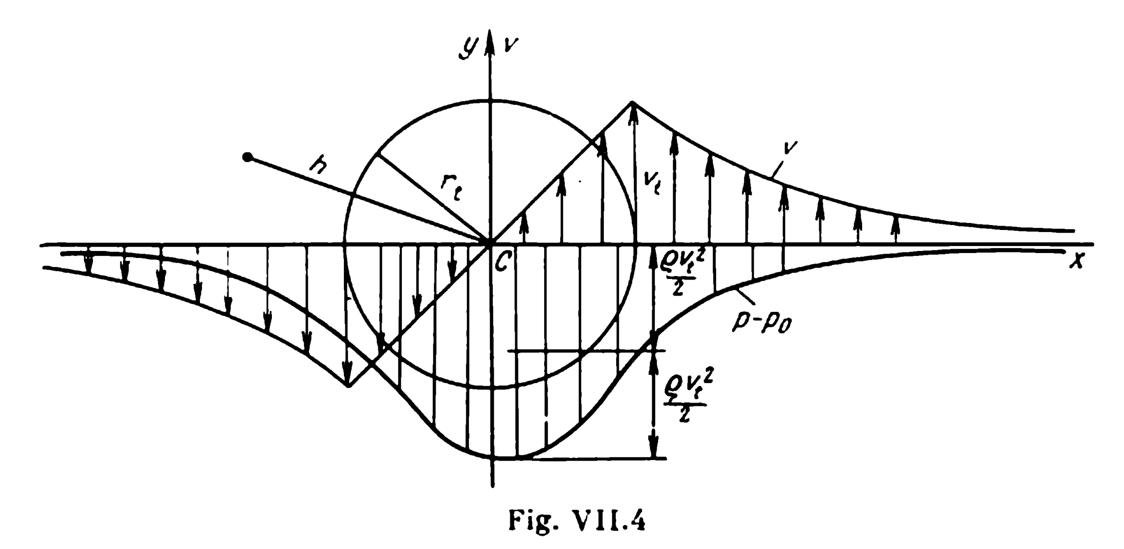


Fig. VII.4

VII.4, où il est montré la section transversale du tube tourbillon. En dehors de la surface cylindrique de rayon r_t (en dehors du noyau du tourbillon) le mouvement du fluide est irrotationnel.

En première approximation, on peut considérer les vitesses angulaires de rotation des particules du fluide dans le noyau constantes ω = const, d'où il suit que la distribution des vitesses dans celui-ci suit une loi linéaire.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } h < r_t, \ v = \omega h. \\ \text{En dehors du noyau du tourbillon } v = \frac{\Gamma}{2\pi h}. \end{array}\right\} \quad \text{(VII.21)}$$

L'image de la distribution des vitesses dans le plan des xy est montrée sur la fig. VII.4; pour $h \to \infty$ suivant (VII.17) $v = 0$, c'est-à-dire que le fluide au loin du tourbillon est au repos, pour $h = 0$ la vitesse du fluide au centre du tourbillon $v_c = 0$. On en déduit que dans un fluide au repos à l'infini le déplacement d'un tube tourbillon élémentaire n'a pas lieu.

Etudions le champ des pressions engendrées par le tourbillon. L'expression de la pression en dehors du noyau du tourbillon est d'après (IV.19)

$$p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} = p_0 - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi h^2},$$

où p_0 est la pression dans le fluide au repos.

Cette expression est valable jusqu'aux limites du tube tourbillon $h = r_t$. En posant dans celle-ci $h = r_t$, nous obtenons la pression régnant à la limite

$$p_t = p_0 - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi r_t^2} = p_0 - \frac{\rho v_t^2}{2}. \qquad \text{(VII.22)}$$

De cette formule on voit qu'à mesure qu'on s'approche du tourbillon la pression diminue.

A l'intérieur du noyau, l'écoulement du fluide est rotationnel et l'intégrale d'Euler ne peut être utilisée. Comme la loi de distribution des vitesses dans le noyau est connue, cherchons à déterminer la pression directement à partir des équations différentielles du mouvement d'un fluide parfait. Pour un écoulement plan permanent, en négligeant les forces massiques, on peut représenter ces équations sous la forme suivante

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x};$$
$$\frac{dv_y}{dt} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Suivant la fig. VII.4, à l'intérieur du noyau du tourbillon

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x.$$

D'où il vient

$$\omega^2 x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \omega^2 y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

En multipliant la première équation du système par dx, la seconde par dy et en les additionnant, on obtient

$$\omega^2 x\, dx + \omega^2 y\, dy = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) = \frac{1}{\rho} dp.$$

En intégrant cette dernière équation et en utilisant (VII.21), nous trouvons

$$p = \rho \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + C = \frac{\rho \omega^2 h^2}{2} + C = \frac{\rho v^2}{2} + C.$$

Pour déterminer la constante arbitraire C, utilisons la dernière équation à la limite du tourbillon $h = r_t$, d'où

$$C = p_t - \frac{\rho v_t^2}{2}.$$

En tenant compte de la valeur de C, nous avons

$$p = p_t + \frac{\rho v^2}{2} - \frac{\rho v_t^2}{2} \qquad \text{(VII.23)}$$

ou suivant la relation (VII.22)

$$p = p_0 - \rho v_t^2 + \frac{\rho v^2}{2}. \qquad \text{(VII.24)}$$

Au centre du tourbillon $v_c = 0$, c'est-à-dire

$$p_c = p_0 - \rho v_t^2 = p_t - \frac{\rho v_t^2}{2} . \qquad \text{(VII.25)}$$

Comme on le voit de la fig. VII.4, dans le milieu entourant le tube tourbillon la pression diminue sans cesse au fur et à mesure qu'on se rapproche de l'axe du tourbillon, d'où aspiration de liquide ou de matériaux solides dans ce noyau.

§ 41. COUCHES TOURBILLONNAIRES

En résolvant les problèmes de la mécanique des fluides, on a souvent affaire à un système tourbillonnaire composé de tourbillons répartis de façon continue suivant une certaine ligne ou une surface, c'est-à-dire formant une couche tourbillonnaire.

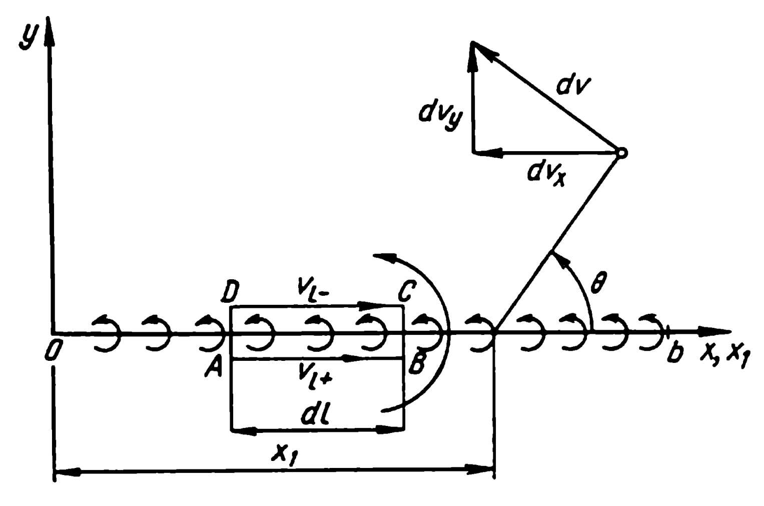


Fig. VII.5

Examinons une couche tourbillonnaire dont les centres de tourbillons sont répartis de façon continu le long d'une ligne. Pour simplifier, admettons que cette ligne coïncide avec l'axe des x (fig. VII.5). Le mouvement du fluide est considéré comme plan, c'est-à-dire que les axes des tourbillons sont perpendiculaires au plan des xy. Soient sur un élément Δl des tourbillons à circulation $\Delta\Gamma$. La valeur de la circulation rapportée à la longueur de l'élément d'arc s'appelle circulation linéaire. En la désignant par γ nous aurons

$$\gamma = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta l} = \frac{d\Gamma}{dl} . \qquad \text{(VII.26)}$$

Il est évident que les dimensions de $[\gamma] = LT^{-1}$, c'est-à-dire se confondent avec les dimensions de la vitesse.

Déterminons la propriété fondamentale de la couche tourbillonnaire ; à cet effet, calculons la circulation de la vitesse le long du contour élémentaire $ABCDA$ (fig. VII.5). Désignons par v_{l+} la compo-

sante tangentielle de la vitesse au-dessus de la ligne, et par v_{l-}, au-dessous. La circulation $d\Gamma$ est égale à la somme des circulations le long des portions; en adoptant le sens positif de parcours montré sur la figure par une flèche, nous trouvons

$$d\Gamma_{ABCDA} = d\Gamma_{AB} + d\Gamma_{BC} + d\Gamma_{CD} + d\Gamma_{DA} = v_{l+}\,dl - v_{l-}\,dl, \quad \text{(VII.27)}$$

d'où, en utilisant (VII.26), il vient

$$\gamma = \frac{d\Gamma}{dl} = v_{l+} - v_{l-}. \quad \text{(VII.28)}$$

Comme il résulte de cette formule, la composante tangentielle de la vitesse en passant par une couche tourbillonnaire subit une discontinuité numériquement égale à l'intensité linéaire des tourbillons. On en déduit que s'il y a un écoulement avec des discontinuités des composantes longitudinales des vitesses, alors à la surface de la discontinuité de la vitesse apparaît une couche tourbillonnaire avec une circulation linéaire γ déterminée par la formule (VII.28).

Cherchons à déterminer les relations pour le champ des vitesses engendré par une couche tourbillonnaire disposée sur un segment rectiligne de longueur b. Soit $\gamma(x_1)$ la circulation linéaire d'un tourbillon placé au centre du segment élémentaire de longueur dx_1. La circulation élémentaire sur ce segment est $d\Gamma = \gamma dx_1$. La vitesse élémentaire engendrée suivant (VII.19) est

$$dv = \frac{d\Gamma}{2\pi r} = \frac{\gamma\,dx_1}{2\pi r}, \quad \text{(VII.29)}$$

et ses projections sur les axes de coordonnées selon la fig. VII.5

$$\left.\begin{aligned} dv_x &= -dv\sin\theta = \frac{\gamma y\,dx_1}{2\pi r^2};\\ dv_y &= dv\cos\theta = \frac{\gamma(x-x_1)\,dx_1}{2\pi r^2}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII.30)}$$

En tenant compte de ce que $r = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}$ et en intégrant (VII.30) dans les limites du segment, nous obtenons les expressions pour les projections des vitesses engendrées par le segment tourbillonnaire

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^b \frac{\gamma y\,dx_1}{(x-x_1)^2+y^2};\\ v_y &= \frac{1}{2\pi}\int_0^b \frac{\gamma(x-x_1)\,dx_1}{(x-x_1)^2+y^2}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII.31)}$$

En considérant le plan des xy comme le domaine de la variable complexe $z = x + iy$, on peut établir l'expression de la vitesse complexe du courant engendré par le segment tourbillonnaire

$$v_x - iv_y = \frac{1}{2\pi i}\int_0^b \frac{\gamma\,dx_1}{z - z_1}. \quad \text{(VII.32)}$$

CHAPITRE VIII

DYNAMIQUE DES FLUIDES RÉELS

§ 42. VISCOSITÉ DES FLUIDES RÉELS. FORMULE DE NEWTON

Tout fluide réel possède la propriété de la viscosité. La viscosité est une des causes de la résistance qui apparaît en écoulement d'un fluide dans les conduites et les canaux (la mécanique des fluides interne) et au mouvement d'un corps (la mécanique des fluides externe).

Dans un fluide réel les forces qui s'exercent entre les couches sont tangentes à la direction de leur mouvement. Les couches de fluide disposées plus près de la paroi ralentissent les couches supérieures, ce qui donne la forme caractéristique à l'épure des vitesses représentée sur la fig. VIII.1.

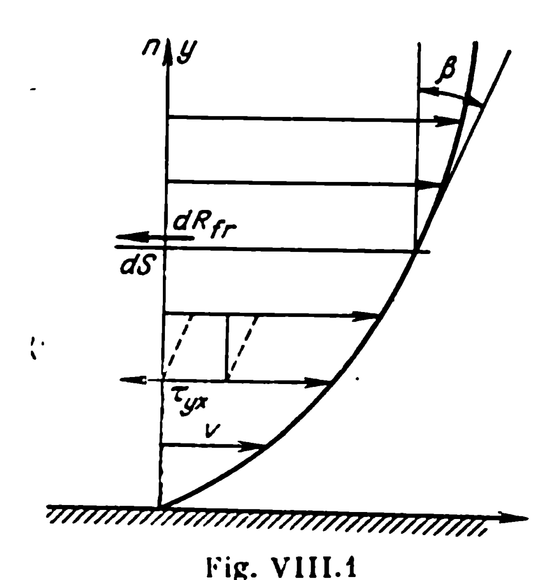


Fig. VIII.1

Les forces de frottement qui apparaissent entre les couches de fluide en mouvement l'une par rapport à l'autre avec une surface de contact dS (fig. VIII.1) peuvent être déterminées d'après la formule de Newton

$$dR_{fr} = \mu \frac{\partial v}{\partial n} dS \quad \text{(VIII.1)}$$

ou, en rapportant la force de frottement à la surface dS et en désignant la contrainte tangentielle obtenue par τ,

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n} . \quad \text{(VIII.2)}$$

Dans cette formule $\partial v/\partial n$ est la dérivée caractérisant la variation de la vitesse dans la direction transversale à la couche, qui d'après la fig. VIII.1 est $\partial v/\partial n = \operatorname{tg} \beta$, μ étant le coefficient dynamique de la viscosité. dépendant des propriétés du fluide.

La formule (VIII.2), proposée par Newton d'abord comme une hypothèse et soumise ensuite à une vérification expérimentale soignée,

est à présent usuelle en mécanique des fluides pour le calcul des contraintes tangentielles en mouvement laminaire du fluide.

Un écoulement de fluide réel est dit laminaire s'il n'y a pas de mélange entre ses couches. Un mouvement désordonné d'un fluide réel avec mélange intensif des particules de fluides est dit turbulent. En cas d'un écoulement turbulent, la formule de Newton ne peut pas être utilisée.

Le coefficient dynamique de viscosité μ dépend de la nature de fluide, de sa température et (faiblement) de sa pression. Les dimensions de μ suivant (VIII.2) sont $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$.

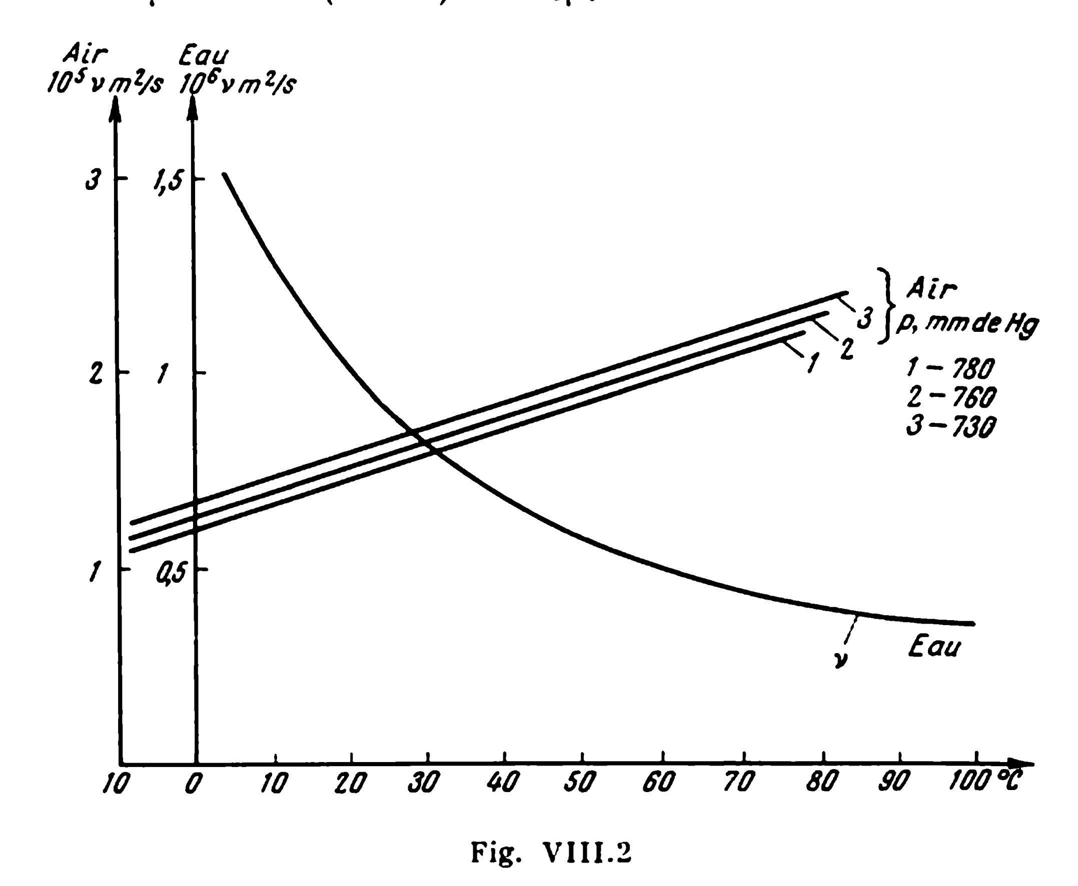


Fig. VIII.2

[1] Dans le système S.I., la viscosité s'exprime en N s m^{-2} et dans le système M.Kp.S. en kgf·s m^{-2}.

Un large emploi en mécanique des fluides trouve aussi le coefficient cinématique de viscosité ν, représentant le rapport de μ à la masse volumique ρ

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} . \qquad \text{(VIII.3)}$$

Les dimensions de $|\nu| = L^2T^{-1}$, d'où il résulte que le coefficient ν ne contient pas les caractéristiques dynamiques.

La fig. VIII.2 montre les dépendances du coefficient cinématique ν en fonction de la température pour l'eau et en fonction de la tem-

pérature et de la pression pour l'air. Ainsi que l'on voit de la figure, pour l'eau ce coefficient est environ d'un ordre moindre que pour l'air. Ceci montre que l'eau est relativement moins visqueuse que l'air. Les coefficients de viscosité μ et ν se déterminent expérimentalement.

Elucidons la cause physique de l'apparition de la viscosité sur l'exemple du gaz. Pour cela il faut tenir compte de sa structure moléculaire. Les molécules d'un gaz effectuent un mouvement thermique chaotique en passant d'une couche à l'autre, ce mouvement s'accompagnant d'un échange de la quantité de mouvement entre les couches.

Suivant la loi de la variation de la quantité de mouvement, entre les couches apparaissent des forces de frottement. Cet échange des quantités de mouvement s'effectue au « niveau moléculaire ». Ainsi, la viscosité est donc le résultat du mouvement chaotique des molécules dans un gaz.

En introduisant le coefficient de viscosité μ comme une caractéristique physique d'un fluide et en tenant compte ainsi indirectement de l'influence de ce mouvement moléculaire dans le gaz, on peut par la suite utiliser toujours l'hypothèse de la continuité pour le fluide visqueux, sans prendre en compte les interactions moléculaires.

De la formule (VIII.2) on voit que la contrainte tangentielle est nulle si $\mu = 0$, c'est-à-dire si le fluide est non visqueux. Le second facteur déterminant l'existence des contraintes tangentielles dans le fluide est lié à la variation de la vitesse suivant la normale. Si $\partial v/\partial n = 0$, alors $\tau = 0$ même dans un fluide visqueux.

Montrons que l'apparition des contraintes tangentielles dans un fluide visqueux est liée à la présence des vitesses relatives de déformations. Suivant la fig. VIII.1, la contrainte tangentielle agit sur une aire, la normale à laquelle coïncide avec l'axe des y. Alors $\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$.

Conformément aux notations des contraintes tangentielles adoptées au § 3 $\tau = \tau_{yx}$. En tenant compte de ce fait, récrivons la formule (VIII.2)

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\mu\theta_z, \tag{VIII.4}$$

où la grandeur θ_z représente la vitesse relative de la déformation angulaire de la particule, c'est-à-dire suivant cette formule la contrainte tangentielle est proportionnelle (avec le coefficient de proportionnalité 2μ) à la vitesse relative de la déformation angulaire.

Suivant l'expression (III.20) la vitesse angulaire dans un écoulement plan, où $\partial v_x/\partial y \neq 0$, ω_z est différent de zéro, et par conséquent, le mouvement d'un fluide visqueux dans une région voisine des parois est tourbillonnaire.

Remarquons que, comme le montre l'expérience, ce n'est pas dans tout fluide réel que la liaison entre les contraintes tangentielles et

les vitesses de déformation est décrite par la formule de Newton (VIII.2) ou par (VIII.4). Les fluides régis par cette loi sont dits normaux ou newtoniens. Parmi les fluides normaux on peut citer tels que l'eau, l'air, les produits pétroliers, le mercure, etc.

Les fluides dans lesquels la liaison entre les contraintes et les vitesses de déformation n'obéit pas à la formule (VIII.2) sont dits fluides non newtoniens. Parmi ceux-ci il y a certaines huiles de graissage à de basses températures, les solutions colloïdales, les peintures à l'huile, les solutions argileuses, ainsi que les solutions dans l'eau des combinés de grande masse moléculaire. Le mouvement des fluides non newtoniens est étudié en rhéologie, ainsi que dans les domaines spéciaux de la mécanique des fluides.

§ 43. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE RÉEL

Pour obtenir une équation du mouvement d'un fluide réel, utilisons les équations générales de la dynamique des fluides sous les contraintes (I.42)

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = \rho F_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} ;$$

$$\rho \frac{dv_y}{dt} = \rho F_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} ;$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = \rho F_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} .$$

Dans ces équations sont données les projections des contraintes des forces massiques F_x, F_y, F_z et (pour un fluide incompressible) la masse volumique ρ. Il faut déterminer les trois projections des vitesses v_x, v_y, v_z, les contraintes normales p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} et les contraintes tangentielles. Suivant la propriété de symétrie des contraintes tangentielles $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, il suffit de trouver trois contraintes tangentielles, par exemple τ_{xy}, τ_{xz} et τ_{yz}. Aux trois équations (I.42) qui comportent neuf inconnues s'ajoute l'équation de la continuité (III.43)

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Ainsi, le système d'équations (I.42) et (III.43) s'avère non fermé; dans ce système le nombre d'inconnues dépasse le nombre d'équations. Pour trouver ces inconnues, il faut composer des équations supplémentaires qui lieraient des contraintes normales et tangentielles apparaissant dans le fluide à ses vitesses.

La viscosité conduit non seulement à l'apparition des contraintes tangentielles, mais aussi à la variation des contraintes normales par rapport au cas d'un fluide parfait.

Supposons qu'une contrainte normale suivant n'importe quel axe peut être représentée sous la forme de deux termes

$$p_{xx} = -p + k_{xx}; \ p_{yy} = -p + k_{yy}; \ p_{zz} = -p + k_{zz}. \quad \text{(VIII.5)}$$

Le premier terme de ces expressions est p, pression dans un fluide visqueux; le second terme, qui tient compte de l'influence de la viscosité, ne dépend pas de la pression. Nous admettrons que la formule de Newton (VIII.4), obtenue pour le cas particulier d'un écoulement à une dimension, est valable aussi pour le cas général d'un écoulement à trois dimensions. Ceci permet d'introduire l'hypothèse généralisée de Newton, suivant laquelle les contraintes qui dépendent de la viscosité sont proportionnelles aux vitesses de déformation relatives correspondantes de la particule fluide. Le coefficient de proportionnalité reste ici le même que dans la formule (VIII.4). En employant les notations (III.20) pour les vitesses relatives des déformations linéaires et angulaires, nous pouvons écrire suivant cette hypothèse

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu\varepsilon_x = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; \\ p_{yy} &= -p + 2\mu\varepsilon_y = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; \\ p_{zz} &= -p + 2\mu\varepsilon_z = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad \text{(VIII.6)}$$

où ε_x, ε_y, ε_z sont les vitesses relatives des déformations linéaires.

Les contraintes tangentielles suivant l'hypothèse généralisée de Newton sont

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = 2\mu\theta_z = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right); \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = 2\mu\theta_y = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right); \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = 2\mu\theta_x = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right), \end{aligned}\right| \quad \text{(VIII.7)}$$

où θ_x, θ_y, θ_z sont les vitesses relatives des déformations angulaires.

Remarquons que dans un corps élastique, suivant la loi généralisée de Hooke, les contraintes sont proportionnelles aux déformations relatives correspondantes. En cas d'un fluide, c'est-à-dire d'un milieu facilement déformable, les contraintes, suivant la loi généralisée de Newton, sont proportionnelles aux vitesses relatives de déformations.

Calculons la moyenne arithmétique des valeurs des contraintes normales suivant trois directions perpendiculaires entre elles en

tenant en même temps compte de l'équation de continuité (III.43)

$$\frac{p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}}{3}=-p+\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-p, \quad \text{(VIII.8)}$$

où p est la pression hydrodynamique.

De (VIII.8) il suit que la pression dans un fluide visqueux incompressible est la moyenne arithmétique prise avec le signe contraire des contraintes normales suivant trois directions perpendiculaires entre elles. Le signe moins dans l'équation (VIII.8) signifie que la pression dans un fluide est toujours dirigée en sens inverse de la normale extérieure (cf. § 3), c'est-à-dire que dans ce fluide ne peuvent agir que des pressions normales de contraction.

En vertu des formules (VIII.6) et (VIII.7), on peut représenter la matrice suivante de contraintes dans un fluide visqueux, qui détermine suivant la formule (I.22) son état de contrainte

$$\begin{vmatrix} p_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & p_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & p_{zz} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} k_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & k_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & k_{zz} \end{vmatrix}. \quad \text{(VIII.9)}$$

La seconde matrice des contraintes, dépendant de la viscosité, d'après l'hypothèse généralisée de Newton est liée à la matrice des vitesses relatives de déformation par la relation

$$\begin{vmatrix} k_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & k_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & k_{zz} \end{vmatrix}=$$

$$=2\mu\begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}; & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right); & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right); & \frac{\partial v_y}{\partial y}; & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right); & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right); & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad \text{(VIII.10)}$$

Pour obtenir l'équation du mouvement d'un fluide réel, introduisons dans le deuxième membre de la première équation de (I.42) les valeurs des contraintes normales et tangentielles suivant les hypothèses adoptées (VIII.6) et (VIII.7)

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-p+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right]=$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta v_x, \qquad \text{(VIII.11)}$$

où Δ est l'opérateur laplacien.

Dans cette expression le coefficient μ est considéré constant, l'ordre de la dérivation est changé $\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} \ldots \right)$ et on a tenu compte de l'équation de continuité. Les dérivées des contraintes dans les seconde et troisième équations de (I.42) se transforment de façon analogue.

En tenant compte de (VIII.11), nous obtenons un système d'équations du mouvement d'un fluide réel dites équations de Navier-Stokes

$$\left.\begin{aligned}
&\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \\
&\qquad = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta v_x ; \\
&\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \\
&\qquad = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v_y ; \\
&\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\
&\qquad = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z ; \\
&\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.12)}$$

Dans ce système, l'accélération totale au premier membre est exprimée au moyen des accélérations locale et convective ; la quatrième équation, fermant le système, est l'équation de continuité ; le nombre d'inconnues (v_x, v_y, v_z, p) correspond au nombre d'équations.

La forme vectorielle de l'équation de Navier-Stokes s'obtient en multipliant les équations scalaires (VIII.12) par les vecteurs unités des axes et en les additionnant ensuite membre à membre

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) =$$
$$= \rho \bar{F} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \bar{v}. \qquad \text{(VIII.13)}$$

L'équation (VIII.13) diffère de l'équation d'Euler du mouvement d'un fluide parfait par le membre caractérisant les forces de viscosité et passe dans celle-ci pour $\mu = 0$.

Les équations (VIII.12) sont des équations différentielles non linéaires du second ordre aux dérivées partielles. Leur non-linéarité est due au terme à l'accélération convective. Leurs solutions doivent être soumises aux conditions initiales et aux limites. Tous les raisonnements relatifs aux conditions initiales pour l'écoulement d'un fluide parfait (§ 14) sont valables également pour un fluide visqueux, ce qui change c'est la condition aux limites sur les frontières solides de l'écoulement.

Examinons la condition aux limites sur un corps baigné par un fluide réel (fig. VIII.1). A côté des conditions d'imperméabilité et

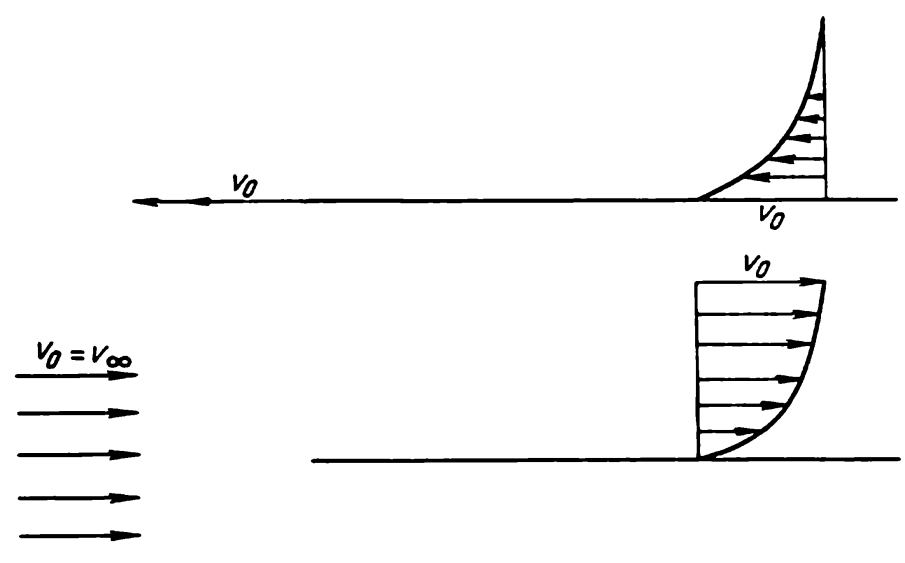


Fig. VIII.3

d'écoulement sans décollement ($v_n = 0$), à la surface est remplie la condition d'adhérence du fluide, c'est-à-dire la composante tangentielle de la vitesse v_τ est nulle.

De nombreuses mesures physiques du profil de la vitesse au voisinage de la paroi ont permis d'établir que la vitesse des particules fluides sur la paroi tend vers zéro. La plus petite distance de la particule fluide à la paroi, enregistrée au cours de ces expériences, était d'environ 0,05 mm. Une confirmation indirecte de la justesse de la condition aux limites pour l'adhérence a été la coïncidence quantitative totale de beaucoup de solutions théoriques basées sur cette condition avec les données des expériences. L'observation de la condition d'adhérence ne dépend aucunement du matériau de la surface et du degré de rugosité de celle-ci. Cette condition est observée de façon égale en écoulement autour des surfaces des fluides mouillants ou non (en qualité d'exemple, on peut citer l'écoulement du mercure dans un tube de verre). A présent, cette condition est généralement admise en mécanique des fluides visqueux. Elle ne peut être enfreinte que dans le cas d'écoulement des gaz très raréfiés.

En cas du mouvement d'un corps dans un fluide au repos, la condition d'adhérence est également remplie. Les particules de fluide contiguës au corps sont entraînées par celui-ci. La fig. VIII.3 représente les épures de la vitesse pour le mouvement d'une plaque dans un fluide au repos et pour l'écoulement d'un fluide autour d'une plaque.

§ 44. PROPRIÉTÉS ESSENTIELLES DES ÉCOULEMENTS D'UN FLUIDE RÉEL

Examinons certaines propriétés générales des équations du mouvement d'un fluide réel. Nous considérerons les forces massiques comme potentielles $F = \operatorname{grad} U$. En appliquant au deuxième membre de (VIII.13) la transformation de Groméko (IV.10), en regroupant les termes qui se trouvent sous le signe du gradient et en divisant par ρ, nous obtenons

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U\right) = -\operatorname{rot}\bar{v} \times \bar{v} + \nu\Delta\bar{v}. \quad \text{(VIII.14)}$$

Elucidons la possibilité d'existence des écoulements irrotationnels d'un fluide réel pour lesquels $\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$ et le potentiel φ vérifie l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$.

En substituant $\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$ dans l'équation de continuité (III.43) nous aurons

$$\operatorname{div} \bar{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta\varphi = 0,$$

c'est-à-dire φ satisfait à l'équation de Laplace. Vu que

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \bar{v} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0$$

et $\Delta\bar{v} = \Delta \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \Delta\varphi = 0$, et en portant les valeurs trouvées dans (VIII.14), nous obtenons l'intégrale de Lagrange sous la forme

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U\right) = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = C,$$

où C est la grandeur dépendant du temps.

Ainsi, l'écoulement irrotationnel d'un fluide satisfait de façon formelle à l'équation de mouvement d'un fluide réel. Cependant, lors de l'écoulement autour d'un corps, sur sa surface doivent se vérifier deux conditions aux limites

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad v_\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0.$$

Il est démontré en mathématiques qu'il n'existe pas de solution générale de l'équation de Laplace telle qui satisfasse simultanément à deux conditions aux limites pour les dérivées tangentielle et normale

du potentiel sur le corps. Il en résulte que le mouvement irrotationnel d'un fluide réel, satisfaisant à l'équation de mouvement, ne satisfait pas aux conditions aux limites sur le corps. Autrement dit, le mouvement irrotationnel d'un fluide réel dans toute la zone de l'écoulement, y compris le voisinage des parois solides, ne peut pas avoir lieu, c'est-à-dire que les équations de Navier-Stokes décrivent l'écoulement rotationnel d'un fluide.

La non-linéarité des équations de Navier-Stokes rend impossible l'application du principe de la superposition des solutions.

Comme il suit de ce qui a été énoncé ci-dessus, l'utilisation du potentiel de la vitesse dans l'étude du mouvement d'un fluide visqueux est impossible, ce qui rend difficile la résolution des équations de son mouvement.

Comme on le sait, toute ligne de courant dans un fluide parfait peut être remplacée par une paroi solide sans perturber le mouvement du fluide. Ceci se confirme par le fait que la condition aux limites pour la composante normale de la vitesse sur la ligne de courant et sur la paroi est la même : $v_n = 0$. En cas d'un fluide réel, sur la paroi apparaît une condition aux limites supplémentaire $v_\tau = 0$, absente sur la ligne de courant. On en déduit que pour un fluide réel, le remplacement d'une ligne de courant quelconque par une paroi solide n'est pas justifié.

Examinons les possibilités d'obtenir les intégrales des équations de Navier-Stokes pour l'écoulement permanent d'un fluide.

En utilisant les mêmes raisonnements que lors de la déduction de l'intégrale de Bernoulli pour un fluide parfait (§ 15) nous obtiendrons

$$d\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}-U\right)=\nu(\Delta\bar{v}\cdot d\bar{r}). \qquad \text{(VIII.15)}$$

Cette égalité est remplie sur la ligne de courant. Son premier membre représente une différentielle de l'énergie mécanique spécifique. Dans le cas d'un fluide parfait $\nu\,(\Delta\bar{v}\cdot d\bar{r}) = 0$ et le trinôme $\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}-U = \text{const}$, c'est-à-dire que la loi de conservation de l'énergie mécanique le long d'une ligne de courant est observée.

Dans un fluide réel le terme $\nu\,(\Delta\bar{v}\cdot d\bar{r})$ caractérisant le travail spécifique des forces de viscosité dépensé pour le déplacement $d\bar{r}$ n'est pas nul. Etant donné que les forces de viscosité sont dirigées contre le courant, le terme $\nu\,(\Delta\bar{v}\cdot d\bar{r}) = -dA_\nu$ est négatif, c'est-à-dire

$$d\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}-U\right)=-dA_\nu, \qquad \text{(VIII.16)}$$

d'où l'on voit que la variation de l'énergie mécanique le long d'une ligne de courant est numériquement égale au travail des forces de

viscosité. En intégrant (VIII.16) le long de la ligne de courant du point 1 jusqu'au point 2 et en désignant les paramètres de l'écoulement par des indices correspondants, nous trouvons

$$\left(\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}-U_1\right)-\left(\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}-U_2\right)=A_v, \qquad \text{(VIII.17)}$$

où $A_v = A_{v2} - A_{v1} > 0$ est le travail spécifique des forces de viscosité lors du déplacement du point 1 au point 2.

A_v est une énergie « perdue » ou énergie dissipée puisqu'elle ne peut plus être utilisée comme énergie mécanique. D'après les équations de la mécanique des fluides on ne peut pas déterminer en quoi se transforme l'énergie A_v. Cependant, en partant des considérations basées sur les lois de la thermodynamique, il suit que l'énergie perdue ou dissipée se transforme en chaleur. Vu une grande capacité thermique de l'eau, l'augmentation de sa température, due à la dissipation de l'énergie, est insignifiante et en écoulement autour des corps ne constitue que des dixièmes de degré.

Notons qu'il est difficile de déterminer théoriquement l'énergie perdue.

Tout cela témoigne de ce qu'il est impossible d'obtenir les intégrales des équations du mouvement d'un fluide réel, analogues à celles connues pour un fluide parfait.

Jusqu'ici on n'a pas encore élaboré de méthodes générales de résolution des équations non linéaires de Navier-Stokes; les grandes difficultés sont dues au fait que ces équations doivent satisfaire simultanément à deux conditions aux limites sur la surface du corps: d'imperméabilité $v_n = 0$ et d'adhérence $v_\tau = 0$. Par suite, les solutions exactes de ces équations n'ont été obtenues que pour les cas particuliers les plus simples, où l'accélération convective peut être admise égale à zéro. Les termes non linéaires disparaissent de l'équation de Navier-Stokes et elle prend la forme

$$\rho\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}=\rho\bar{F}-\operatorname{grad} p+\mu\Delta\bar{v}. \qquad \text{(VIII.18)}$$

En écoulement permanent $\partial\bar{v}/\partial t = 0$.

Il y a des méthodes qui permettent de résoudre approximativement les équations de Navier-Stokes en cas d'écoulements lents de fluide réel. Dans ce cas il existe une accélération convective, mais les forces d'inertie sont très petites par rapport aux forces de viscosité de façon qu'on peut les négliger en première approximation. En adoptant ces hypothèses, Stokes a résolu le problème du mouvement lent d'une sphère de rayon r_0 dans un fluide réel avec une vitesse constante v_0; la force de résistance est dans ce cas

$$R_x=6\pi\mu v_0 r_0. \qquad \text{(VIII.19)}$$

Rappelons que pour un tel mouvement du corps dans un fluide parfait, le paradoxe d'Euler-d'Alembert est valable, c'est-à-dire $R_x = 0$ (voir § 22).

L'utilisation de la formule (VIII.19) pour l'eau avec $r_0 \approx 1$ cm est limitée par de très faibles vitesses $v_0 < 8 \cdot 10^{-3}$ cm/s.

La méthode, pratiquement plus importante, de la résolution approchée des équations de Navier-Stokes est basée sur le fait que les forces de viscosité se manifestent le plus au voisinage des frontières solides des corps dans l'écoulement fluide, tandis qu'à un certain éloignement de ces frontières, elles deviennent négligeables. Cette méthode, valable pour des grandes vitesses, s'est développée dans la théorie de la couche limite.

Les grands progrès du calcul numérique ont servi d'impulsion à l'utilisation des calculatrices électroniques numériques pour la résolution des équations de Navier-Stokes par les méthodes des différences. C'est de cette façon qu'on a pu étudier l'écoulement d'un fluide réel dans une niche, la stabilité de l'écoulement d'un fluide entre les deux cylindres en rotation et résoudre d'autres problèmes.

Ainsi, Fromm par exemple, à l'aide d'une calculatrice électronique, a résolu le problème de l'écoulement non stationnaire autour d'un obstacle cylindrique avec formation d'un sillage tourbillonnaire. Cet écoulement plan est décrit par les équations

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right);$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Pour la commodité de la résolution, on introduit la fonction de courant de l'écoulement ψ liée à la vitesse angulaire $\omega_z = \omega$ d'après les relations (III.60) et (III.20).

A la suite de la dérivation de la seconde équation de ce système par rapport à x, de la première par rapport à y et de la soustraction membre à membre de la seconde équation de la première, les termes contenant la pression disparaissent et on peut écrire l'équation pour la détermination de la turbulence

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\omega v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega v_y) = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right).$$

En se basant sur cette équation, on compose l'équation aux différences finies. Si les grandeurs ω, ψ, v_x et v_y en différents points du réseau de l'écoulement sont connues à l'instant t, alors on peut les déterminer aussi à l'instant $t + \Delta t$ (Δt étant le petit intervalle de temps). On devait connaître les valeurs de ces grandeurs à l'instant

initial. obtenues à la suite d'une solution approchée quelconque. Au cours des calculs, elles doivent vérifier les conditions aux limites du problème.

Fromm a étudié la formation des allées tourbillonnaires à l'arrière d'un obstacle ayant la forme d'une plaque de largeur b, placée en travers d'un écoulement se déplaçant à la vitesse v_∞ entre des parois parallèles. Les expériences montrent que pour des nombres de Reynolds ($\mathrm{Re} = v_\infty b/\nu$) relativement grands les tourbillons à l'arrière de l'obstacle sont non stationnaires. Les données obtenues au moyen d'une calculatrice électronique sur la structure de l'écoulement pour les nombres $\mathrm{Re} < 6000$ concordent bien avec les données expérimentales.

§ 45. NOTIONS DE LA THÉORIE DE LA SIMILITUDE ET DES MAQUETTES DES PROCESSUS HYDRODYNAMIQUES

Dans la plupart des cas présentant un intérêt pratique, la résolution des équations de mouvement d'un fluide visqueux est difficile. En même temps, la résolution des problèmes concrets sur le mouvement des corps dans un liquide et un gaz, sur l'écoulement des fluides dans les conduites et les canaux, conformément aux besoins des constructions navales, de l'aviation et de la construction des turbines, exige des solutions numériques déterminées avec une précision suffisante. C'est ainsi qu'on est amené en mécanique des fluides à effectuer des essais sur maquettes.

Deux types d'essais sont possibles: sur prototypes et sur maquettes. Le meilleur est d'effectuer les essais sur un prototype, ce qui permet d'étudier son comportement dans les conditions données de mouvement dans un fluide, mais ils sont généralement très coûteux et, de plus, dépendent fortement des conditions météorologiques.

Lorsqu'on effectue des essais sur les prototypes, un grand nombre de facteurs intervient, et il est difficile de déterminer l'action de chacun d'eux. Dans certains cas, en constructions navales, les essais sur prototypes sont irréalisables.

Pour cette raison, en mécanique des fluides on préfère avoir recours aux essais sur maquettes qui sont généralement des répliques à petite échelle des prototypes à construire. Dans ces conditions, il est très important de savoir effectuer convenablement les expériences pour pouvoir transposer les résultats obtenus au prototype à construire. A cet effet, il faut connaître le facteur de similitude des vitesses et des forces.

L'étude de tous ces problèmes est l'objet de la théorie de la similitude et des maquettes.

Les résultats expérimentaux, pour la commodité de comparaison et de leur utilisation, sont présentés généralement sous une forme sans dimensions. Le choix des paramètres sans dimensions, dont dé-

pend le phénomène, s'effectue également au moyen de la théorie de la similitude.

Pour observer la similitude mécanique de deux phénomènes qui ont lieu dans le prototype et le modèle, il faut que les données définissant chacun des deux phénomènes satisfassent à trois conditions de similitude: géométrique, cinématique (suivant les vitesses) et dynamique (suivant les forces). Les deux premières conditions sont nécessaires mais non suffisantes. La similitude dynamique assure la suffisance des conditions de similitude mécanique des phénomènes.

Formulons les exigences mathématiques imposées par les conditions de similitude géométrique et cinématique. Toutes les grandeurs qui se rapportent à la maquette seront affectées de l'indice « m » et celles qui se rapportent au prototype de l'indice « p ».

Les conditions de similitude géométrique exigent que les dimensions géométriques homologues dans les écoulements sur la maquette et sur le prototype doivent être proportionnelles.

Si on désigne par l_p, l_m, x_p, x_m les dimensions homologues quelconques dans les écoulements (par exemple, la largeur du canal, les coordonnées des points homologues), par L_p et L_m les dimensions linéaires caractéristiques homologues (par exemple, la longueur du corps), alors pour observer la similitude géométrique il faut que

$$\frac{l_p}{l_m}=\frac{x_p}{x_m}=\frac{L_p}{L_m}=k. \qquad \text{(VIII.20)}$$

La grandeur constante k s'appelle échelle de similitude. De (VIII.20) il suit que toutes les dimensions homologues du prototype s'obtiennent par multiplication des dimensions de la maquette par l'échelle de similitude. Le rapport des surfaces S et des volumes V homologues des deux écoulements géométriquement semblables sera respectivement

$$\frac{S_p}{S_m}=k^2, \quad \frac{V_p}{V_m}=k^3. \qquad \text{(VIII.21)}$$

La grandeur

$$\frac{x}{L}=x_{sd} \qquad \text{(VIII.22)}$$

est une coordonnée sans dimensions. En vertu de (VIII.20) et en tenant compte de (VIII.22), on peut conclure que les coordonnées sans dimensions des points homologues de la maquette et du prototype sont égales

$$x_{sd.p}=x_{sd.m}. \qquad \text{(VIII.23)}$$

La condition de similitude cinématique consiste en ce que les vitesses en des points homologues de l'écoulement du prototype et de sa maquette doivent être en des instants homologues proportionnelles.

Désignons par v_{xp} et v_{xm} respectivement les projections des vitesses en des points homologues du prototype et de la maquette, par

v_{0p} et v_{0m} leurs vitesses caractéristiques (par exemple, la vitesse de déplacement du corps) et par k_v l'échelle des vitesses. Alors, analogiquement à (VIII.20), la condition de similitude cinématique sera

$$\frac{v_{xp}}{v_{xm}} = \frac{v_{0p}}{v_{0m}} = k_v. \qquad \text{(VIII.24)}$$

On peut l'écrire sous la forme

$$\frac{v_{xp}}{v_{0p}} = \frac{v_{xm}}{v_{0m}} \text{ ou } v_{xsd.p} = v_{xsd.m}, \qquad \text{(VIII.25)}$$

où sont introduites les projections des vitesses sans dimensions

$$\frac{v_x}{v_0} = v_{xsd}. \qquad \text{(VIII.26)}$$

Il est évident que ces raisonnements restent valables non seulement pour les projections des vitesses, mais aussi pour les vitesses mêmes. Etant donné que d'après (VIII.25), en des points homologues des écoulements, les vitesses sans dimensions sont égales, alors doivent être égales aussi les épures des vitesses sans dimensions dans les écoulements de la maquette et du prototype.

Si le mouvement du fluide est non permanent, il n'y a raison de comparer les vitesses qu'en des instants homologues. Désignons par t_p et t_m les intervalles de temps pour le prototype et la maquette et par T_p et T_m les intervalles de temps caractéristiques (par exemple, la période d'oscillations pour les processus de caractère oscillatoire ou le temps qu'un corps met pour franchir une distance égale à sa longueur) et introduisons des intervalles de temps sans dimensions

$$t_{sd} = \frac{t}{T}. \qquad \text{(VIII.27)}$$

En des instants homologues le temps sans dimensions est le même

$$t_{sd.p} = t_{sd.m}. \qquad \text{(VIII.28)}$$

La condition (VIII.25) doit être observée si la condition (VIII.28) est vérifiée.

Passons maintenant à la formulation des conditions de similitude dynamique liant les forces de différente nature agissant dans les écoulements de la maquette et du prototype. Utilisons la méthode d'obtention des conditions de similitude dynamique basée sur l'analyse des équations du mouvement d'un fluide.

Ecrivons l'équation du mouvement d'un fluide visqueux sous la forme vectorielle en considérant que parmi les forces massiques dans le fluide n'agit que la force de pesanteur, c'est-à-dire $\bar{F} = -\bar{k}g$ ($\bar{k}$ étant le vecteur unité de l'axe des z),

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) =$$
$$= -\bar{k}g - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right). \qquad \text{(VIII.29)}$$

Les termes de cette équation du mouvement traduisent les forces de différente nature agissant dans le fluide : $\partial\bar{v}/\partial t$ sont les forces d'inertie liées à la non-stationnarité du processus ; $\left(v_x \frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)$ les forces d'inertie liées à l'accélération convective ; $\frac{1}{\rho}$ grad p les forces de pression, et le dernier terme du second membre, les forces de viscosité. Tous ces termes ont les dimensions de l'accélération, c'est-à-dire caractérisent les forces rapportées à l'unité de masse.

Ecrivons l'équation du mouvement sous forme sans dimensions en introduisant à cet effet des grandeurs constantes caractéristiques : la vitesse v_0, la dimension linéaire L, l'intervalle de temps T et la pression P. Alors pour les coordonnées, les vitesses, le temps et la pression, on peut écrire les relations suivantes :

$$x = x_{sd}L; \quad t = t_{sd}T; \quad v_x = v_{xsd}v_0; \quad p = p_{sd}P, \qquad \text{(VIII.30)}$$

où x_{sd} est la coordonnée sans dimensions ; t_{sd} le temps sans dimensions ; v_{xsd} la projection de la vitesse sans dimensions ; p_{sd} la pression sans dimensions.

Transformons successivement les termes qui font partie de (VIII.29). Etant donné que les grandeurs caractéristiques sont constantes, on peut les faire sortir de sous le signe de la différentiation

$$\frac{v_0}{T}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial t_{sd}} + \frac{v_0^2}{L}\left(v_{xsd}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial x_{sd}} + v_{ysd}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{dy_{sd}} + \right.$$
$$\left. + v_{zsd}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial z_{sd}}\right) = -\bar{k}g - \frac{P}{\rho L}(\text{grad } p)_{sd} + \frac{\nu v_0}{L^2}(\Delta\bar{v})_{sd}. \qquad \text{(VIII.31)}$$

Dans cette équation toutes les dérivées sont sans dimensions. En divisant tous ses termes par la grandeur dimensionnelle v_0^2/L, le facteur de l'accélération convective sans dimensions, nous obtiendrons l'équation du mouvement d'un fluide sous la forme sans dimensions

$$\frac{L}{v_0T}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial t_{sd}} + \left(v_{xsd}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial x_{sd}} + v_{ysd}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial y_{sd}} + v_{zsd}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial z_{sd}}\right) =$$
$$= -\bar{k}\frac{gL}{v_0^2} - \frac{P}{\rho v_0^2}(\text{grad } p)_{sd} + \frac{\nu}{v_0L}(\Delta\bar{v})_{sd}. \qquad \text{(VIII.32)}$$

Introduisons les combinaisons (nombres) sans dimensions suivantes, composées des grandeurs caractéristiques pour le processus donné :

nombre de Strouhal

$$\text{Sh} = \frac{L}{v_0T}; \qquad \text{(VIII.33)}$$

nombre de Froude

$$\text{Fr} = \frac{v_0}{\sqrt{gL}}; \qquad \text{(VIII.34)}$$

nombre d'Euler

$$\mathrm{Eu} = \frac{2P}{\rho v_0^2}\,; \tag{VIII.35}$$

nombre de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{v_0 L}{\nu}\,. \tag{VIII.36}$$

En tenant compte de ces notations, écrivons l'équation du mouvement sans dimensions sous la forme

$$\mathrm{Sh}\,\frac{\partial \bar{v}_{\mathrm{sd}}}{\partial t_{\mathrm{sd}}} + \left(v_{x\mathrm{sd}}\frac{\partial \bar{v}_{\mathrm{sd}}}{\partial x_{\mathrm{sd}}} + v_{y\mathrm{sd}}\frac{\partial \bar{v}_{\mathrm{sd}}}{\partial y_{\mathrm{sd}}} + v_{z\mathrm{sd}}\frac{\partial \bar{v}_{\mathrm{sd}}}{\partial z_{\mathrm{sd}}}\right) =$$

$$= -\bar{k}\,\frac{1}{\mathrm{Fr}^2} - \frac{\mathrm{Eu}}{2}\,(\mathrm{grad}\; p_{\mathrm{sd}}) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,(\Delta \bar{v})_{\mathrm{sd}}. \tag{VIII.37}$$

Examinons le sens physique des nombres introduits.

Au cours du passage à la forme sans dimensions, dans l'équation (VIII.32) les forces de différente nature ont été divisées par v_0^2/L caractérisant les forces d'inertie. Pour cette raison, les nombres sans dimensions traduisent respectivement les rapports: gL/v_0^2 des forces de pesanteur aux forces d'inertie; $\dfrac{P}{\frac{\rho v_0^2}{2}}$ des forces de pression aux forces d'inertie; ν/v_0L des forces de viscosité aux forces d'inertie. Il est à noter que ces combinaisons ne sont pas égales aux rapports des forces de différente nature agissant dans l'écoulement d'un fluide, mais caractérisent seulement ces rapports, puisque les valeurs de ces forces dépendent encore des dérivées sans dimensions.

Ainsi, en vertu de ce qui a été énoncé ci-dessus, nous concluons que le nombre de Froude traduit le rapport de la force d'inertie à la force de pesanteur; le nombre d'Euler le rapport de la force de pression à la force d'inertie et le nombre de Reynolds le rapport de la force d'inertie à la force de viscosité.

Le sens physique du nombre de Strouhal est moins évident. On peut dire qu'il traduit les forces hydrodynamiques d'inertie apparaissant en mouvement non stationnaire du fluide.

Passons maintenant directement à la détermination des conditions dynamiques de similitude des écoulements.

Examinons les mouvements du prototype et de la maquette géométriquement semblable dans les fluides. Remarquons que dans le cas général, les fluides peuvent être différents, c'est-à-dire avoir de différentes masses volumiques (ρ_{p} et ρ_{m}) et les différents coefficients cinématiques de viscosité (ν_{p} et ν_{m}).

Nous compterons que les conditions de similitude géométrique et cinématique (VIII.23), (VIII.25) et (VIII.28) sont observées. Ceci montre que les coordonnées et les vitesses sans dimensions, ainsi que le temps sans dimensions dans les écoulements du prototype et de

la maquette sont

$$x_{sd.p}=x_{sd.m}\,; \quad \bar{v}_{sd.p}=\bar{v}_{sd.m}\,; \quad t_{sd.p}=t_{sd.m},$$

et par conséquent les dérivées sans dimensions sont aussi égales dans les écoulements géométriquement et cinématiquement semblables

$$\left(\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial t_{sd}}\right)_p=\left(\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial t_{sd}}\right)_m; \quad (\text{grad}\,p)_{sd.p}=(\text{grad}\,p)_{sd.m}\ldots \qquad \text{(VIII.38)}$$

Pour déduire les conditions cherchées de la similitude dynamique, nous partirons du fait que les équations du mouvement sans dimensions du prototype et de la maquette sont identiques.

Ecrivons l'équation sans dimensions (VIII.37) relative au prototype et à la maquette

$$\text{Sh}_p\left(\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial t_{sd}}\right)_p+\left(v_{xsd}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial x_{sd}}+v_{ysd}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial y_{sd}}+v_{zsd}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial z_{sd}}\right)_p=$$

$$=-\bar{k}\frac{1}{\text{Fr}_p^2}-\frac{\text{Eu}_p}{2}(\text{grad}\,p)_{sd.p}+\frac{1}{\text{Re}_p}(\Delta\bar{v})_{sd.p}\,; \qquad \text{(VIII.39)}$$

$$\text{Sh}_m\left(\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial t_{sd}}\right)_m+\left(v_{xsd}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial x_{sd}}+v_{ysd}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial y_{sd}}+v_{zsd}\frac{\partial\bar{v}_{sd}}{\partial z_{sd}}\right)_m=$$

$$=-\bar{k}\frac{1}{\text{Fr}_m^2}-\frac{\text{Eu}_m}{2}(\text{grad}\,p)_{sd.m}+\frac{1}{\text{Re}_m}(\Delta\bar{v})_{sd.m}. \qquad \text{(VIII.40)}$$

Pour que ces équations soient identiques, étant donné que suivant (VIII.38) les dérivées sans dimensions y figurant sont égales, il est nécessaire et suffisant que les nombres sans dimensions multipliant ces dérivées soient égaux. Par conséquent, pour respecter la condition de similitude dynamique, il faut qu'il y ait pour le prototype et la maquette l'observation simultanée de l'égalité des nombres de Strouhal, de Froude, d'Euler et de Reynolds

$$\text{Sh}_p=\text{Sh}_m \quad \text{ou} \quad \frac{L_p}{v_{0p}T_p}=\frac{L_m}{v_{0m}T_m}\,; \qquad \text{(VIII.41)}$$

$$\text{Fr}_p=\text{Fr}_m \quad \text{ou} \quad \frac{v_{0p}}{\sqrt{gL_p}}=\frac{v_{0m}}{\sqrt{gL_m}}\,; \qquad \text{(VIII.42)}$$

$$\text{Eu}_p=\text{Eu}_m \quad \text{ou} \quad \frac{2P_p}{\rho_p v_{0p}^2}=\frac{2P_m}{\rho_m v_{0m}^2}\,; \qquad \text{(VIII.43)}$$

$$\text{Re}_p=\text{Re}_m \quad \text{ou} \quad \frac{v_{0p}L_p}{\nu_p}=\frac{v_{0m}L_m}{\nu_m}\,. \qquad \text{(VIII.44)}$$

Dans certains cas, quand il y a formation de jets et d'embruns, propagation d'ondes capillaires, formation de cavités dans le liquide, une grande importance revient aux forces de tension superficielle. Pour tenir compte de leur influence, on utilise la condition

aux limites dynamique pour la pression sur la surface de séparation du fluide.

De la physique, on sait qu'un fluide à surface libre incurvée est soumis à l'action d'une pression supplémentaire due aux forces de la tension superficielle

$$p_{t.s}=\sigma\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right), \qquad \text{(VIII.45)}$$

où r_1 et r_2 sont les rayons principaux de la courbure de l'élément de surface, σ le coefficient de la tension superficielle.

Si la surface du fluide est convexe, $p_{t.s}>0$; pour une surface libre concave $p_{t.s}$ est négatif.

Sur la surface de séparation de l'eau et de l'air avec $p_a = 1$ atm le coefficient $\sigma = 0{,}0073$ kgf/m.

Trouvons le facteur de similitude pour prendre en compte l'influence des forces de la tension superficielle. Comme il a déjà été noté, tout facteur de similitude caractérise le rapport des forces de différente nature qui agissent dans un fluide. Désignons la force de la tension superficielle appliquée à un élément de surface S par $R_{t.s}$ et la force d'inertie appliquée à un élément de volume V par R_i. Il est évident que

$$R_{t.s}=p_{t.s}S=\frac{\sigma S}{L}\left(\frac{1}{r_{1sd}}+\frac{1}{r_{2sd}}\right),$$

où sont introduits les rayons sans dimensions $r_{sd} = r/L$. La force d'inertie, égale au produit de la masse de la particule ρV par l'accélération, peut être représentée sous la forme

$$R_i \sim \rho V\frac{v_0^2}{L},$$

où v_0^2/L est la grandeur caractérisant l'accélération convective dans un fluide.

En tenant compte de ce que $S \sim L^2$ et $V \sim L^3$, nous obtenons

$$R_{t.s} \sim \sigma L\left(\frac{1}{r_{1sd}}+\frac{1}{r_{2sd}}\right); \quad R_i \sim \rho L^2 v_0^2.$$

Composons le rapport des grandeurs dimensionnelles figurant dans l'expression donnée

$$\frac{\sigma}{\rho v_0^2 L}=\mathrm{We}. \qquad \text{(VIII.46)}$$

Le nombre sans dimensions We est dit nombre de Weber. Il traduit le rapport des forces de la tension superficielle à la force d'inertie. La similitude des écoulements, compte tenu des forces de la tension superficielle, nécessite l'observation de l'égalité des nombres de Weber

$$\mathrm{We_p}=\mathrm{We_m} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_p}{\rho_p v_{0p}^2 L_p}=\frac{\sigma_m}{\rho_m v_{0m}^2 L_m}. \qquad \text{(VIII.47)}$$

Lorsqu'un fluide compressible (gaz) se déplace à une grande vitesse, parmi les facteurs de similitude figure aussi le nombre de Mach M, par lequel on entend le rapport de la vitesse caractéristique à la célérité du son

$$M=\frac{v_0}{a}, \tag{VIII.48}$$

où $a=\sqrt{k_{\text{ct}}\frac{p}{\rho}}$ est la célérité du son, $k_{\text{ct}}=c_p/c_V$ le rapport de la capacité thermique à pression constante à la capacité thermique à volume constant.

Le nombre de Mach joue un grand rôle dans la dynamique des gaz. Pour $M<1$, les écoulements du gaz sont dits subsoniques; qualitativement ils sont analogues aux écoulements d'un fluide incompressible. Pour $M>1$, les écoulements du gaz sont dits supersoniques; ils se distinguent qualitativement des écoulements d'un fluide incompressible.

Dans les écoulements des gaz à des vitesses proches de la célérité du son ou dépassant celle-ci, il faut tenir compte de la similitude suivant les nombres de Mach. Rappelons que pour $M<(0{,}2\div 0{,}3)$, on peut négliger l'influence de la compressibilité.

En mécanique des fluides on fait souvent appel à la notion de coefficient de pression $\bar{p}$ (IV.25), ainsi que de coefficient de frottement local c_f qui est lié à la contrainte tangentielle sur la surface du corps par la relation

$$c_f=\frac{\tau_0}{\frac{\rho v_0^2}{2}}, \tag{VIII.49}$$

où v_0 est la vitesse caractéristique.

Montrons que $\bar{p}$ et c_f sont les fonctions des facteurs de similitude. Introduisons dans la formule de Newton (VIII.2) les grandeurs sans dimensions

$$\tau_0=\mu\frac{\partial v}{\partial n}=\mu\frac{v_0}{L}\frac{\partial v_{\text{sd}}}{\partial n_{\text{sd}}}.$$

En vertu de cette relation nous obtenons

$$c_f=\frac{2\mu v_0}{\rho v_0^2 L}\frac{\partial v_{\text{sd}}}{\partial n_{\text{sd}}}=\frac{2\nu}{v_0 L}\frac{\partial v_{\text{sd}}}{\partial n_{\text{sd}}}=\frac{2}{\text{Re}}\frac{\partial v_{\text{sd}}}{\partial n_{\text{sd}}}, \tag{VIII.50}$$

d'où il suit que le coefficient de frottement local est une fonction explicite du nombre de Reynolds

$$c_f=f(\text{Re}). \tag{VIII.51}$$

Ecrivons l'expression (IV.25) du coefficient de pression sous la forme

$$\bar{p}=\frac{p-p_0}{\frac{\rho v_0^2}{2}}=\frac{2p_0}{\rho v_0^2}\left(\frac{p}{p_0}-1\right), \tag{VIII.52}$$

où p_0 est la pression dans un écoulement non perturbé. En la prenant pour pression caractéristique $p_0 = P$ et en tenant compte de l'expression du nombre d'Euler, on peut écrire

$$\bar{p} = \mathrm{Eu}\left(\frac{p}{p_0} - 1\right), \qquad \text{(VIII.53)}$$

d'où il suit que le coefficient de pression est une fonction explicite du nombre d'Euler

$$\bar{p} = f_1(\mathrm{Eu}). \qquad \text{(VIII.54)}$$

§ 46. FORMULES GÉNÉRALES DES FORCES ET DES MOMENTS HYDRODYNAMIQUES

En exprimant le vecteur des contraintes $\bar{p}_n$ en fonction de la pression p et de la contrainte tangentielle τ_0

$$\bar{p}_n = -p\bar{n} + \tau_0 \bar{l}^0, \qquad \text{(VIII.55)}$$

où $\bar{l}^0$ est le vecteur unité de la tangente, $\bar{n}$ la normale extérieure, écrivons l'expression générale de la réaction hydrodynamique (I.14) de l'action du fluide sur le corps sous la forme suivante:

$$\bar{R} = -\oint_S (p - p_0)\,\bar{n}\,dS + \oint_S \tau_0 \bar{l}^0\,dS. \qquad \text{(VIII.56)}$$

Ici on a ajouté l'intégrale identiquement égale à zéro $\oint_S p_0 \bar{n}\,dS \equiv$ $\equiv 0$, où p_0 est la pression dans le fluide au repos.

En introduisant dans (VIII.56) les expressions du coefficient de frottement local (VIII.49) et du coefficient de pression (VIII.52), nous obtenons

$$\bar{R} = -\frac{\rho v_0^2}{2}\oint_S \bar{p}\,\bar{n}\,dS + \frac{\rho v_0^2}{2}\oint_S c_f \bar{l}^0\,dS. \qquad \text{(VIII.57)}$$

Multiplions et divisons le deuxième membre de (VIII.57) par la surface caractéristique S

$$\bar{R} = \frac{\rho v_0^2}{2} S\left(-\oint_S \bar{p}\,\bar{n}\,\frac{dS}{S} + \oint_S c_f \bar{l}^0\,\frac{dS}{S}\right). \qquad \text{(VIII.58)}$$

Ici le facteur $\frac{\rho v_0^2}{2} S$ a la dimension d'une force; l'expression vectorielle sans dimensions entre parenthèses est dite coefficient de la force hydrodynamique $\bar{C}_R$

$$\bar{C}_R = \left(-\oint_S \bar{p}\,\bar{n}\,\frac{dS}{S} + \oint_S c_f \bar{l}^0\,\frac{dS}{S}\right). \qquad \text{(VIII.59)}$$

En tenant compte de ce fait, on peut représenter l'expression de la réaction hydrodynamique sous la forme

$$\overline{R}=\overline{C}_R \frac{\rho v_0^2}{2} S. \qquad \text{(VIII.60)}$$

En mécanique des fluides toutes les forces, sauf les forces d'inertie liées aux masses virtuelles (ch. VI), sont représentées sous la forme (VIII.60).

Analogiquement on écrit la formule du moment $\overline{M}$ où l'on introduit en plus le bras de levier caractéristique L_1

$$\overline{M}=\overline{C}_m \frac{\rho v_0^2}{2} S L_1, \qquad \text{(VIII.61)}$$

où $\overline{C}_m$ est le coefficient du moment.

Le problème du calcul des forces et des moments agissant sur un corps se ramène à la détermination des coefficients de la force $\overline{C}_R$ et du moment $\overline{C}_m$. Les données expérimentales sont représentées également sous la forme (VIII.60) et (VIII.61).

Transformons l'expression de $\overline{C}_R$ en y introduisant au lieu de $\overline{p}$ et c_f leurs relations fonctionnelles suivant (VIII.51) et (VIII.54)

$$\overline{C}_R=\left[-\oint_S f_1(\mathrm{Eu})\,\overline{n}\,\frac{dS}{S}+\oint_S f(\mathrm{Re})\,\overline{l}^0\,\frac{dS}{S}\right], \qquad \text{(VIII.62)}$$

d'où il suit que $\overline{C}_R$ dépend explicitement des facteurs de similitude Eu et Re.

Dans le cas du mouvement avec formation de houle, les coefficients $\overline{C}_R$ et $\overline{C}_m$ peuvent également dépendre du facteur de similitude de Froude. En mouvement varié $\overline{C}_R$ et $\overline{C}_m$ sont des fonctions du nombre de Strouhal. Par conséquent, le coefficient de la force hydrodynamique est une fonction des facteurs de similitude; évidemment, il dépend également de la forme du corps et de la direction de son mouvement (de l'orientation du corps dans l'écoulement)

$$\overline{C}_R=f(\mathrm{Eu},\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Fr},\ \mathrm{Sh}). \qquad \text{(VIII.63)}$$

Elucidons les conditions dans lesquelles les coefficients des forces hydrodynamiques du prototype et de sa maquette géométriquement semblable sont égaux.

D'après (VIII.63) il est facile de conclure que

$$\overline{C}_{Rp}=\overline{C}_{Rm}$$

si

$$\mathrm{Eu_p}=\mathrm{Eu_m};\quad \mathrm{Re_p}=\mathrm{Re_m};\quad \mathrm{Fr_p}=\mathrm{Fr_m};\quad \mathrm{Sh_p}=\mathrm{Sh_m}, \qquad \text{(VIII.64)}$$

d'où on déduit la loi principale de similitude: les coefficients des forces et des moments hydrodynamiques de la maquette et du prototype sont égaux si tous les facteurs de similitude sont égaux.

Dans la pratique, en mouvement de translation d'un corps qui est le plus important, généralement on fait appel non pas au coefficient vectoriel de la force hydrodynamique $\overline{C}_R$, mais à ses composantes suivant les axes de coordonnées en système de coordonnées aérodynamiques, l'axe des x étant dirigé dans ce cas suivant le vecteur vitesse (fig. VI.1).

$$\overline{C}_R = \overline{i}C_x + \overline{j}C_y + \overline{k}C_z, \qquad \text{(VIII.65)}$$

où C_x, C_y, C_z sont respectivement les coefficients de résistance, de force latérale et de portance.

Dans ce cas,

$$C_R = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}. \qquad \text{(VIII.66)}$$

Suivant (VIII.65) et (VIII.60)

$$R_x = C_x \frac{\rho v_0^2}{2} S\,; \quad R_y = C_y \frac{\rho v_0^2}{2} S\,; \quad R_z = C_z \frac{\rho v_0^2}{2} S. \qquad \text{(VIII.67)}$$

Toutes les considérations énoncées ci-dessus relatives à C_R peuvent être évidemment étendues aux C_x, C_y, C_z.

La question du choix des grandeurs caractéristiques, figurant dans les expressions pour les facteurs de similitude, ainsi que des surfaces caractéristiques entrant dans les formules pour la force hydrodynamique et ses projections, ne peut pas être résolue d'une façon univoque. Pour chaque classe de problèmes, on choisit des grandeurs caractéristiques appropriées. Par exemple, dans le cas du mouvement d'un navire, on choisit ordinairement pour longueur caractéristique la longueur suivant la ligne de flottaison et pour vitesse caractéristique la vitesse de déplacement du navire. Pour la surface caractéristique, on prend généralement la carène et parfois la surface du maître couple du corps.

En résolvant les problèmes de la dynamique des corps, il est avantageux parfois de prendre pour surface caractéristique $S = V_c^{2/3}$, c'est-à-dire le tirant d'eau du navire à la puissance $^2/_3$.

Le choix convenable des grandeurs caractéristiques citées contribue à une meilleure systématisation des données expérimentales.

Il est facile de trouver la formule pour le recalcul des coefficients de la force hydrodynamique, rapportés aux différentes surfaces caractéristiques, par exemple S et $V_c^{2/3}$,

$$R = C_{R1} \frac{\rho v_0^2}{2} S = C_{R2} \frac{\rho v_0^2}{2} V_c^{2/3},$$

d'où

$$C_{R1} = C_{R2} \frac{V_c^{2/3}}{S}. \qquad \text{(VIII.68)}$$

§ 47. CONDITIONS DE SIMILITUDE ET LEUR UTILISATION PRATIQUE. CAS PARTICULIERS DE SIMILITUDE

Dans le cas général du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, où l'on tient compte des forces de la tension superficielle [1], l'écoulement est caractérisé par cinq conditions de similitude (nombres Sh, Fr, Eu, Re, We). Ces mêmes conditions déterminent également les coefficients des forces et des moments hydrodynamiques.

Dans des cas particuliers du mouvement, certaines conditions de similitude n'interviennent pas puisque les forces qu'elles caractérisent n'influent pas sur la structure de l'écoulement du fluide. Tels cas sont des cas particuliers de modelage. Etudions les cas particuliers de similitude en partant cependant du fait que les dimensions du prototype sont sensiblement plus grandes par rapport à la maquette

$$L_p = kL_m. \qquad \text{(VIII.69)}$$

Pour réaliser des essais, il faut que les vitesses de la maquette soient inférieures à celles du prototype

$$v_{0p} = k_v v_{0m}, \quad \text{avec} \quad k_v > 1. \qquad \text{(VIII.70)}$$

Dans l'analyse ultérieure, nous considérerons comme données les grandeurs caractéristiques du prototype (vitesse, longueur).

Le nombre de Strouhal Sh $= L/v_0T$ figure dans l'équation du mouvement comme facteur de l'accélération locale sans dimensions. S'il est nul, alors dans l'équation du mouvement disparaît le terme caractérisant l'accélération locale, ce qui correspond au mouvement permanent du fluide. Ainsi, en mouvement permanent le nombre de Strouhal (Sh $= 0$) n'influe pas sur l'écoulement.

Après avoir défini la relation entre les intervalles de temps caractéristiques du prototype et de la maquette, nous obtenons

$$T_m = T_p \frac{L_m}{L_p} \frac{v_{0p}}{v_{0m}} = T_p \frac{k_v}{k}, \qquad \text{(VIII.71)}$$

d'où l'on voit que si $k > 1$ et $k_v > 1$, alors $T_m \approx T_p$, c'est-à-dire que la similitude relative aux nombres de Strouhal est en général techniquement réalisable.

Le nombre de Froude Fr $= v_0/\sqrt{gL}$ traduit le rapport des forces d'inertie aux forces de pesanteur. On sait que les forces de pesanteur agissent toujours, mais leur influence sur les caractéristiques hydrodynamiques ne se manifeste pas toujours. Dans le chapitre XIII il sera montré que la prise en compte des forces de pesanteur dans les équations du mouvement équivaut à une prise en compte de la forma-

[1] Les facteurs qui traduisent l'influence de la turbulence seront examinés au chapitre IX.

tion de la houle sur la surface libre. Dans le cas du mouvement des corps dans un fluide sans formation de houle, les forces de pesanteur et, par conséquent, les nombres de Froude n'influent pas sur les caractéristiques hydrodynamiques. Ceci a lieu lors du mouvement d'un corps avec n'importe quelle vitesse, immergé profondément sous la surface libre, ainsi que lors de son mouvement sur la surface libre, avec des vitesses relativement faibles. Des expériences montrent que lors du mouvement des navires avec des nombres de Froude $\mathrm{Fr} < 0{,}20 \div 0{,}25$, la houle n'influe pratiquement pas sur les forces hydrodynamiques. Dans ce cas le coefficient de la force hydrodynamique dépend des nombres Sh, Eu, Re.

Ainsi, la condition de similitude suivant Froude ne doit être imposée que lors du mouvement des corps avec une formation intense de la houle. Dans le cas de l'égalité des nombres de Froude les images de la formation de la houle sur maquette et sur prototype sont géométriquement semblables.

Elucidons la possibilité de la réalisation technique du modelage suivant le nombre de Froude

$$\frac{v_{0\mathrm{p}}}{\sqrt{gL_\mathrm{p}}} = \frac{v_{0\mathrm{m}}}{\sqrt{gL_\mathrm{m}}} \quad \text{ou} \quad v_{0\mathrm{m}} = v_{0\mathrm{p}} \sqrt{\frac{L_\mathrm{m}}{L_\mathrm{p}}} = \frac{v_{0\mathrm{p}}}{\sqrt{k}} . \qquad \text{(VIII.72)}$$

De (VIII.72) on voit que lors de la similitude suivant les nombres de Froude la vitesse de la maquette est inférieure à celle du prototype, ce qui est du point de vue technique facilement réalisable.

Notons qu'en constructions navales, le nombre de Froude sert parfois à caractériser la rapidité relative d'un corps. Dans tel cas il sera dit vitesse relative.

Etablissons la relation entre les forces dues à la houle agissant sur le prototype et sur la maquette tout en observant la condition de similitude relative au nombre de Froude $\mathrm{Fr}_\mathrm{p} = \mathrm{Fr}_\mathrm{m}$.

Nous admettrons que les coefficients des forces hydrodynamiques ne dépendent que du facteur de Froude. En employant la formule (VIII.60) pour le prototype et la maquette, nous obtenons

$$R_\mathrm{p} = C_\mathrm{p} \frac{\rho_\mathrm{p} v_{0\mathrm{p}}^2}{2} S_\mathrm{p}; \quad R_\mathrm{m} = C_\mathrm{m} \frac{\rho_\mathrm{m} v_{0\mathrm{m}}^2}{2} S.$$

Trouvons le rapport $R_\mathrm{p} : R_\mathrm{m}$ en partant de ce que d'après la loi fondamentale de similitude $C_\mathrm{p}(\mathrm{Fr}_\mathrm{p}) = C_\mathrm{m}(\mathrm{Fr}_\mathrm{m})$

$$\frac{R_\mathrm{p}}{R_\mathrm{m}} = \frac{C_\mathrm{p}}{C_\mathrm{m}} \frac{\rho_\mathrm{p}}{\rho_\mathrm{m}} \frac{v_{0\mathrm{p}}^2}{v_{0\mathrm{m}}^2} \frac{S_\mathrm{p}}{S_\mathrm{m}} = \frac{\rho_\mathrm{p}}{\rho_\mathrm{m}} k^3, \qquad \text{(VIII.73)}$$

tout en tenant compte de la relation entre les vitesses (VIII.72) et de la relation entre les surfaces caractéristiques $S_\mathrm{p} : S_\mathrm{m} = k^2$.

Pour les fluides identiques $\rho_p = \rho_m$ la condition (VIII.73) peut s'écrire ainsi

$$\frac{R_p}{R_m} = k^3. \qquad \text{(VIII.74)}$$

Autrement dit, lorsque la similitude suivant les nombres de Froude est observée, les forces agissant sur le prototype et sur la maquette se rapportent entre elles comme un cube d'échelle de similitude.

Le nombre de Reynolds Re $= v_0L/\nu$ caractérise le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité.

Si on ne tient pas compte de la viscosité ($\nu \to 0$), le nombre de Reynolds tend à l'infini: Re $\to \infty$. Dans ce cas, dans l'équation du mouvement (VIII.13) disparaît le terme dépendant de la viscosité. D'où il résulte que dans l'étude d'un fluide parfait, le nombre Re n'intervient pas et le coefficient de la force hydrodynamique dépend des nombres Sh, Fr et Eu.

Pour le modelage suivant le nombre de Reynolds il faut que

$$\frac{v_{0p}L_p}{\nu_p} = \frac{v_{0m}L_m}{\nu_m} \quad \text{ou} \quad v_{0m} = v_{0p}\frac{\nu_m}{\nu_p}\frac{L_p}{L_m} = v_{0p}\frac{\nu_m}{\nu_p}k. \qquad \text{(VIII.75)}$$

Examinons ceci d'abord sur l'exemple de fluides identiques quand $\nu_p = \nu_m$

$$v_{0m} = v_{0p}k. \qquad \text{(VIII.76)}$$

Comme on le voit, dans ce cas la vitesse de la maquette est sensiblement supérieure à celle du prototype, ce qui est souvent techniquement irréalisable. Remarquons que même si l'on pouvait atteindre des vitesses aussi élevées de la maquette, cela changerait fondamentalement la structure de l'écoulement autour de la maquette: au lieu d'un écoulement sans décollement on aurait un écoulement totalement décollé, c'est-à-dire une supercavitation. D'où il suit que pour des fluides identiques la similitude d'après le nombre de Reynolds est techniquement irréalisable.

Définissons les rapports entre les forces de nature visqueuse agissant sur le prototype et sur la maquette si l'égalité du nombre de Reynolds est observée; dans ce cas $C_p(\mathrm{Re}_p) = C_m(\mathrm{Re}_m)$. En utilisant (VIII.75) et le rapport $S_p : S_m = k^2$, nous aurons

$$\frac{R_p}{R_m} = \frac{\rho_p}{\rho_m}\left(\frac{\nu_p}{\nu_m}\right)^2. \qquad \text{(VIII.77)}$$

Avec des fluides identiques

$$\frac{R_p}{R_m} = 1, \qquad \text{(VIII.78)}$$

c'est-à-dire que les forces de nature visqueuse sur le prototype et sur la maquette sont égales.

Le nombre d'Euler $\mathrm{Eu} = \frac{P}{\frac{\rho v_0^2}{2}}$ traduit le rapport des forces de pression aux forces d'inertie. Montrons que pour le mouvement d'un liquide sans décollement (sans cavitation), la condition d'Euler n'est pas déterminante. Autrement dit, l'égalité des nombres d'Euler a lieu si les autres conditions sont observées. Démontrons-le sur l'exemple de l'écoulement permanent d'un fluide visqueux dans un canal en présence de formation de houle, les conditions déterminantes seront celles de Froude et de Reynolds.

Utilisons l'équation (VIII.17) liant les pressions et les vitesses dans un fluide visqueux en y portant le potentiel des forces de pesanteur $U = -gz$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + A_v, \qquad \text{(VIII.17)}$$

où $A_v = -\nu \int\limits_1^2 \Delta \bar{v} \cdot d\bar{r} = \frac{\nu v_1}{L} A_{v.sd}$ est le travail des forces de viscosité sur le tronçon 1-2; L une dimension linéaire caractéristique; par l'indice « sd » on désigne les grandeurs sans dimensions.

Prenons pour pression caractéristique P la chute de pressions $p_1 - p_2$ dans la zone d'écoulement entre les points 1 et 2. Notons que cette chute de pression n'est pas connue à l'avance et on la détermine d'après l'expression (VIII.17). Comme vitesse caractéristique prenons v_1; alors, en vertu de (VIII.17), nous obtiendrons l'expression

$$\mathrm{Eu} = \frac{p_1 - p_2}{\frac{\rho v_1^2}{2}} = \frac{2}{\mathrm{Fr}^2}(z_{sd2} - z_{sd1}) + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1 + \frac{2}{\mathrm{Re}} A_{v.sd}, \qquad \text{(VIII.79)}$$

d'où il suit que dans le cas donné le nombre d'Euler dépend des nombres Re et Fr et, par conséquent, le facteur Eu n'est pas déterminant. La même chose a également lieu lors du mouvement sans décollement d'un corps dans un fluide, quand les pressions dépendent des nombres Fr et Re et ne peuvent être données à l'avance.

On sait que l'image de la cavitation se détermine par deux facteurs: la pression statique d'un milieu non perturbé p_0 et la pression des vapeurs saturées p_s. Etant donné qu'en mouvement d'un corps ces valeurs sont données d'avance, il est tout à fait naturel de prendre pour pression caractéristique, intervenant dans le processus de la cavitation, la différence $p_0 - p_s = P$. Pour vitesse caractéristique on prend la vitesse du mouvement du corps v_0.

Le nombre d'Euler composé de ces grandeurs est dit nombre de cavitation $\varkappa$

$$\varkappa = \frac{p_0 - p_s}{\frac{\rho v_0^2}{2}}. \qquad \text{(VIII.80)}$$

Dans le modelage des écoulements avec cavitation, on doit obligatoirement observer l'égalité des nombres de cavitation $\varkappa_p = \varkappa_m$, car seulement dans ce cas sera observée la condition de similitude géométrique des cavernes de cavitation.

La condition de Weber $We = \sigma/\rho v_0^2 L$ traduit le rapport des forces de tension superficielle aux forces d'inertie. Déterminons la possibilité de modelage suivant le nombre de Weber.

La liaison entre les coefficients de la tension superficielle ($\rho_p = \rho_m$) est

$$\sigma_m = \sigma_p \frac{\rho_m}{\rho_p} \frac{1}{k} \frac{1}{k_v^2} = \sigma_p \frac{1}{kk_v^2}, \qquad \text{(VIII.81)}$$

d'où l'on voit que pour l'égalité des nombres de Weber il faut que le coefficient de la tension superficielle du fluide maquette soit de beaucoup inférieur à celui du fluide prototype. D'ordinaire, ces essais s'effectuent dans des fluides identiques (eau) d'où il suit que la condition de Weber est techniquement irréalisable.

De cette façon, tous les essais relatifs à la formation des embruns, à la décomposition des jets ne sont pas identiques aux conditions naturelles.

Dans tous les cas où il s'avère techniquement impossible d'observer l'égalité imposée par quelque condition de similitude, il apparaît le danger de ce que l'on appelle effet d'échelle, c'est-à-dire la non-correspondance des caractéristiques hydrodynamiques de la maquette et du prototype. Ainsi, par exemple, si les nombres de Reynolds de la maquette et du prototype ne sont pas égaux, on dit qu'il y a effet d'échelle relatif au nombre de Reynolds. Dans ces cas les forces de viscosité sur la maquette et sur le prototype ne sont pas semblables.

Les cas ne sont pas rares où la variation dans de très larges limites d'un critère de similitude quelconque n'entraîne pratiquement pas la variation du coefficient de la force hydrodynamique ou d'une de ses composantes. Ce phénomène s'appelle automodelage. On dit alors qu'il y a l'automodelage du coefficient de la force hydrodynamique suivant telle ou telle condition de similitude (celles de Re, Fr, etc.).

Dans l'automodelage, malgré la différence entre les grandeurs des conditions de similitude de la maquette et du prototype, les coefficients des forces hydrodynamiques sont identiques.

Les mouvements d'un fluide représentant un intérêt pratique sont ordinairement liés à l'action non de deux forces, ce qui correspond au modelage suivant une condition de similitude, mais d'un plus grand nombre de ces forces. Ceci oblige d'établir des conditions de modelage commun pour les deux conditions de similitude.

Examinons le modelage commun suivant les conditions de Froude et de Reynolds pour le mouvement d'un corps à la vitesse constante

dans un fluide visqueux sans cavitation, dans les conditions d'une houle forte. De tels processus sont reproduits, lors des essais, par exemple, d'une maquette de navire, dans un bassin d'essais hydrodynamiques. En utilisant les résultats précédents, nous trouvons la relation entre les vitesses de la maquette et du prototype tout en observant l'égalité des nombres de Froude et de Reynolds

$$\left.\begin{aligned} &\text{pour } \mathrm{Fr_p} = \mathrm{Fr_m} \quad v_{0\mathrm{m}} = \frac{v_{0\mathrm{p}}}{\sqrt{k}}\,; \\ &\text{pour } \mathrm{Re_p} = \mathrm{Re_m} \quad v_{0\mathrm{m}} = v_{0\mathrm{p}} \frac{\nu_\mathrm{m}}{\nu_\mathrm{p}} k. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.82)}$$

En résolvant conjointement ces équations, étant donné qu'évidemment la vitesse de la maquette $v_{0\mathrm{m}}$ dans un même essai doit être identique, nous obtenons la relation entre les coefficients de la viscosité cinématique du fluide de la maquette et du prototype

$$\nu_\mathrm{m} = \nu_\mathrm{p} \frac{1}{k^{1,5}}\,. \qquad \text{(VIII.83)}$$

L'observation de la condition (VIII.83) entraîne immédiatement l'observation de l'égalité des nombres de Froude et de Reynolds. Elucidons la possibilité de réalisation de cette égalité. Soit $k = 25$, $k^{1,5} = 125$. Suivant (VIII.83), si le fluide pour la maquette était 125 fois moins visqueux que le fluide réel, on aurait une observation simultanée des conditions de Fr et de Re. En somme, la similitude simultanée nécessite que la viscosité cinématique pour la maquette soit de deux ordres inférieure à celle de l'eau. Or il n'existe pas de fluide à viscosité si faible.

En cas de fluides identiques, ce qui a pratiquement lieu lors des essais dans un bassin d'essais, l'observation de la similitude, suivant les nombres de Froude et de Reynolds, amène à des conditions contradictoires

$$\left.\begin{aligned} &\text{d'après Froude} \quad v_{0\mathrm{m}} < v_{0\mathrm{p}}\,; \\ &\text{d'après Reynolds} \quad v_{0\mathrm{m}} > v_{0\mathrm{p}}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.84)}$$

d'où il suit qu'il est beaucoup plus simple d'assurer l'égalité des nombres de Froude. En ce qui concerne l'observation de la condition de Re, il est techniquement irréalisable. Pour cette raison, lorsqu'on effectue de tels essais, on n'observe la condition de similitude que suivant les nombres de Froude.

On appelle similitude restreinte lorsqu'on n'observe qu'une condition de similitude, l'autre, ou les autres conditions, étant techniquement irréalisable.

Dans tous les cas de réalisation d'essais suivant les nombres de Fr et de Re (pour des fluides identiques), où on n'observe qu'une similitude restreinte, il y a similitude des images de la houle et des

forces composantes de nature houleuse. Comme les forces de viscosité ne sont pas semblables, il y a l'éventualité de l'apparition de l'effet d'échelle suivant le nombre de Reynolds.

Etudions les possibilités d'observation simultanée des conditions de similitude de Sh, Fr et Re qui interviennent lors de la simulation des phénomènes variables dans un fluide visqueux accompagnés d'une formation intense de la houle. Tel est le cas, par exemple, du ballottement d'un navire sur la surface d'un liquide (houleuse ou tranquille).

Par des raisonnements analogues à ceux énoncés ci-dessus, il est facile de montrer que la condition de similitude de Reynolds n'est notoirement pas remplie, et de plus $Re_p > Re_m$. Elucidons la possibilité de réalisation conjointe des conditions de similitude suivant les nombres de Fr et de Sh

$$\text{pour } Fr_p = Fr_m \quad v_{0m} = \frac{v_{0p}}{\sqrt{k}};$$

$$\text{pour } Sh_p = Sh_m \quad v_{0m} = v_{0p} \frac{T_p}{T_m} \frac{1}{k}.$$

En résolvant conjointement ces équations, nous trouvons la relation entre les périodes caractéristiques

$$\frac{T_p}{T_m} = \sqrt{k}. \qquad \text{(VIII.85)}$$

D'où l'on voit que le rapport des périodes d'oscillations du prototype et de la maquette est égal à la racine carrée de l'échelle de similitude, $T_m < T_p$, ce qu'il est très facile de réaliser au cours des essais sur maquettes.

Ainsi, le modelage des mouvements variables, compte tenu de la houle, est techniquement réalisable.

D'après ce qui venait d'être dit ci-dessus, on peut conclure que lors d'une simulation complexe avec prise en compte des forces de différentes catégories, il est toujours possible d'assurer l'observation de l'égalité seulement de certaines conditions de similitude ; la similitude suivant d'autres conditions (suivant le nombre de Reynolds et le nombre de Weber) est pratiquement irréalisable.

Etant donné que dans ces cas il y a presque toujours une similitude restreinte, la possibilité de transposer directement au prototype les coefficients établis sur les maquettes est exclue. Physiquement, cela est conditionné par le fait que lors de la variation de l'échelle d'un phénomène quelconque les différentes catégories de forces varient suivant des lois différentes. En partant des considérations théoriques, il est indispensable de transposer les données expérimentales de la maquette au prototype.

CHAPITRE IX

ÉCOULEMENTS TURBULENTS D'UN FLUIDE

§ 48. CARACTÉRISTIQUES GÉNÉRALES DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS

L'étude des écoulements de fluides visqueux montre que le régime de l'écoulement laminaire se conserve seulement pour des nombres de Reynolds relativement petits et avec leur accroissement il passe en régime turbulent. En écoulement turbulent, la valeur de la vitesse en chaque point de l'espace subit des variations continues, ce qui témoigne d'un mélange désordonné des masses de fluide ; au cours de ce mélange, des particules de fluide se déplacent suivant des trajectoires très complexes, mais en moyenne le mouvement de différentes particules s'effectue en direction de l'écoulement. Cette particularité du mouvement des particules en écoulement turbulent présente de grandes difficultés dans son étude et oblige à se servir dans la construction de la théorie des écoulements turbulents des moyennes des grandeurs étudiées.

Il est très commode d'observer le passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent dans les conduites rectilignes et dans les canaux. Considérons plus en détail ce cas bien connu. Dans une conduite longue et droite de section constante chaque particule fluide se déplace pour de faibles nombres de Reynolds suivant une trajectoire rectiligne; l'écoulement s'effectue d'une façon ordonnée sous la forme de couches se déplaçant l'une par rapport à l'autre (courant laminaire). Cependant, l'observation montre qu'avec l'augmentation du nombre de Reynolds, cet écoulement se transforme brusquement en écoulement désordonné avec un fort mélange dans le sens transversal (écoulement turbulent).

Ces deux formes d'écoulements peuvent être rendues visibles si l'on introduit dans l'écoulement un filet de fluide coloré (expérience de Reynolds). En augmentant la vitesse du fluide en écoulement dans un tuyau, on peut remarquer comme un filet rectiligne coloré devient sinueux, oscillant. Progressivement, le nombre et l'amplitude des oscillations augmentent et ceci continue jusqu'à ce que le filet ne se dégrade en petits filets qui se mélangent irrégulièrement entre eux. Enfin, ces filets se dissipent et colorent presque régulièrement tout le fluide se déplaçant dans un tuyau. Ceci montre qu'en écoulement

turbulent, le mouvement principal du fluide, s'effectuant dans la direction de l'axe du tuyau, est superposé par des mouvements transversaux.

A la suite d'un tel mélange il se produit un échange de la quantité de mouvement dans la direction transversale, tandis que dans la direction longitudinale chaque particule conserve en général sa quantité de mouvement. Ceci conduit à ce que la distribution des vitesses suivant la section transversale du tuyau en écoulement turbulent s'effectue beaucoup plus régulièrement qu'en écoulement laminaire. La fig. IX.1 montre les distributions des vitesses mesurées expérimentalement pour les écoulements laminaire (*a*) et turbulent (*b*) dans un tuyau. Comme on le voit sur la figure, en écoulement laminaire, la distribution des vitesses suivant la section transversale est parabolique, et en écoulement laminaire, par suite d'un échange de la quantité de mouvement, elle s'applatit fortement.

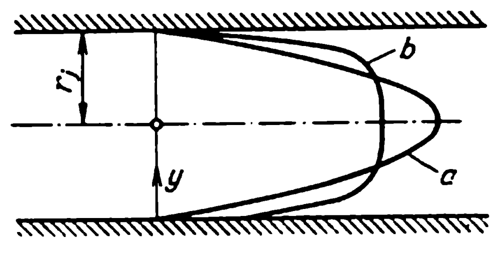


Fig. IX.1

Le passage d'un régime laminaire à un régime turbulent est lié à une perte de la stabilité de l'écoulement laminaire, et pour cette raison le début de ce passage dépend en grande partie aussi bien de la structure de l'écoulement, c'est-à-dire de la loi de distribution des vitesses et des pressions, que de l'intensité et de la fréquence de ses perturbations, qui provoquent la turbulence de l'écoulement. En éliminant artificiellement les causes possibles de l'apparition des perturbations, on peut retarder le passage à l'écoulement turbulent jusqu'à des vitesses relativement élevées ; en même temps, aux faibles vitesses, le mouvement est stable par rapport à n'importe quelles perturbations.

Parmi les critères les plus importants de passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent est le nombre de Reynolds ; le nombre Re pour lequel a lieu la perte de la stabilité de l'écoulement, c'est-à-dire le passage à un régime turbulent, est dit critique.

Etudions d'abord les particularités et les caractéristiques des écoulements turbulents, étant donné qu'ils sont en grande partie communs pour les problèmes intérieur et extérieur de la mécanique des fluides.

La particularité principale des écoulements turbulents consiste en ce qu'ils sont non permanents et leurs vitesses en des différents points fixes de l'espace changent sans cesse leur valeur et direction. De ce fait, lorsqu'on étudie des écoulements turbulents, il est plus commode d'examiner en un point donné de l'espace non les vitesses instantanées qui varient en changeant sans cesse, mais leurs valeurs moyennes en calculant ces valeurs d'après les mesures des vitesses

instantanées effectuées pendant une durée assez longue T dite durée de la médiation.

La moyenne de la vitesse par rapport au temps peut être calculée suivant les formules simples:

$$\bar{v}_x = \frac{\int_0^T v_x\,dt}{T}, \quad \bar{v}_y = \frac{\int_0^T v_y\,dt}{T}, \quad \bar{v}_z = \frac{\int_0^T v_z\,dt}{T}, \tag{IX.1}$$

où le trait est le symbole de la moyenne par rapport au temps.

Les valeurs instantanées des vitesses de l'écoulement turbulent en un point donné de l'espace peuvent être représentées sous la forme des sommes

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x, \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y, \quad v_z = \bar{v}_z + v'_z, \tag{IX.2}$$

où v'_x, v'_y, v'_z sont des variations instantanées de la vitesse par rapport à la vitesse moyenne de l'écoulement turbulent. Ces variations s'appellent vitesses de pulsation. Ce moyen de calcul de la moyenne est applicable non seulement aux vitesses, mais aussi aux contraintes des forces hydrodynamiques dans un écoulement turbulent, qui changent leur valeur suivant la variation du champ des vitesses.

Le principe de la médiation des écoulements turbulents est du point de vue cinématique équivalent à une division de l'écoulement turbulent en deux écoulements superposés: écoulement moyen et écoulement pulsatoire.

Si dans un point donné de l'écoulement turbulent, entre les pulsations des projections de la vitesse a lieu une relation $\overline{v_x'^2} = \overline{v_y'^2} = \overline{v_z'^2}$, alors la turbulence de cet écoulement est dite isotrope, c'est-à-dire indépendante de la direction, et si cette condition est observée en tous les points de l'écoulement, elle est dite encore homogène. Au fur et à mesure du rapprochement des parois de l'écoulement, la turbulence devient de plus en plus anisotrope.

Le degré de turbulence d'un écoulement est caractérisé par la valeur

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\overline{v'^2}}{\bar{v}}}. \tag{IX.3}$$

Physiquement, la valeur ε représente la racine carrée du rapport des énergies cinétiques des écoulements moyen et pulsatoire. Cette grandeur s'exprime en pour cent et, par exemple, pour les écoulements dans des souffleries aérodynamiques de construction ancienne elle est d'environ 1,0-0,75%, pour les souffleries modernes à faible turbulence jusqu'à 0,02 % et en atmosphère libre $\sim$0,03 %.

La liaison entre les vitesses de pulsation aux différents points A et B de l'écoulement turbulent s'établit et est évaluée à l'aide de la

quantité

$$\Phi_{ik} = \overline{v'_{i_A} v'_{k_B}}, \qquad \text{(IX.4)}$$

où i et k sont les directions des axes de coordonnées.

En l'absence de la liaison statistique entre les pulsations des projections des vitesses, le moment de liaison est nul.

On appelle le coefficient de corrélation R la grandeur qui établit la liaison entre les pulsations de la vitesse aux points A et B

$$R = \frac{\overline{v'_A v'_B}}{\sqrt{\overline{v'^2_A}} \sqrt{\overline{v'^2_B}}}. \qquad \text{(IX.5)}$$

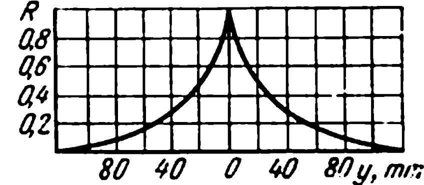


Fig. IX.2

En l'absence de la liaison entre les pulsations de la vitesse, $R = 0$ et lors de la corrélation totale, $R = 1$.

En cas d'une turbulence homogène de l'écoulement, $\sqrt{\overline{v'^2_A}} = \sqrt{\overline{v'^2_B}}$ et, par conséquent, $R = \frac{\overline{v'_A v'_B}}{\overline{v'^2}}$. D'après les données expérimentales concernant la mesure des vitesses en différents points de l'écoulement, on peut construire le graphique $R = f(y)$ représenté sur la fig. IX.2.

On appelle échelle de turbulence L la grandeur

$$L = \int_0^\infty R\,dy,$$

qui a une dimension de la longueur et caractérise le degré de liaison de la turbulence de l'écoulement. Dans les souffleries aérodynamiques, l'échelle de turbulence augmente derrière le filtre du collecteur vers le bas suivant l'écoulement, tandis que le degré de turbulence ε diminue.

Des écoulements homogènes faiblement turbulents sont créés dans les souffleries aérodynamiques au moyen de filtres avec des mailles de différentes dimensions, qui brisent les gros tourbillons. La dispersion des tourbillons s'effectue d'autant plus vite que leurs dimensions sont plus petites; par conséquent, les grilles accélèrent la diffusion des tourbillons diminuant ainsi le degré de turbulence de l'écoulement dans la chambre d'expérience. A l'égalisation de la structure de l'écoulement contribue également l'emploi d'ajutages convergents placés devant la chambre d'expérience de la soufflerie.

Les fluctuations des vitesses dans les écoulements d'air sont mesurées à l'aide d'anémomètres à fil chaud ; ces mesures permettent de calculer les grandeurs ε et R, par conséquent, de déterminer l'échelle de turbulence L pour comparer les turbulences dans les

écoulements de différentes installations et sur les constructions à étudier.

La fig. IX.3 montre les oscillogrammes de variations de la vitesse en différents points de l'écoulement en avant d'une plaque baignée par un fluide et à l'intérieur de sa couche limite. Ces données ont été obtenues lorsque les anémomètres à fil chaud étaient immobiles et la vitesse moyenne de l'écoulement était de 15 m/s.

L'oscillogramme 1 montre des fluctuations de la vitesse dans l'écoulement extérieur d'amplitude extrêmement faible, ne dépassant

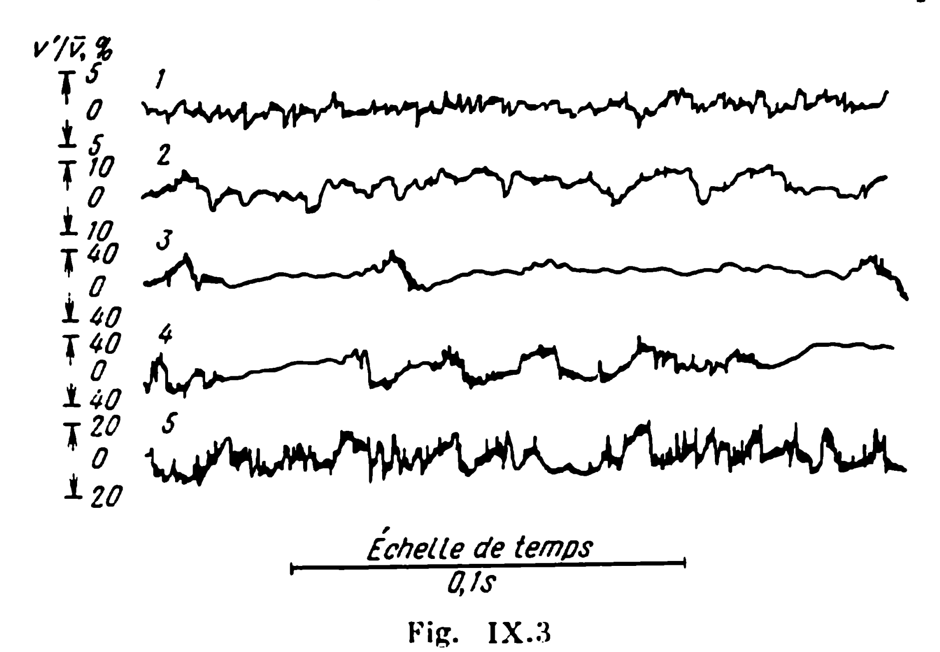


Fig. IX.3

pas 0,5 % de la vitesse à l'infini et de plus, leur fréquence, à en juger par l'échelle de temps, est grande. Cet oscillogramme donne une idée générale sur l'écoulement turbulent établi dans une soufflerie aérodynamique. Pour une précision quelque peu moindre de l'appareil de mesure, les fluctuations de la vitesse resteraient inaperçues et l'écoulement dans la soufflerie pourrait être appelé stationnaire.

L'oscillogramme 2 se rapporte au point de la couche limite distant de 20 cm du bord avant de la plaque. Sur le bord même il se forme des perturbations (du type tourbillonnaire) ; elles sont intenses, mais, en se déplaçant le long de la couche frontière qui est dans cette région stable et laminaire, elles s'ammortissent rapidement ; ces fluctuations d'une fréquence relativement faible et d'un caractère assez régulier rappellent de faibles variations de l'écoulement au voisinage d'un mouvement stable. Ceci est justifié par l'oscillogramme 3 enregistré par l'appareil placé dans la couche limite à 50 cm du nez de la plaque. Les perturbations provoquées sur le bord d'attaque sont amorties, seules parviennent parfois quelques pertur-

bations de très forte intensité qui ne change pourtant pas le caractère laminaire de la couche limite. Ces perturbations marquent le début de la perte de stabilité, étant donné que l'oscillogramme 4 enregistré au point placé à une distance de 60 cm du bord d'attaque a déjà un caractère transitoire. L'oscillogramme 5, enregistré à une distance supérieure à 100 cm du bord d'attaque fournit une image de pulsations typiquement turbulente d'une grande fréquence et d'une intensité assez élevée (~3-4 %).

§ 49. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS

Les équations de la dynamique des fluides visqueux peuvent être transformées de manière qu'elles soient valables pour des écoulements moyens par rapport au temps. Cette transformation s'effectue par remplacement des valeurs instantanées des vitesses et des contraintes des forces hydrodynamiques, figurant dans les équations initiales de Navier-Stokes, par leurs valeurs moyennes et pulsatoires dans un écoulement turbulent et une médiation ultérieure des équations obtenues par rapport au temps.

Examinons l'équation de la dynamique des fluides visqueux (1.41) en projection sur l'axe des x en écrivant son deuxième membre en les contraintes

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} =$$
$$= F_x + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right). \qquad \text{(IX.6)}$$

La somme de trois termes qui font partie du premier membre de cette équation, pour simplifier les calculs ultérieurs, peut être transformée de la manière suivante:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z v_x).$$

La validité d'une telle transformation devient évidente, si l'on tient compte que suivant l'équation de la continuité

$$v_x\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0.$$

L'équation (IX.6) est valable en mouvement turbulent pour les valeurs instantanées des vitesses et des contraintes. Introduisons dans celle-ci les expressions de ces grandeurs

$$v_x = \overline{v}_x + v'_x; \quad v_y = \overline{v}_y + v'_y; \quad v_z = \overline{v}_z + v'_z;$$
$$p_{xx} = \overline{p}_{xx} + p'_{xx}, \quad \tau_{xy} = \overline{\tau}_{xy} + \tau'_{xy}, \quad \tau_{zx} = \overline{\tau}_{zx} + \tau'_{zx}.$$

Pour effectuer la médiation des deux membres de l'équation (IX.6) par rapport au temps, examinons les conditions de la médiation par rapport à un certain intervalle de temps, utilisées en son temps par Reynolds. La condition (IX.1) pour une quantité pulsatoire aléatoire $\varphi(x, y, z, t)$ s'écrira comme une intégrale moyenne ordinaire

$$\bar{\varphi}(x, y, z, t) = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(x, y, z, t)\, dt. \qquad \text{(IX.7)}$$

De plus on suppose la durée de la médiation T telle que l'amortissement par rapport au temps conduise à une grandeur moyenne qui ne change plus à un second amortissement. Ceci peut s'écrire ainsi

$$\bar{\bar{\varphi}} = \bar{\varphi}. \qquad \text{(IX.8)}$$

Dans les cas où après la médiation (IX.7), effectuée en un point donné aux différents instants, on obtient des valeurs identiques de φ, l'écoulement moyen peut être considéré comme stationnaire et l'écoulement turbulent lui-même sera dit quasi stationnaire. Dans ce qui suit nous n'étudierons que les écoulements turbulents.

L'hypothèse (IX.8) est équivalente à la nullité des valeurs moyennes des pulsations de la quantité φ, qui sont égales à $\varphi' = \varphi - \bar{\varphi}$. En effet, la condition (IX.8) donne

$$\bar{\varphi}' = \bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}} = 0. \qquad \text{(IX.9)}$$

Pour un mouvement turbulent quasi stationnaire $\bar{\varphi}$ est la fonction seulement des coordonnées. Pour cette raison, si l'on a encore une fonction pulsante ψ, la moyenne par rapport au temps du produit $\bar{\varphi}\psi$ peut s'écrire sous la forme

$$\overline{\bar{\varphi}\psi} = \bar{\varphi}\bar{\psi}, \qquad \text{(IX.10)}$$

étant donné qu'en substituant la fonction $\bar{\varphi}\psi$ dans (IX.7), la grandeur $\bar{\varphi}$ peut être sortie de sous le signe de l'intégrale.

La valeur moyenne de la dérivée d'une certaine fonction par rapport à une coordonnée est égale à la dérivée de la valeur moyenne de cette fonction par rapport à cette même coordonnée, car la dérivation par rapport à la coordonnée et l'intégration sur le temps sont indépendantes. Ainsi

$$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}. \qquad \text{(IX.11)}$$

Cette propriété s'étend également à la dérivée par rapport au temps. En effet, suivant la formule de dérivation de l'intégrale avec

des limites variables nous aurons

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(x, y, z, t)\, dt = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^T \varphi(x, y, z, t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{T} [\varphi(x, y, z, T) - \varphi(x, y, z, 0)] = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dt,$$

d'où

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}. \qquad \text{(IX.12)}$$

Maintenant, en tenant compte de (IX.12) et de (IX.11), effectuons l'opération de la médiation des deux membres de l'équation (IX.6)

$$\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v_x v_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_x v_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_x v_z}}{\partial z} = F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{p}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau}_{zx}}{\partial z} \right). \qquad \text{(IX.13)}$$

Examinons les valeurs moyennes des produits des projections de la vitesse, figurant dans l'équation (IX.13).

En utilisant (IX.2) ainsi que la relation (IX.10), nous pouvons écrire

$$\overline{v_x v_x} = \overline{(\overline{v}_x + v'_x)(\overline{v}_x + v'_x)} = \overline{\overline{v}_x \overline{v}_x + 2\overline{v}_x v'_x + v'^2_x} =$$

$$= \overline{v}_x \overline{v}_x + 2\overline{v}_x \overline{v'_x} + \overline{v'_x v'_x};$$

$$\overline{v_x v_y} = \overline{(\overline{v}_x + v'_x)(\overline{v}_y + v'_y)} = \overline{\overline{v}_x \overline{v}_y + \overline{v}_x v'_y + \overline{v}_y v'_x + v'_x v'_y} =$$

$$= \overline{v}_x \overline{v}_y + \overline{v}_x \overline{v'_y} + \overline{v}_y \overline{v'_x} + \overline{v'_x v'_y};$$

$$\overline{v_x v_z} = \overline{(\overline{v}_x + v'_x)(\overline{v}_z + v'_z)} = \overline{\overline{v}_x \overline{v}_z + \overline{v}_x v'_z + \overline{v}_z v'_x + v'_x v'_z} =$$

$$= \overline{v}_x \overline{v}_z + \overline{v}_x \overline{v'_z} + \overline{v}_z \overline{v'_x} + \overline{v'_x v'_z},$$

d'où, suivant la relation (IX.9), nous aurons

$$\overline{v_x v_x} = \overline{v}^2_x + \overline{v'_x v'_x};$$

$$\overline{v_x v_y} = \overline{v_x v_y} + \overline{v'_x v'_y};$$

$$\overline{v_x v_z} = \overline{v}_x \overline{v}_z + \overline{v'_x v'_z}$$

et

$$\overline{p'_{xx}} = \overline{\tau'_{yx}} = \overline{\tau'_{zx}} = 0.$$

En définitive, après substitution de ces expressions dans l'équation (IX.13), il vient

$$\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{v}_x \overline{v}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v}_x \overline{v}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v}_x \overline{v}_z) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{v'_x v'_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'_x v'_y}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v'_x v'_z}) = F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{p}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau}_{xz}}{\partial z} \right). \qquad \text{(IX.14)}$$

En tenant compte de ce qu'un écoulement turbulent moyen doit satisfaire à l'équation de la continuité

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}=0,$$

nous obtiendrons en transférant les trois termes du premier membre de (IX.14) dans le deuxième et en groupant les dérivées

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}+\bar{v}_x\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z}=F_x+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}_{xx}-\rho\overline{v'_xv'_x})+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}(\bar{\tau}_{yx}-\rho\overline{v'_xv'_y})+\frac{\partial}{\partial z}(\bar{\tau}_{zx}-\rho\overline{v'_xv'_z})\right]. \qquad \text{(IX.15)}$$

Cette équation montre que dans un écoulement turbulent moyen, aux contraintes de viscosité ordinaires s'ajoutent les contraintes qui dépendent des fluctuations de la vitesse. Ces termes s'appellent contraintes turbulentes, qui sont absentes dans l'écoulement laminaire. La cause physique de leur apparition est liée à un échange de la quantité de mouvement entre les différentes portions de l'écoulement turbulent, dû à un mélange des particules; le transfert de la quantité de mouvement provoque un ralentissement ou une accélération supplémentaire des masses particulières du fluide, c'est-à-dire l'apparition de contraintes turbulentes.

Analogiquement, on peut transformer les équations de la dynamique des fluides visqueux en projections sur les axes des y et z.

L'ensemble des contraintes normales et tangentielles de turbulence constitue, analogiquement aux contraintes de viscosité, une matrice symétrique des contraintes de turbulence

$$\begin{vmatrix} -\rho\overline{v'_xv'_x} & -\rho\overline{v'_yv'_x} & -\rho\overline{v'_zv'_x} \\ -\rho\overline{v'_xv'_y} & -\rho\overline{v'_yv'_y} & -\rho\overline{v'_zv'_y} \\ -\rho\overline{v'_xv'_z} & -\rho\overline{v'_yv'_z} & -\rho\overline{v'_zv'_z} \end{vmatrix}.$$

Pour le cas le plus simple de l'écoulement plan turbulent s'écoulant le long de l'axe des x, on peut écrire

$$\tau=\mu\frac{d\bar{v}_x}{dy}-\rho\overline{v'_xv'_y}=\mu\frac{d\bar{v}_x}{dy}+\tau_t, \qquad \text{(IX.16)}$$

c'est-à-dire la contrainte tangentielle totale sur une aire parallèle à l'axe des x se compose de deux termes.

Le premier terme correspond aux contraintes de viscosité tangentielles, déterminées suivant l'hypothèse de Newton, le second τ_t aux contraintes de turbulence. Ainsi, dans les équations du mouvement sont apparues six nouvelles grandeurs inconnues des contraintes de turbulence; pour les calculer il faut déterminer la liaison entre les vitesses pulsaloires et moyennes dans un écoulement turbulent.

Cette liaison est déterminée par les théories de la turbulence basées sur des hypothèses physiques plus ou moins simples relatives au caractère de la turbulence. Cependant, toutes ces théories sont à présent semi-empiriques, car pour l'obtention de valeurs numériques concrètes, il est indispensable de connaître certaines grandeurs déterminées par les expériences.

Si l'on représente les contraintes de turbulence par analogie avec la loi de Newton comme

$$\tau_t = -\overline{\rho v'_x v'_y} = A \frac{d\bar{v}_x}{dy},$$

la grandeur A dans cette formule peut être considérée comme un coefficient de la « viscosité turbulente » provoquée par un transfert macroscopique de la quantité de mouvement des volumes finis de fluide, dû aux fluctuations transversales de la vitesse. Si l'on suppose pour le cas du mouvement dans un tuyau plat que la grandeur A soit constante suivant la section du tuyau, et on la détermine d'après la résistance mesurée du tuyau, il s'avérera qu'elle dépasse des dizaines de milliers de fois la valeur du coefficient de la viscosité moléculaire μ. Suivant l'expression imagée de I. Kibel, le coefficient de la viscosité turbulente de l'air se trouve égal au coefficient de la viscosité moléculaire ordinaire d'un sirop, et le coefficient cinématique correspondant de la viscosité turbulente $\varepsilon^* = \frac{A}{\rho}$ au coefficient cinématique de la viscosité moléculaire d'un cirage à chaussures.

Cependant, comme le montrent des mesures, le coefficient de la viscosité turbulente n'est pas constant, il change fortement suivant la section du tuyau ou de la couche frontière de très faibles valeurs au voisinage immédiat de la paroi jusqu'à un certain maximum environ à la moitié du rayon du tuyau et ensuite atteint à nouveau son minimum sur l'axe du tuyau.

§ 50. HYPOTHÈSES PRINCIPALES PERMETTANT D'EXPRIMER LES CONTRAINTES DE TURBULENCE EN FONCTION DES VITESSES MOYENNES DE L'ÉCOULEMENT

La solution du problème relatif au calcul des caractéristiques d'un écoulement plan turbulent présente un intérêt particulier du point de vue des calculs du mouvement d'un fluide dans les conduites et de l'étude de l'écoulement autour des corps. A titre d'un exemple simple, considérons l'écoulement turbulent plan dont les vitesses moyennes sont dirigées le long d'une paroi plane horizontale. Dans ce cas le valeur moyenne dans le temps de la pression dans l'écoulement est constante et les accélérations moyennes des particules sont nulles.

En examinant les forces agissant sur un volume élémentaire ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, placé dans l'écoulement le long de la paroi, et en tenant compte de la constance des pressions et de l'absence des accélérations, nous arrivons à la conclusion que τ, c'est-à-dire la contrainte moyenne dans le temps des forces tangentielles, est constante en travers de l'écoulement. Il faut remarquer que les conditions de l'écoulement du fluide dans la couche limite, par exemple le long de la plaque, diffèrent de celles adoptées ci-dessus par la présence des accélérations des particules, et donc dans ce cas l'hypothèse sur la constance de τ suivant la section n'est pas justifiée. Suivant les hypothèses faites sur les valeurs instantanées des vitesses dans l'écoulement considéré, nous obtenons les formules suivantes:

$$v_x = \overline{v}_x + v'_x;$$
$$v_y = v'_y.$$

En plus du mouvement effectué le long de la paroi, les particules fluides, par suite d'un mélange turbulent, se déplacent également transversalement. Pour exprimer les vitesses pulsatoires d'un écoulement en fonction des valeurs moyennes des vitesses, supposons que les particules séparées du fluide en se déplaçant transversalement à l'écoulement conservent sur une certaine distance de parcours la valeur moyenne de la vitesse $\overline{v}_x$ correspondant à un point à partir duquel elles ont commencé leur mouvement. La valeur de ce déplacement transversal des particules l_{v_x}, jouant le même rôle que la longueur du parcours libre des molécules en mouvement thermique, est caractéristique pour le point donné de l'écoulement turbulent.

En se déplaçant à travers l'écoulement à une distance l_{v_x}, la particule de fluide arrive dans une zone de l'écoulement où la valeur moyenne de la vitesse est égale à $\overline{v}_x + \Delta\overline{v}_x$, la valeur de l'accroissement de la vitesse $\Delta\overline{v}_x$ pouvant être, par suite de la petitesse du segment l_{v_x}, calculée suivant la formule

$$\Delta\overline{v}_x = \frac{d\overline{v}_x}{dy} l_{v_x}.$$

Ayant une vitesse moyenne $\overline{v}_x$, la particule fluide, en se déplaçant en un point de l'espace où la vitesse moyenne est $\overline{v}_x + \Delta\overline{v}$, provoque en ce point une baisse provisoire de la vitesse, égale à $\Delta\overline{v}_x$, ce qui sera enregistré par l'appareil comme une pulsation instantanée. Ainsi on peut supposer que

$$\sqrt{\overline{v_x'^2}} = \Delta\overline{v}_x = l_{v_x} \frac{d\overline{v}_x}{dy}. \tag{IX.17}$$

Si l'on suppose encore que

$$\sqrt{\overline{v_y'^2}} = l_{vy} \frac{d\bar{v}_x}{dy}, \qquad \text{(IX.18)}$$

et si l'on utilise l'expression du coefficient de corrélation en un même point

$$R = \frac{\overline{v_x' v_y'}}{\sqrt{\overline{v_x'^2}}\sqrt{\overline{v_y'^2}}}, \qquad \text{(IX.19)}$$

l'expression du module de la contrainte tangentielle turbulente peut être écrite, en vertu de (IX.19), (IX.17) et (IX.18), sous la forme suivante :

$$|\tau_t| = \rho\overline{v_x' v_y'} = \rho R l_{vx} l_{vy} \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)^2 = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)^2, \qquad \text{(IX.20)}$$

où

$$l^2 = R l_{vx} l_{vy}.$$

La grandeur l, appelée longueur de mélange, caractérise l'échelle de la turbulence en un point donné et, généralement parlant, dépend de ses coordonnées.

Afin que la formule (IX.20), proposée par Prandtl, détermine non seulement la valeur absolue de la contrainte turbulente tangentielle, mais aussi le signe, elle doit avoir le même signe que la dérivée de la vitesse suivant la coordonnée, c'est-à-dire que la formule (IX.20) doit être récrite sous la forme

$$\tau_t = \rho l^2 \left[\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right] \frac{d\bar{v}_x}{dy}. \qquad \text{(IX.21)}$$

Pour l'utilisation pratique de cette formule, il est indispensable de faire des hypothèses supplémentaires qui permettraient de déterminer le facteur inconnu l. La plus simple est l'hypothèse de Prandtl, suivant laquelle on prend la grandeur l proportionnelle à la distance du point donné de l'écoulement à la paroi, c'est-à-dire

$$l = \varkappa y, \qquad \text{(IX.22)}$$

où $\varkappa$ est un certain nombre constant. Physiquement, cette hypothèse signifie que le degré de liberté des particules de fluide dans la direction transversale augmente au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la paroi.

En tenant compte de ce fait, la valeur absolue de τ_t se détermine ainsi :

$$|\tau_t| = \rho \varkappa^2 y^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)^2. \qquad \text{(IX.23)}$$

La théorie exposée ne détermine pas la constante $\varkappa$, et pour l'obtenir, il faut effectuer des expériences sur l'étude du champ des vitesses d'un écoulement turbulent.

Cependant, les expériences montrent qu'au voisinage de la frontière extérieure de la couche limite la longueur du parcours cesse pratiquement de dépendre de la coordonnée transversale, c'est-à-dire dans cette région

$$l(y) \approx \text{const.} \qquad \text{(IX.24)}$$

Dans les écoulements turbulents libres à filets, le parcours de mélange est également admis constant à travers le filet et proportionnel à la largeur δ de la zone, c'est-à-dire

$$l(x) = \beta\delta(x), \qquad \text{(IX.25)}$$

où le coefficient de proportionnalité β est déterminé par l'expérience.

De cette façon, l'écoulement dans la partie extérieure de la couche limite turbulente a beaucoup de traits communs avec l'écoulement dans les filets turbulents.

Le dépouillement des expériences de Nikouradzé a montré que la meilleure concordance avec l'expérience effectuée dans des tuyaux cylindriques s'obtient pour la distribution suivante de la longueur du parcours de mélange suivant la normale à la paroi

$$l = r_0\left[0{,}14 - 0{,}08\left(1 - \frac{y}{r_0}\right)^2 - 0{,}06\left(1 - \frac{y}{r_0}\right)^4\right], \qquad \text{(IX.26)}$$

où r_0 est le rayon du tuyau (fig. IX.1). La formule (IX.26) peut être considérée comme une formule d'interpolation entre les expressions (IX.22) pour l au voisinage de la paroi et (IX.24) au centre du tuyau (près de la frontière extérieure de la couche limite). En effet, pour $\frac{y}{r_0} \ll 1$ elle prend la forme $l \approx 0{,}4y$ et pour $\frac{y}{r_0} \to 1$, elle se transforme en relation $l \approx 0{,}14r_0$.

Passons à l'examen de la loi de distribution des vitesses moyennes pour le cas où la grandeur τ est constante à travers l'écoulement. c'est-à-dire $\tau = \tau_0$, où τ_0 est la contrainte de frottement au voisinage de la paroi. Introduisons une nouvelle grandeur

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \qquad \text{(IX.27)}$$

qui, possédant la dimension de la vitesse, caractérise la contrainte de frottement au voisinage des parois, rapportée à la masse volumique du fluide. Alors, en négligeant les contraintes tangentielles de viscosité, c'est-à-dire en posant $\tau = \tau_t$, on peut obtenir, d'après (IX.23), l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d\overline{v}_x}{dy} = \frac{v^*}{\varkappa y}. \qquad \text{(IX.28)}$$

En tenant compte de ce qu'à travers l'écoulement v^* est une grandeur constante et en intégrant cette équation, nous trouvons

$$\bar{v}_x = \frac{v^*}{\varkappa} \ln y + \ln C_0, \qquad \text{(IX.29)}$$

où C_0 est une constante.

Pour la commodité d'utilisation, il est avantageux de représenter cette formule sous forme d'une relation sans dimensions. A cet effet, ajoutons et soustrayons du second membre le terme constant $\frac{v^*}{\varkappa} \ln \frac{v^*}{\nu}$ et ensuite en désignant $-\frac{v^*}{\varkappa} \ln \frac{v^*}{\nu} + \ln C_0 = Cv^*$, où C est une nouvelle constante, et en regroupant les termes, nous trouvons

$$\bar{v}_x = \frac{v^*}{\varkappa} \ln \frac{v^* y}{\nu} + Cv^*. \qquad \text{(IX.30)}$$

Etant donné que la grandeur v^* a les dimensions de la vitesse, dans cette formule sous le signe du logarithme il se forme un paramètre sans dimensions, analogue par sa structure au nombre de Reynolds exprimé au moyen de la distance y du point donné de l'écoulement à la paroi.

La relation obtenue montre que dans un écoulement plan turbulent il existe une région où la distribution des vitesses moyennes est régie par une loi logarithmique. Il est à noter que pour $y = 0$, c'est-à-dire au voisinage de la paroi, $\ln \frac{v^* y}{\nu} \to -\infty$, ce qui ne permet pas d'utiliser la condition aux limites pour l'adhérence d'un fluide sur la paroi afin d'obtenir la constante C entrant dans la formule obtenue. Ceci s'explique par le fait qu'avec $y \to 0$ et $l \to 0$ également, c'est-à-dire que dans cette région, la possibilité d'un mélange turbulent des particules du fluide est exclue. Par conséquent, il y a lieu de supposer qu'au voisinage immédiat de la paroi, il doit se conserver un écoulement dont le caractère dépend uniquement de la viscosité du fluide. Au voisinage de la limite extérieure de cette région il se produit un passage continu de la loi logarithmique dans la zone turbulente extérieure à la loi de la distribution des vitesses dans une sous-couche visqueuse.

Si l'on se sert de la conclusion précédente relative à la constance de la grandeur τ également pour une sous-couche visqueuse, alors en utilisant la formule de Newton et en tenant compte de ce que dans cette région de l'écoulement $\tau_t = 0$, on peut écrire

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy}.$$

On en trouve une équation pour la détermination de la grandeur v_x

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\tau}{\mu},$$

suivant laquelle

$$v_x = \frac{\tau}{\mu} y + C_1,$$

c'est-à-dire dans la sous-couche visqueuse est valable la loi linéaire de la distribution des vitesses.

En utilisant la condition d'adhérence à la paroi, nous obtenons $C_1 = 0$; en introduisant le coefficient cinématique de la viscosité, on peut écrire

$$v_x = \frac{v^{*2} y}{\nu}. \qquad \text{(IX.31)}$$

Convenons de considérer comme la limite extérieure de la sous-couche l'ordonnée $y = \delta_l$ et exigeons sur cette limite la continuité du passage des vitesses de la distribution linéaire dans la sous-couche visqueuse à la distribution logarithmique dans l'écoulement extérieur. Alors, en égalisant (IX.30) et (IX.31), nous obtenons une équation pour la détermination de la constante C

$$\frac{v^* \delta_l}{\nu} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{v^* \delta_l}{\nu} + C. \qquad \text{(IX.32)}$$

Ainsi, la valeur de la constante C se trouve liée à un nouveau paramètre δ_l, c'est-à-dire pour déterminer la grandeur C (ou δ_l) aussi bien que pour trouver la constante $\varkappa$, il est indispensable d'utiliser les données des expériences.

En déduisant la loi logarithmique de la distribution des vitesses dans une zone turbulente de l'écoulement, nous avons entièrement négligé l'influence des forces de la viscosité, qui, en réalité, ne sont pas nulles dans cette zone. Pour évaluer l'erreur possible, essayons d'évaluer le rapport entre les contraintes tangentielles turbulentes et les contraintes de viscosité dans la zone turbulente de l'écoulement. Pour cela trouvons le rapport des valeurs mentionnées

$$\frac{\tau_t}{\tau_v} = \frac{\rho l^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2}{\mu \frac{d\bar{v}_x}{dy}} = \frac{\varkappa^2 y^2 \frac{d\bar{v}_x}{dy}}{\nu}.$$

En tenant compte de la relation (IX.28), on peut écrire

$$\frac{\tau_t}{\tau_v} = \varkappa \frac{v^* y}{\nu}.$$

Si les valeurs de y ne sont pas très petites, ce rapport, vu la petitesse de la grandeur ν, s'avère être très grand et signifie que dans la zone turbulente de l'écoulement, $\tau_t \gg \tau_v$; dans la zone, où y est proche de δ_l, le rapport $\tau_t : \tau_v$ est petit et, par conséquent, dans cette zone de l'écoulement l'influence de la viscosité sur la loi de la distribution des vitesses est importante.

Il est à noter que la formule (IX.30) permet de calculer le débit et d'autres caractéristiques intégrales de l'écoulement turbulent, car dans le calcul des intégrales correspondantes l'infini logarithmique est « faible » et assure leur valeur finie.

La formule universelle (IX.30) peut être obtenue également pour des raisons de la détermination de la dimension. Suivant le schéma de l'écoulement à deux couches, admis dans les raisonnements ci-dessus pour $y > \delta_l$, le gradient de la vitesse moyenne $d\bar{v}_x/dy$ ne doit pas dépendre de la viscosité, c'est-à-dire il ne doit dépendre que de τ_0, ρ et y. Comme il est facile de voir, avec ces paramètres on ne peut constituer qu'une seule combinaison

$$\frac{\tau_0^{1/2}}{\rho^{1/2}y}=\frac{v^*}{y},$$

ayant la dimension du gradient de la vitesse. On en déduit que pour $y > \delta_l$, il doit se vérifier la relation (IX.28) obtenue précédemment pour d'autres raisons et qui conduit à la distribution des vitesses (IX.30).

La région du fluide où se vérifie la relation (IX.30) s'appelle couche limite logarithmique. Pour cette région, le profil logarithmique de la distribution des vitesses est bien corroboré par de nombreuses expériences et peut être considéré comme une loi.

Mais alors, en partant de l'équation (IX.28), nous arrivons à la formule de Prandtl (IX.23) qui peut être considérée comme une loi pour la couche limite logarithmique.

CHAPITRE X

PROBLÈME INTERNE DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES VISQUEUX

§ 51. PROBLÈME UNIDIMENSIONNEL DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES VISQUEUX

Les calculs des écoulements d'un fluide visqueux sont nécessités par la résolution d'un grand nombre de problèmes techniques importants, se rapportant aussi bien au problème interne qu'au problème externe de la mécanique des fluides. Cependant, le caractère mathématique compliqué des équations de Navier-Stokes ne permet généralement pas d'utiliser directement ces équations et d'obtenir des solutions désirées. Des difficultés supplémentaires apparaissent lorsque l'écoulement du fluide visqueux devient turbulent.

Pour surmonter ces difficultés, on utilise différentes méthodes de simplification des problèmes examinés. Les simplifications concernant un problème interne se ramènent à l'introduction de la notion d'écoulements unidimensionnels.

Dans le problème interne et surtout lorsqu'on étudie les écoulements dans les conduites, canaux, etc., une grande importance revient aux écoulements dits graduellement variés. Dans ces écoulements, les lignes de courant sont des lignes presque parallèles avec des courbures insignifiantes et les sections mouillées sont presque normales aux lignes de courant, la surface de la section mouillée variant graduellement le long de l'écoulement.

Examinons quelques propriétés de tels écoulements, dont l'aspect des lignes de courant reprend évidemment la forme de la frontière et peut être considéré comme connu. Supposons l'axe des x dirigé le long des lignes de courant d'un tel écoulement, alors les axes des y et des z seront disposés dans le plan de la section mouillée. Dans ce cas les projections v_y et v_z de la vitesse sont pratiquement nulles et en vertu de l'équation de continuité

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=0,$$

c'est-à-dire dans un tel écoulement la vitesse $v = v_x = f(y, z)$.

En admettant le mouvement du fluide établi, c'est-à-dire $\frac{dv_x}{dt} = 0$, nous trouvons que dans le cas examiné les éguations de Navier-

Stokes (VIII.12) prendront la forme

$$\left.\begin{aligned} F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)=0;\\ F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0;\\ F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (X.1)$$

Les deux dernières équations se confondent complètement avec les équations correspondantes (II.1) de l'équilibre d'un fluide au repos. Ceci montre que dans le plan de la section mouillée d'un mouvement graduellement varié d'un fluide visqueux les pressions sont distribuées suivant la loi de l'hydrostatique. Considérons la pression p en un point donné de l'écoulement comme la somme des pressions hydrostatique p_{st} et de surcharge p_s

$$p=p_{st}+p_s;$$

alors en tenant compte que suivant les équations de la statique des fluides

$$F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{st}}{\partial x}=0,$$

la première des équations (X.1) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_s}{\partial x}=\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right). \qquad (X.2)$$

D'après cette équation, tous les écoulements graduellement variés du fluide visqueux peuvent être divisés en deux catégories principales: à surface libre et en charge. Dans les écoulements à surface libre

$$\frac{\partial p_s}{\partial x}=0,$$

c'est-à-dire la pression de surcharge est constante le long de ceux-ci. A cette catégorie d'écoulement se rapportent les écoulements du fluide dans les rivières, dans les canaux, ainsi que l'écoulement entre des parois parallèles, dont l'une est, par exemple, en mouvement et l'autre immobile.

Dans les écoulements en charge $\partial p_s/\partial x \neq 0$. C'est le cas des écoulements dans les conduites dont la section est complètement remplie, par exemple, de l'eau ou de l'air. Comme le deuxième membre de l'équation (X.2) n'est fonction que de y et de z et ne dépend pas de x et que la pression de surcharge dans un écoulement graduellement varié n'est fonction que de x, alors cette égalité peut être vérifiée seulement au cas où

$$\frac{\partial p_s}{\partial x}=\text{const}.$$

Ceci montre que dans un écoulement en charge graduellement varié, la pression de surcharge est distribuée le long de l'écoulement suivant une loi linéaire.

Dans un écoulement en charge, la source d'énergie qui met le courant en mouvement d'après l'équation (X.2) est la chute de pression de surcharge. Dans un écoulement libre, le mouvement d'un fluide visqueux s'effectue grâce à l'action des forces massiques, c'est-à-dire du terme F_x dans le premier membre de la première équation (X.1).

Introduisons pour la section mouillée donnée S d'un écoulement graduellement varié, d'après (III.50), la notion de la vitesse moyenne

$$v_{\text{moy}} = \frac{\int\limits_S v_x \, dS}{S} = \frac{Q}{S} .$$

Alors pour décrire un écoulement en charge, il suffit de connaître les relations de la vitesse moyenne et de la pression de surcharge en fonction de la coordonnée x comptée le long de l'écoulement libre, et pour décrire un écoulement libre, les relations de v_{moy} et de la profondeur d'eau en fonction de x. Par suite dans les deux cas on peut considérer, avec un degré de précision suffisante, le problème comme unidimensionnel. Dans le cadre du problème unidimensionnel, il est possible d'étudier aussi des écoulements graduellement variés non permanents dans lesquels la vitesse v_x est fonction du temps. Dans ce cas, la vitesse moyenne et la pression dans l'écoulement en charge dépendront également du temps et dans l'écoulement libre, de la profondeur d'eau.

La méthode permettant de réduire le problème à l'étude d'un mouvement unidimensionnel est largement utilisée en hydraulique où l'on étudie le mouvement du fluide dans les conduites et les canaux découverts.

§ 52. ÉQUATION DE BERNOULLI POUR L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX

Pour résoudre les problèmes des écoulements unidimensionnels des fluides visqueux, il est indispensable de déterminer la relation qui lie les vitesses moyennes d'un tel écoulement aux pressions. Le fait qu'il est impossible d'obtenir les intégrales des équations du mouvement de la dynamique des fluides visqueux, analogues à celles examinées au § 15 pour le fluide parfait, complique beaucoup la détermination d'une telle relation. Pour parer à ses difficultés, servons-nous des méthodes énergétiques d'évaluation des caractéristiques d'un écoulement.

En supposant que le mouvement du fluide s'effectue dans le champ de pesanteur et gu'il est permanent, on peut écrire pour les

particules placées sur une même ligne de courant dans un fluide parfait l'équation de Bernoulli, suivant laquelle

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}. \qquad (X.3)$$

Cette corrélation exprime la loi de la conservation de l'énergie des particules placées en des points quelconques *1* et *2* sur la ligne de courant dans un fluide parfait. Suivant les notations adoptées, l'énergie totale est rapportée à l'unité de poids d'un volume fluide, c'est-à-dire l'équation est écrite sous la forme d'une égalité des énergies spécifiques. Cependant, lors du mouvement d'un fluide visqueux du point *1* vers le point *2* le long de la ligne de courant il y aura la dissipation de l'énergie. Ce processus est lié à l'apparition dans le fluide visqueux des contraintes de viscosité et en particulier des forces de frottement; pour surmonter ces dernières, on doit dépenser une certaine partie de l'énergie du fluide. Par conséquent, dans le cas d'un fluide visqueux l'égalité (X.3) doit être remplacée par une inégalité, dans laquelle le deuxième membre est plus petit que le premier par suite de la dissipation de l'énergie au cours du mouvement de la particule fluide du point *1* vers le point *2*

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}>z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}.$$

Mais d'après cette inégalité, on peut écrire que

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}\right)=h_p, \qquad (X.4)$$

où h_p est la perte spécifique d'énergie dans un fluide visqueux entre deux points de la ligne de courant.

Ainsi, suivant (X.4) dans un fluide visqueux en écoulement permanent le long d'une ligne de courant, la relation suivante est valable pour les énergies spécifiques:

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+h_p. \qquad (X.5)$$

Jusqu'à présent il n'existe pas de formules efficaces pour le calcul de la grandeur h_p. La relation (X.5) peut être étendue au cas de l'écoulement d'un fluide visqueux. Pour cela nous allons examiner les sections *1* et *2* de l'écoulement graduellement varié d'un fluide visqueux (fig. X.1).

La vitesse v_1 dans la section mouillée S_1 de même que la vitesse v_2 dans la section mouillée S_2 sont variables et les lois de la distribution des vitesses dans les deux sections peuvent être différentes. Etant donné que dans les sections examinées l'écoulement est graduellement varié, la pression dans ces écoulements est distribuée sui-

vant la loi hydrostatique, c'est-à-dire

$$z+\frac{p}{\gamma}=\text{const.} \qquad \text{(X.6)}$$

En utilisant la relation (X.4), calculons la différence entre les flux de l'énergie transportée par le fluide à travers la première et la seconde section. Pour calculer le flux d'énergie, on doit multiplier l'énergie spécifique en un point donné de la ligne de courant passant

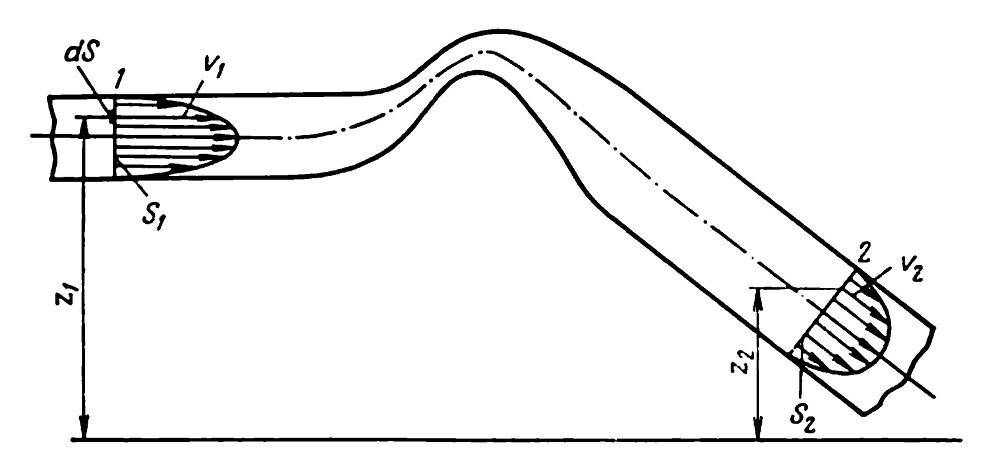


Fig. X.1

par cette section par le débit en poids du fluide à travers une aire dS par le centre de laquelle passe la ligne de courant correspondante. Ce débit est égal à $\gamma v\ dS$.

Le flux total de l'énergie sera obtenu par intégration suivant les sections correspondantes. Pour déterminer la perte d'énergie totale, nous allons intégrer dans la seconde section les pertes d'énergie élémentaire le long de la ligne de courant $h_p \gamma v\, dS$ sur le parcours du fluide de la première section jusqu'à la seconde

$$\int\limits_{S_1}\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}\right)\gamma v_1\, dS-\int\limits_{S_2}\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}\right)\gamma v_2\, dS=\int\limits_{S_2} h_p \gamma v_2\, dS.$$

En tenant compte de ce que

$$\int\limits_{S} v\, dS=Q$$

et que le long de l'écoulement est observée la condition de continuité

$$Q_1=Q_2 \qquad \text{(X.7)}$$

ou

$$S_1 v_{\text{moy}1}=S_2 v_{\text{moy}2},$$

et aussi que dans les sections données la relation (X.6) est valable et que les sommes correspondantes peuvent être sorties de sous le

signe d'intégration, nous obtenons

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)Q_1+\frac{1}{2g}\int\limits_{S_1} v_1^3\,dS-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)Q_2-\frac{1}{2g}\int\limits_{S_2} v_2^3\,dS=$$

$$=\int\limits_{S_2} h_p v_2\,dS. \qquad (X.8)$$

Exprimons les intégrales de la forme $\int\limits_S v^3 dS$ qui caractérisent le flux de l'énergie cinétique du fluide dans la section donnée en fonction de la vitesse moyenne, en introduisant à cet effet le coefficient

$$\alpha_c=\frac{\int\limits_S v^3\,dS}{v_{\text{moy}}^3 S}=\frac{\int\limits_S v^3\,dS}{v_{\text{moy}}^2 Q}, \qquad (X.9)$$

tenant compte de l'influence de la distribution non uniforme de la vitesse suivant la section sur la valeur de l'énergie cinétique calculée d'après la vitesse moyenne de l'écoulement. Il est évident que la valeur de α_c dépend de la loi de la distribution de la vitesse dans la section et si $v = v_{\text{moy}} = \text{const}$, alors $\alpha_c = 1$.

En utilisant le théorème de la moyenne, on peut représenter l'intégrale figurant dans le deuxième membre de (X.8) sous la forme suivante:

$$\int\limits_{S_2} h_p v_2\,dS=H\int\limits_{S_2} v_2\,dS=HQ_2. \qquad (X.10)$$

En portant dans (X.8) les relations (X.9) et (X.10), en tenant compte de l'équation de la continuité (X.7) et en éliminant Q des deux membres de l'équation, on obtient

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\alpha_{c_1}\frac{v_{\text{moy}_1}^2}{2g}-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\alpha_{c_2}\frac{v_{\text{moy}_2}^2}{2g}\right)=H \qquad (X.11)$$

ou

$$\gamma z_1+p_1+\alpha_{c_1}\frac{\rho v_{\text{moy}_1}^2}{2}=\gamma z_2+p_2+\alpha_{c_2}\frac{\rho v_{\text{moy}_2}^2}{2}+\gamma H. \qquad (X.12)$$

La relation (X.12) s'appelle équation de Bernoulli pour l'écoulement d'un fluide visqueux. Elle n'est applicable qu'aux sections où le mouvement est considéré comme graduellement varié.

Entre les sections *1* et *2*, l'écoulement par sa structure peut être autre que graduellement varié (fig. X.1). Ceci n'empêche pas l'emploi de l'équation (X.12) car le terme γH tient compte de toutes les pertes d'énergie sur le chemin de l'écoulement de la première section à la seconde. Suivant (X.11) la grandeur H représente la perte totale de l'énergie, rapportée à l'unité de poids du fluide traversant la seconde section de l'écoulement en unité de temps.

Tous les termes de la formule (X.11) ayant la dimension des hauteurs, on peut représenter graphiquement la variation des pertes suivant la longueur de l'écoulement (fig. X.2). En portant successivement sur le diagramme à partir du plan de référence de la section initiale donnée la hauteur géométrique z_1, la hauteur piézométrique $\frac{p_1}{\gamma}$

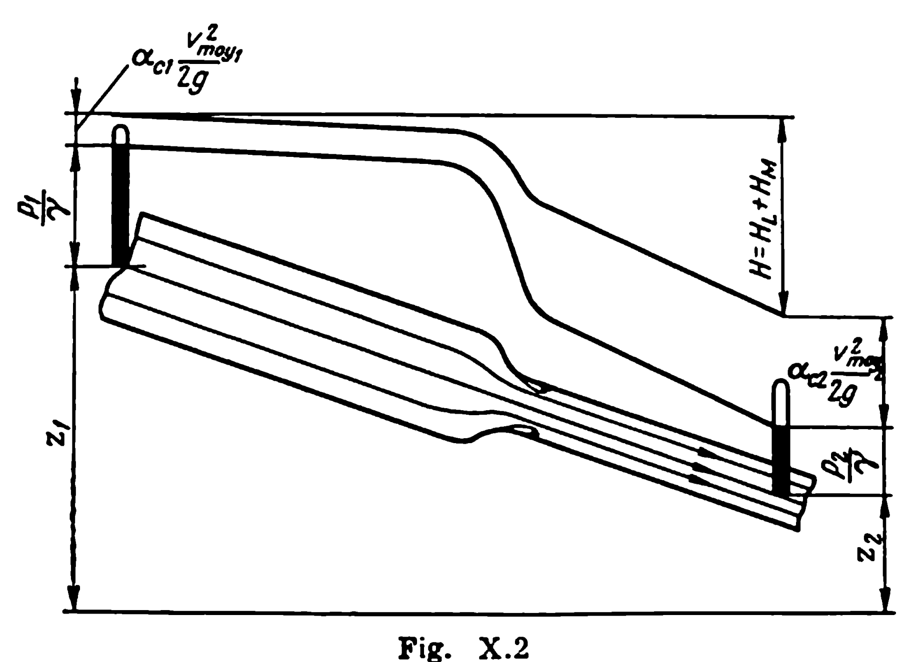


Fig. X.2

et la hauteur de la pression dynamique $\alpha_{c_1}v^2_{moy_1}/2g$, nous obtiendrons la charge hydrodynamique totale dans la section initiale, égale à la somme $z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_{c_1}v^2_{moy_1}}{2g}$.

Pour toute autre section, la somme correspondante des hauteurs, comme le montre la formule (X.11), diminuera par suite de l'apparition des pertes de charge H qui sont déterminées au moyen du diagramme représentant graphiquement l'équation (X.11). Ce diagramme est dit diagramme de Bernoulli. Si la pente de la ligne de charge hydrodynamique totale sur un tronçon de l'écoulement de longueur L est constante, on peut la caractériser par la grandeur

$$I_h=\frac{\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_{c_1}v^2_{moy_1}}{2g}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_{c_2}v^2_{moy_2}}{2g}\right)}{L} \qquad \text{(X.13)}$$

ou en suivant (X.11)

$$I_h=-\frac{H}{L}. \qquad \text{(X.14)}$$

La grandeur I_h s'appelle perte de charge linéique de l'écoulement sur la longueur L.

Si la ligne de charge totale est une courbe, alors on peut faire appel à la notion de la perte de charge linéique en un point donné de l'écoulement

$$I_h = -\frac{d\left(z+\frac{p}{\gamma}+\frac{\alpha_c v_{moy}^2}{2g}\right)}{dL}. \qquad (X.15)$$

Examinons maintenant un écoulement non permanent unidimensionnel. Dans ce cas l'équation du mouvement d'un fluide parfait doit être écrite sous la forme (IV.10). En supposant que l'intégration s'effectue le long de la ligne de courant et que les forces massiques soient potentielles ($\bar{F} = \operatorname{grad} U$) multiplions scalairement l'équation de Groméko (IV.10) par l'élément de la ligne de courant $d\bar{r}$; en groupant les termes, nous obtenons

$$\operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) d\bar{r} = -2(\bar{\omega}\times\bar{v})\,d\bar{r} - \frac{\partial\bar{v}}{\partial t}\,d\bar{r}.$$

Le premier terme du deuxième membre, comme il est montré au § 15, est nul et le premier membre représente la différentielle totale. En supposant $U = -gz$ et en intégrant le long de la ligne de courant sur le tronçon L à partir du point *1* jusqu'au point *2*, nous obtenons

$$\int_L d\left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right) = -\int_L \frac{\partial v}{\partial t}\,dL,$$

où $dL = |d\bar{r}|$.

En définitive, nous trouvons

$$\frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} - \left(\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho}\right) = -\int_L \frac{\partial v}{\partial t}\,dL.$$

Si le fluide est visqueux, alors en partant des mêmes considérations qui nous ont amenés à l'égalité (X.4), nous aurons

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_p + \frac{1}{g}\int_L \frac{\partial v}{\partial t}\,dL.$$

Par la méthode utilisée pour la démonstration de la relation (X.12), c'est-à-dire en introduisant la vitesse moyenne, il est facile d'établir que dans un écoulement graduellement varié

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_{c_1} v_{moy_1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_{c_2}\frac{v_{moy_2}^2}{2g} + H + \frac{1}{g}\int_L \frac{\partial v_{moy}}{\partial t}\,dL. \qquad (X.16)$$

Cette équation peut être considérée comme une généralisation de l'équation (X.12) pour le cas de l'écoulement non permanent du

fluide, où la vitesse moyenne de l'écoulement est une fonction du temps. Le terme $\frac{1}{g}\int\limits_L \frac{\partial v_{moy}}{\partial t}\,dL$ est dit charge due à la vitesse et possède, comme les autres termes de cette équation, la dimension de la longueur.

L'équation (X.16) est employée pour les calculs des oscillations du fluide dans des vases communicants et pour la résolution d'un grand nombre d'autres problèmes internes, quand il faut tenir compte de l'influence de la non-stationnarité de l'écoulement sur ses caractéristiques.

§ 53. FORMULES GÉNÉRALES POUR LES PERTES DE CHARGE

L'utilisation de l'équation de Bernoulli (X.12) ou (X.16) pour la résolution des problèmes unidimensionnels de la mécanique des fluides visqueux n'est possible qu'après l'établissement des formules pour le calcul des pertes de charge H, liant la valeur de ces pertes aux caractéristiques principales de l'écoulement. L'apparition des pertes de charge est physiquement due à la résistance qui se manifeste au cours du mouvement de l'écoulement entre les sections examinées. Cette résistance est parfois appelée résistance hydraulique. Du point de vue du calcul, il est commode de diviser les résistances hydrauliques en deux types: les résistances et les pertes d'énergie liées à celles-ci, distribuées tout le long de l'écoulement, et les pertes de charge singulières.

Pour cette raison, la perte de charge spécifique H peut aussi être représentée sous la forme

$$H = H_L + H_l.$$

La grandeur H_L caractérise les résistances suivant la longueur de l'écoulement. Elle dépend de la longueur des tronçons sur lesquels les conditions d'écoulement sont différentes, par exemple par suite de différents diamètres ou de diverse qualité de la surface des tubes. Les pertes de charge singulières, caractérisées par la grandeur H_l, apparaissent aux endroits où il y a les différents obstacles qui provoquent des variations locales brusques de la structure de l'écoulement, de la valeur ou de la direction de sa vitesse.

Pour le calcul des pertes de charge, on utilise largement le principe de superposition des pertes. Suivant ce principe on admet que certains types de résistances se manifestent indépendamment les uns des autres et ne sont déterminés que par les caractéristiques moyennes locales de l'écoulement. En utilisant ce principe, on peut déterminer la grandeur H pour tout l'écoulement comme une somme des pertes sur ses tronçons séparés suivant la longueur et une somme des

pertes de charge singulières, c'est-à-dire

$$H=\sum_{i=1}^{m} H_{L_i}+\sum_{k=1}^{n} H_{l_k}. \tag{X.17}$$

Ainsi que le montrent les résultats des expériences, cette expression peut être considérée comme pratiquement exacte. Elle est donc largement utilisée pour la résolution des problèmes internes.

Les grandeurs H_L et H_l peuvent être déterminées expérimentalement. A cet effet, il suffit, d'après l'équation (X.11), de mesurer la

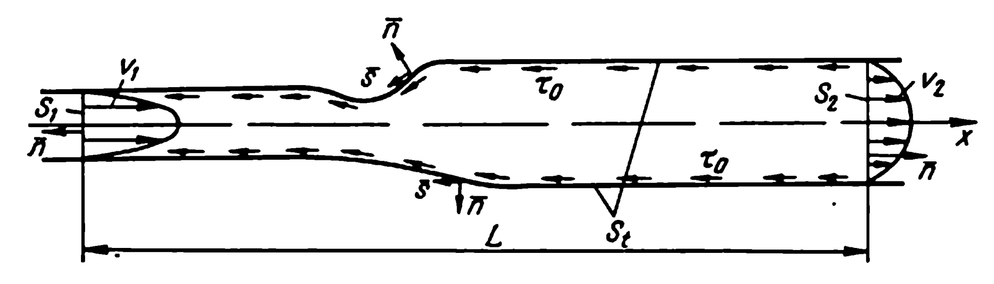


Fig. X.3

différence des hauteurs z_1 et z_2, la différence des indications des piézomètres $\frac{p_1-p_2}{\gamma}$, installés au début et à la fin du tronçon où se trouve la résistance étudiée, et la différence des charges dues à la vitesse $\frac{\alpha_{c_1}v^2_{\text{moy}_1}-\alpha_{c_2}v^2_{\text{moy}_2}}{2g}$ dans l'écoulement. Lors des expériences effectuées dans un tube horizontal de section constante aux points initial et final de mesure, quand $\alpha_{c_1}v^2_{\text{moy}_1}=\alpha_{c_2}v^2_{\text{moy}_2}$, la formule (X.11) se simplifie notablement

$$H=\frac{p_1-p_2}{\gamma}. \tag{X.18}$$

Ce procédé est largement utilisé pour l'obtention de données expérimentales sur les pertes aussi bien relatives à la longueur que singulières.

Pour le calcul des résistances, il est préférable d'obtenir une formule générale permettant de les exprimer en fonction des vitesses caractéristiques et des critères de la similitude dynamique des écoulements. A cet effet, examinons l'écoulement permanent d'un fluide visqueux sur le tronçon horizontal d'un tube de section variable et avec résistance locale (fig. X.3). Considérons deux sections de tube S_1 et S_2 situées dans la zone du mouvement graduellement varié. Appliquons à l'écoulement de fluide limité par ces sections et les parois solides la loi de la quantité de mouvement dans la formulation correspondante à l'expression (IV.30), à savoir: le flux de la quantité de mouvement à travers une surface de contrôle immobile

est égal au vecteur principal des forces extérieures appliquées au fluide délimité par cette surface. Dans le cas donné, sans tenir compte des forces de pesanteur,

$$\rho \oint_S \bar{v} v_n \, dS = -\oint_S p\bar{n} \, dS + \oint_S \tau_0 \bar{s} \, dS,$$

où $\bar{s}$ est le vecteur unité tangent à la surface S.

Suivant la fig. X.3, la surface S se compose de la somme $S = S_1 + S_2 + S_t$, où S_t est la surface des parois du tube sur le tronçon L.

Ecrivons cette équation en projection sur l'axe des x confondu avec l'axe du tube et dirigé dans le sens de l'écoulement. En définitive, en tenant compte de la direction des normales $\bar{n}$ extérieures à la surface S, nous obtenons

$$-\rho \int_{S_1} v_1^2 \, dS + \rho \int_{S_2} v_2^2 \, dS = p_1 S_1 - p_2 S_2 - \int_{S_t} \tau_0 \cos(s, x) \, dS - \int_{S_t} p \cos(n, x) \, dS.$$

Si l'on introduit ici les coefficients qui tiennent compte de l'influence de la distribution non uniforme des vitesses dans la section du tube sur le carré de la vitesse, c'est-à-dire

$$\alpha^* = \frac{\int_S v^2 \, dS}{v_{\text{moy}}^2 S},$$

la formule obtenue permettra d'exprimer la perte de charge sous la forme suivante

$$p_1 S_1 - p_2 S_2 = -\rho (\alpha_1^* v_{\text{moy}_1}^2 S_1 - \alpha_2^* v_{\text{moy}_2}^2 S_2) + \int_{S_t} \tau_0 \cos(s, x) \, dS + \int_{S_t} p \cos(n, x) \, dS. \qquad (X.19)$$

Envisageons maintenant des cas particuliers.

Supposons que le tronçon L ne possède pas de résistances locales et représente un tube à section constante $S_1 = S_2 = S$ avec un périmètre mouillé F. Alors dans la formule (X.19) on aura $\cos(s, x) = 1$, $\cos(n, x) = 0$, $v_{\text{moy}_1} = v_{\text{moy}_2}$. En tenant compte de ce que la contrainte tangentielle τ_0 est constante sur la longueur L, nous obtenons

$$(p_1 - p_2) S = \tau_0 L F,$$

c'est-à-dire

$$p_1 - p_2 = \tau_0 L \frac{F}{S}.$$

Le rapport de la surface de la section mouillée S de l'écoulement à son périmètre mouillé F s'appelle rayon hydraulique

$$r_H = \frac{S}{F}. \qquad \text{(X.20)}$$

Dans le cas donné, en vertu de la formule (X.18)

$$p_1 - p_2 = \gamma H,$$

et la grandeur γH représente les pertes d'énergie suivant la longueur dépensées pour surmonter la résistance de frottement au mouvement de l'écoulement dû aux contraintes tangentielles τ_0, c'est-à-dire

$$\gamma H_L = \tau_0 \frac{L}{r_H}. \qquad \text{(X.21)}$$

Ainsi que l'on sait de la théorie de la similitude, la contrainte tangentielle sur la paroi τ_0 peut être exprimée au moyen du coefficient de frottement local sans dimensions c_f et de la vitesse caractéristique qui est dans le cas donné la vitesse moyenne dans la section du tube, c'est-à-dire

$$\tau_0 = c_f \frac{\rho v^2_{\text{moy}}}{2}.$$

En substituant cette expression dans (X.21), nous obtenons la formule

$$\gamma H_L = c_f \frac{L}{r_H} \frac{\rho v^2_{\text{moy}}}{2}, \qquad \text{(X.22)}$$

qui est une formule générale pour le calcul des pertes d'énergie suivant la longueur de l'écoulement du fluide visqueux.

Dans le cas particulier d'un tube rond, le rayon hydraulique se détermine en fonction de son diamètre D d'après la formule (X.20)

$$r_H = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = \frac{D}{4}.$$

En désignant le coefficient de frottement du tube rond par $\lambda = 4c_f$, récrivons (X.22) sous la forme de la formule

$$\gamma H_L = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho v^2_{\text{moy}}}{2}, \qquad \text{(X.23)}$$

employée dans les calculs des pertes de charge suivant la longueur de l'écoulement d'un fluide dans des tubes ronds.

Comme le coefficient c_f d'après la théorie de la similitude dépend du nombre de Reynolds, le coefficient de frottement λ est également fonction de ce nombre : $\lambda = f$ (Re). Dans le cas d'un tube de section

circulaire

$$\mathrm{Re} = \frac{v_{\mathrm{moy}} D}{\nu};$$

pour les tubes de section non circulaire, en tant que dimension caractéristique, on peut introduire dans le nombre Re le rayon hydraulique.

Arrêtons-nous sur la détermination des pertes d'énergie locales. Pour cela, examinons le cas le plus simple, celui où en aval et en amont d'un obstacle local dans un tube les sections sont identiques et la longueur L du tronçon où est située la résistance locale est petite. Suivant la formule (X.19)

$$(p_1 - p_2) S = \int_{S_t} [\tau_0 \cos(s, x) + p \cos(n, x)]\, dS.$$

Introduisons le nombre d'Euler local

$$\mathrm{Eu} = \frac{p}{\frac{\rho v^2_{\mathrm{moy}}}{2}}$$

et utilisons la formule de la théorie de la similitude pour τ_0; en substituant ceci dans le deuxième membre de la relation obtenue ci-dessus, nous trouvons

$$p_1 - p_2 = \int_{S_t} [c_f \cos(s, x) + \mathrm{Eu} \cos(n, x)] \frac{dS}{S} \frac{\rho v^2_{\mathrm{moy}}}{2}.$$

En désignant l'intégrale sans dimensions

$$\zeta = \int_{S_t} [c_f \cos(s, x) + \mathrm{Eu} \cos(n, x)] \frac{dS}{S},$$

nous obtenons la formule pour le calcul de la perte de charge

$$p_1 - p_2 = \zeta \frac{\rho v^2_{\mathrm{moy}}}{2}.$$

Mais d'après l'expression (X.18) la perte d'énergie et par conséquent la chute de pression sont provoquées dans le cas donné par la résistance locale, c'est-à-dire

$$\gamma H_1 = \zeta \frac{\rho v^2_{\mathrm{moy}}}{2}. \qquad \text{(X.24)}$$

La grandeur sans dimensions ζ s'appelle coefficient de perte de charge singulière. Elle dépend de la forme de la singularité. De plus, étant donné que Eu et c_f sont des fonctions des critères de la similitude dynamique, c'est-à-dire du nombre Re, alors il faut

s'attendre à ce que

$$\zeta = f(\mathrm{Re}).$$

Parfois, vu la faible longueur du tronçon présentant la résistance locale, le rôle du premier terme dans l'expression de ζ n'est pas important et on peut négliger l'influence du nombre de Reynolds sur la valeur du second terme du coefficient de la résistance locale. Par conséquent, on peut supposer que le coefficient ζ pour une telle forme de singularité ne dépend pas des critères de la similitude, c'est-à-dire de la vitesse de l'écoulement, et dans le domaine considéré de variation des nombres Re il est une valeur constante. On utilise souvent cette propriété des coefficients ζ dans les expériences et les calculs des pertes locales suivant la formule (X.24). Si à l'endroit de la traversée de la singularité le diamètre du tube change, alors les valeurs de ζ obtenues dépendent de ce que si la perte d'énergie locale est calculée d'après la vitesse moyenne en aval ou en amont de l'obstacle.

Lorsqu'on étudie les écoulements non stationnaires au moyen de l'équation (X.16) on utilise également pour le calcul des pertes de charge les formules (X.23) et (X.24); on suppose la vitesse moyenne dépendante du temps et on utilise les valeurs de λ et ζ parfois les mêmes qu'en mouvement permanent, c'est-à-dire on fait appel à l'hypothèse de la stationnarité.

§ 54. ÉCOULEMENT LAMINAIRE DANS UN TUBE CYLINDRIQUE

Pour déterminer les pertes d'énergie suivant la longueur de l'écoulement, il est indispensable de connaître les valeurs des coefficients de résistance λ. On les calcule suivant les formules obtenues au cours des études théoriques et expérimentales.

Envisageons le problème de la détermination de la résistance en écoulement laminaire du fluide dans les tubes.

Le problème le plus simple est celui de l'écoulement laminaire du fluide dans une conduite cylindrique de section circulaire.

Admettons que l'écoulement en charge d'un fluide visqueux s'effectue dans une conduite cylindrique de rayon r_0 (fig. X.4). Dans ce cas, la loi de la distribution de la vitesse $v = v_x$ dans toutes les sections suivant la longueur de la conduite est la même et dans la section donnée se détermine par l'équation du mouvement (X.2).

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right).$$

D'après ce qui venait d'être dit au § 51, la différence de pression le long de l'écoulement $\partial p/\partial x$ représente une grandeur constante et,

par conséquent, entre les sections *1* et *2*

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p_1 - p_2}{L} = \text{const.}$$

Comme le long de l'écoulement a lieu une dissipation d'énergie, alors $\partial p/\partial x < 0$. La loi de la distribution de la vitesse dans la section donnée est une fonction des coordonnées y et z. Cependant il est facile de remarquer que l'écoulement dans une conduite cylindrique

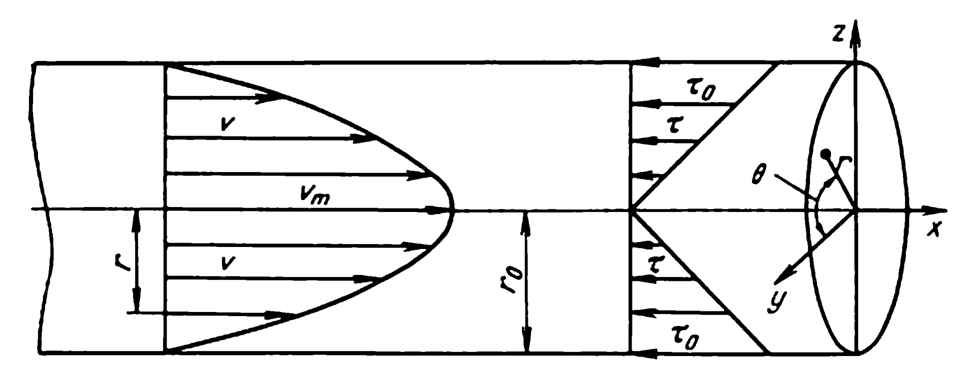


Fig. X.4

de section circulaire est symétrique par rapport à l'axe des x. Donc, dans le système de coordonnées cylindriques x, r, θ, la vitesse dans la section donnée sera fonction seulement du rayon $v = f(r)$. Pour simplifier la solution du problème, introduisons dans le second membre de l'équation du mouvement les coordonnées cylindriques. Il suffit pour cela de transformer l'expression

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \Delta v.$$

D'après les raisonnements énoncés au § 28, pour cette expression on peut déterminer la liaison entre les coordonnées

$$x = x; \quad y = r\cos\theta; \quad z = r\sin\theta$$

et déterminer les coefficients de Lamé

$$H_x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = 1;$$

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1;$$

$$H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} = r.$$

Après cela, suivant la relation (V.107), l'expression cherchée prend la forme

$$\Delta v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

Comme v est fonction seulement de r, les dérivées partielles peuvent être alors remplacées par les dérivées totales. Finalement, compte tenu du signe de la différence de pression, l'équation du mouvement prend la forme

$$-\frac{p_1-p_2}{L}=\mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right).$$

En intégrant cette équation et en tenant compte de ce que le premier membre est constant, nous obtenons

$$r\frac{dv}{dr}=-\frac{p_1-p_2}{2\mu L}r^2+A,$$

où A est la constante d'intégration.

En séparant les variables et en intégrant une seconde fois, on trouve

$$v=-\frac{p_1-p_2}{\mu L}\frac{r^2}{4}+A\ln r+B. \qquad \text{(X.25)}$$

Pour déterminer la constante A, nous exigerons que la vitesse en tous les points de la section, y compris pour $r=0$, c'est-à-dire au centre de la conduite, ait une valeur finie. Ceci n'est possible que pour $A=0$. On trouve la constante B de la condition d'adhérence du fluide aux parois du tube, c'est-à-dire $v=0$ pour $r=r_0$. Ainsi

$$B=\frac{p_1-p_2}{\mu L}\frac{r_0^2}{4}.$$

En introduisant les valeurs trouvées des constantes A et B, nous pouvons écrire la loi de la distribution des vitesses sous sa forme définitive

$$v=\frac{p_1-p_2}{4\mu L}(r_0^2-r^2). \qquad \text{(X.26)}$$

Cette loi représente une parabole de second degré avec une vitesse maximale sur l'axe de la conduite

$$v_m=\frac{p_1-p_2}{4\mu L}r_0^2,$$

c'est-à-dire

$$v=v_m\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right). \qquad \text{(X.27)}$$

Calculons la vitesse moyenne de l'écoulement dans la section

$$v_{\text{moy}}=\frac{Q}{\pi r_0^2}=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} v2\pi r\,dr. \qquad \text{(X.28)}$$

En portant dans cette formule la valeur de la vitesse de (X.27), nous trouvons

$$v_{\text{moy}}=\frac{2v_m}{r_0^2}\int_0^{r_0} r\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)dr=\frac{2v_m}{r_0^2}\left|\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4r_0^2}\right|_0^{r_0}=\frac{v_m}{2}.$$

Le résultat obtenu atteste qu'en mouvement laminaire la vitesse moyenne dans la section d'une conduite cylindrique est deux fois inférieure à la vitesse maximale et est liée à la différence de pression par la formule

$$v_{\text{moy}}=\frac{p_1-p_2}{8\mu L}r_0^2, \tag{X.29}$$

qui a été pour la première fois obtenue expérimentalement par Poiseuille et porte son nom.

Il est aisé d'établir que la solution trouvée décrit un écoulement turbulent. Pour cela il suffit d'examiner par exemple la section de l'écoulement par le plan xoz; dans ce plan $z = r$. La vitesse angulaire de rotation des particules ω_y se détermine par la formule

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=-\frac{v_m}{r_0^2}z,$$

suivant laquelle $\omega_y \neq 0$ et, par conséquent, l'écoulement considéré est turbulent.

Les lignes tourbillons dans cet écoulement se confondent avec les circonférences $r = \text{const}$.

Déterminons suivant la formule (X.9) le coefficient α_c qui tient compte de l'influence de la distribution non uniforme de la vitesse dans la section de la conduite sur la valeur de l'énergie cinétique

$$\alpha_c=\frac{1}{v_{\text{moy}}^3\pi r_0^2}\int_0^{r_0} v^3 2\pi r\,dr.$$

En substituant ici la valeur de v, nous trouvons

$$\alpha_c=\frac{2v_m^3}{v_{\text{moy}}^3 r_0^2}\int_0^{r_0} r\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 dr=$$

$$=\frac{16}{r_0^2}\left|\frac{r^2}{2}-\frac{3}{4}\frac{r^4}{r_0^2}+\frac{3}{6}\frac{r^6}{r_0^4}-\frac{1}{8}\frac{r^8}{r_0^6}\right|_0^{r_0}=2.$$

Pour déterminer le coefficient de résistance λ, il suffit d'exprimer la différence de pression au moyen de la formule de Poiseuille et de l'égaliser à la perte de charge calculée d'après la formule (X.23)

$$\frac{v_{\text{moy}}}{r_0^2}8\mu L=\lambda\frac{L}{D}\frac{\rho v_{\text{moy}}^2}{2},$$

d'où nous trouvons

$$\lambda = \frac{64\nu}{Dv_{\text{moy}}}$$

ou, en introduisant le nombre $\text{Re} = v_{\text{moy}}D/\nu$

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}. \qquad (\text{X}.30)$$

La valeur donnée du coefficient de résistance, corroborée par les expériences, est généralement utilisée pour les calculs techniques.

Dans les conditions réelles, au début de la conduite il se forme une zone où s'effectue la formation graduelle de l'épure parabolique de la vitesse de l'écoulement. Pour cette zone initiale, dont la longueur L_i d'après les données expérimentales est

$$L_i \approx 0{,}065\, D\, \text{Re},$$

la formule (X.30) n'assure pas de résultats exacts.

Les expériences confirment l'exactitude de la formule (X.30) seulement jusqu'au moment où le nombre Re n'atteigne une certaine valeur critique. Pour $\text{Re} = \text{Re}_{\text{cr}}$ il se produit le rassage du régime d'écoulement laminaire au régime turbulent, s'accompagnant de la variation de la loi de distribution des vitesses suivant la section; ceci amène à la modification de la loi du frottement laminaire avec $\text{Re} > \text{Re}_{\text{cr}}$.

Les valeurs du nombre critique Re_{cr} ne sont pas stables et dépendent notablement de l'intensité des perturbations extérieures agissant sur l'écoulement. Dans les calculs techniques, on peut prendre en moyenne pour valeur critique de Re_{cr} dans les conduites cylindriques

$$\text{Re}_{\text{cr}} = 2400$$

et considérer que la formule (X.30) est valable si les nombres de Reynolds pour la conduite ne dépassent pas cette valeur.

Au moyen de l'équation (X.2), on a obtenu également des solutions des problèmes de l'écoulement laminaire du fluide dans les conduites cylindriques de sections elliptique et rectangulaire.

§ 55. ÉCOULEMENT TURBULENT D'UN FLUIDE DANS LES CONDUITES

Le calcul de la perte de charge le long des conduites en régime d'écoulement turbulent se heurte à des difficultés encore plus grandes qu'en régime laminaire. Ceci est dû à l'impossibilité de la résolution du problème par intégration directe des équations du mouvement des fluides visqueux (IX.15) pour l'écoulement turbulent, ces équations contenant des contraintes turbulentes dont la liaison

avec les vitesses moyennes dans le temps est inconnue dans le cas général et pour cette raison le système d'équation reste ouvert. Des difficultés supplémentaires apparaissent lors du choix des conditions aux limites qui, en écoulement turbulent, doivent se vérifier non sur la paroi de la conduite, mais sur la frontière extérieure de la sous-couche visqueuse. Ainsi, pour la justification et l'élaboration de la théorie de l'écoulement turbulent dans les conduites on a besoin actuellement de données expérimentales, c'est-à-dire que cette théorie est semi-empirique.

Examinons la liaison entre la différence de pression dans une conduite cylindrique et la loi de la distribution des contraintes tangentielles dans sa section. En isolant une surface cylindrique, comme cela

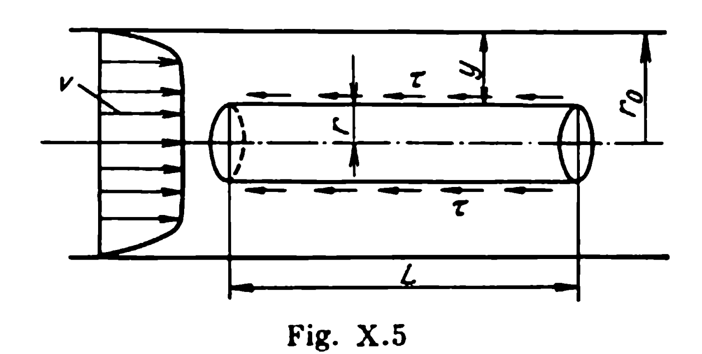


Fig. X.5

est montré sur la fig. X.5, et en utilisant la loi de la quantité de mouvement en projection sur l'axe de la conduite, nous obtenons une relation suivante entre les pressions et les contraintes tangentielles:

$$(p_1 - p_2)\,\pi r^2 = \tau 2\pi r L.$$

Désignons par $y = r_0 - r$ la distance du point donné de l'écoulement à la paroi de la conduite. Alors la variation de la grandeur τ suivant la section de la conduite sera décrite par la relation

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{L}\,\frac{r_0}{2}\left(1 - \frac{y}{r_0}\right).$$

La contrainte tangentielle τ_0 sur la paroi de la conduite se détermine comme $\tau = \tau_0$ avec $y = 0$, c'est-à-dire

$$\tau_0 = \frac{p_1 - p_2}{L}\,\frac{r_0}{2}. \qquad \text{(X.31)}$$

Etant donné que le long de l'écoulement $p_1 - p_2/L = \text{const}$, τ_0 également est constant tout le long de la conduite. La formule (X.31) est commode pour la détermination expérimentale des contraintes tangentielles τ_0 d'après la différence de pression mesurée dans une conduite cylindrique.

En vertu de (X.31), la loi de la distribution des contraintes tangentielles dans la section d'une conduite cylindrique peut être écrite

sous la forme suivante :

$$\tau=\tau_0\left(1-\frac{y}{r_0}\right). \qquad (X.32)$$

Ceci montre que les contraintes tangentielles sont distribuées suivant une loi linéaire et sont nulles sur l'axe de la conduite. On doit remarquer que bien que la formule (X.32) soit déduite sans tenir compte du caractère de l'écoulement dans la conduite, elle reste valable aussi bien pour un écoulement turbulent que pour un écoulement laminaire. On peut s'en assurer en calculant, par exemple, d'après la formule de Newton les valeurs de τ à l'aide de la relation (X.26) qui décrit la loi de la distribution des vitesses en écoulement laminaire. Suivant la relation (X.32), les régimes d'écoulement laminaire et turbulent ne se distinguent que par les valeurs de τ_0.

Le fait que la contrainte tangentielle τ dans la section n'est pas constante en grandeur rend impossible l'étude de l'écoulement turbulent dans les conduites directement au moyen de la loi de la distribution des vitesses moyennes dans le temps en écoulement turbulent, loi obtenue au § 50 dans l'hypothèse que τ soit constant à travers l'écoulement. Pour cette raison on doit se reporter préalablement aux données de l'étude expérimentale des écoulements turbulents dans les conduites.

On représente les données des mesures des caractéristiques de l'écoulement turbulent, effectuées en différents points de la section des conduites, sous la forme d'une relation sans dimensions

$$\frac{\bar{v}_x}{v^*}=f\left(\frac{v^*y}{\nu}\right), \qquad (X.33)$$

qui découle des formules (IX.30) et (XI.31). Ici $v^*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ et $\bar{v}_x$ est la vitesse moyenne de l'écoulement dans le temps au point distant de y de la paroi de la conduite.

Les résultats des mesures des vitesses des écoulements turbulents dans les conduites lisses, effectuées par différents auteurs, sont représentés sur la fig. X.6, sur laquelle figure également la relation (IX.31) transformée en

$$\frac{v_x}{v^*}=\frac{v^*y}{\nu}, \qquad (X.34)$$

qui a dans le réseau logarithmique adopté sur la figure l'aspect d'une exponentielle I, et la relation (IX.30)

$$\frac{\bar{v}_x}{v^*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{v^*y}{\nu}+C \qquad (X.35)$$

sous la forme d'une droite inclinée *II*. On voit d'après la figure qu'on peut isoler plusieurs zones de l'écoulement turbulent dans la section de la conduite suivant la valeur du paramètre v^*y/ν.

La première zone correspond aux valeurs $v^*y/\nu < 30$. Au début de cette zone, avec $v^*y/\nu < 5$, les données de l'expérience correspondent à la relation (X.34) obtenue sous l'hypothèse que les contraintes tangentielles se déterminent complètement comme visqueuses,

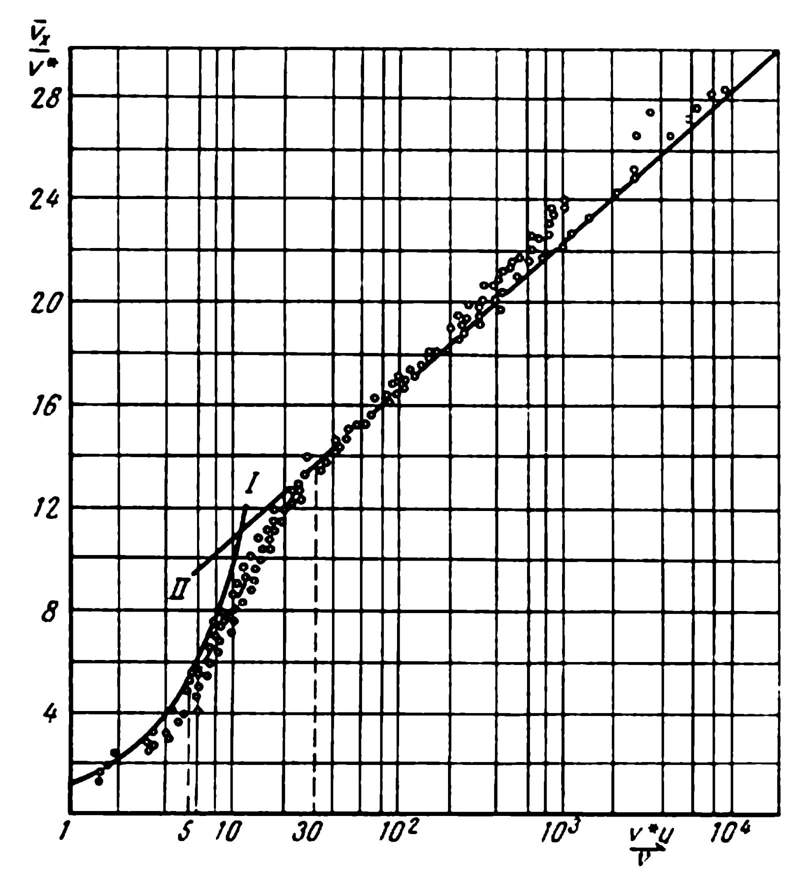


Fig. X.6

c'est-à-dire d'après la loi de Newton, et les contraintes turbulentes $\tau_t = 0$. Par conséquent, l'écoulement dans cette zone avec $y \leqslant \delta_l$ correspond à la sous-couche visqueuse de l'écoulement turbulent.

La partie restante de la zone, où $5 < v^*y/\nu < 30$, est caractérisée par la déviation graduelle de la vitesse de la loi (X.34) ; ceci est dû à l'accroissement de l'importance des contraintes turbulentes et à leur influence sur la structure de l'écoulement. Ainsi, on peut conclure que lors de l'étude théorique de la distribution de la vitesse dans la zone $5\nu/v^* < y < 30\ \nu/v^*$ il faut tenir compte aussi bien des contraintes de viscosité que des contraintes turbulentes, c'est-à-dire utiliser la formule (IX.16).

En se servant de cette relation, Rotta a pu obtenir la formule suivante de la distribution des vitesses dans la zone de transition:

$$\frac{\bar{v}_x}{v^*}=\frac{1-\sqrt{1+4\left[\frac{\varkappa(y-\delta_l)v^*}{\nu}\right]^2}}{2\varkappa^2\frac{v^*(y-\delta_l)}{\nu}}+$$

$$+\frac{1}{\varkappa}\ln\left[2\frac{\varkappa(y-\delta_l)v^*}{\nu}+\sqrt{1+4\left[\frac{\varkappa(y-\delta_l)v^*}{\nu}\right]^2}\right]+\frac{v^*\delta_l}{\nu},$$

où $v^*\delta_l/\nu = 5$. Les mesures montrent que les fluctuations de la vitesse sont observées dans toute la première zone, y compris la sous-couche visqueuse. La présence de telles fluctuations est le trait distinctif de la sous-couche visqueuse par rapport à l'écoulement laminaire ordinaire avec une distribution linéaire des vitesses. La limite extérieure de la zone de transition δ_t se détermine de la condition

$$\frac{\delta_t v^*}{\nu}=30.$$

La seconde zone de l'écoulement correspond aux valeurs du paramètre $30 < v^*y/\nu < 500$; on y observe une bonne concordance des données expérimentales avec la formule (X.35) obtenue sous l'hypothèse que la structure de l'écoulement soit complètement déterminée par les contraintes tangentielles turbulentes, c'est-à-dire $\tau = \tau_t$. Les expériences permettent de déterminer les valeurs des constantes $\varkappa$ et C, qui font partie de cette formule et qui ne sont pas déterminées par la théorie de la turbulence. Ces valeurs pour les conduites sont: $\varkappa = 0{,}40 \div 0{,}41$, $C = 4{,}9 \div 5{,}85$. Une certaine variation des valeurs de ces constantes est probablement due à des écarts dans les données initiales expérimentales de différents auteurs.

La zone de l'écoulement où la loi de la distribution des vitesses est logarithmique (X.35) représente une couche limite logarithmique de la conduite. Avec la zone de transition et la sous-couche visqueuse, cette couche limite forme en écoulement turbulent dans une conduite ce qu'on appelle région voisine de la paroi. Suivant les données des expériences, la distance de la frontière extérieure de cette région à la paroi, indépendamment de la valeur du nombre Re, est toujours constante et constitue $y = 0{,}15\, r_0$, tandis que les épaisseurs de la sous-couche visqueuse δ_l et de la frontière extérieure de la zone de transition δ_t dépendent de Re.

La propriété caractéristique de la région voisine de la paroi de l'écoulement dans une conduite est que dans cette région sont valables les lois de la distribution des vitesses obtenues sous l'hypothèse que τ soit constant dans la section. Ceci témoigne de ce que la variation des contraintes tangentielles, qui suivant la formule (X.31) a lieu dans la section de la conduite, influe peu sur la structure du

champ des vitesses dans cette région de l'écoulement. Pour cette raison les formules théoriques contenant des coefficients expérimentaux peuvent être utilisées avec succès pour les calculs relatifs à cette zone.

Dans la zone $y > 0{,}15\ r_0$, c'est-à-dire $v^*y/\nu > 500$, on observe un écart de la vitesse de la loi logarithmique. Suivant la proposition

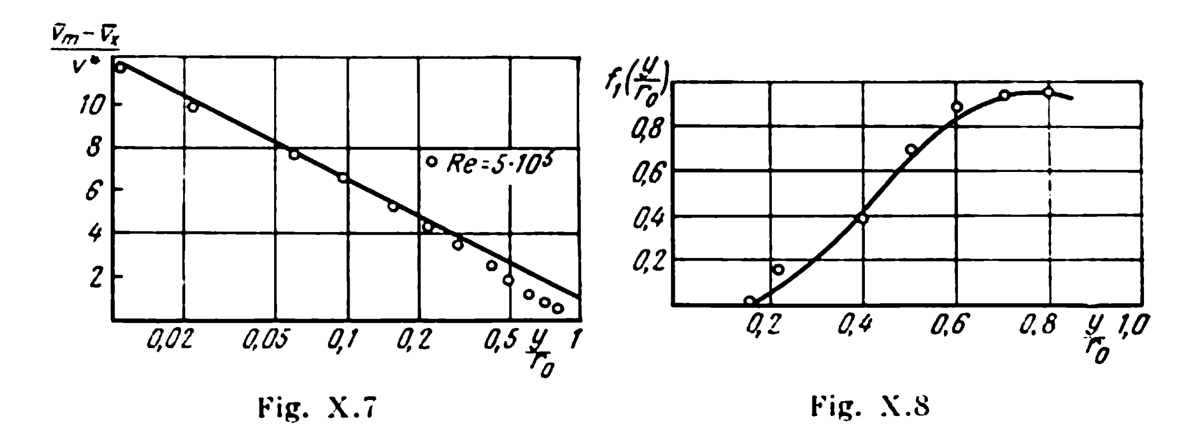


Fig. X.7

Fig. X.8

de Karman dans cette région de l'écoulement turbulent il faut représenter la loi de la distribution des vitesses sous la forme d'une relation générale sans dimensions

$$\frac{\bar{v}_m - \bar{v}_x}{v^*} = f\left(\frac{y}{r_0}\right), \tag{X.36}$$

où v_m est la vitesse au centre de la conduite.

Cette relation, caractéristique pour une large gamme d'écoulements turbulents, est valable également pour la couche turbulente logarithmique de la conduite. Mais la forme de la fonction $f\ (y/r_0)$ dans la région de la couche turbulente diffère de celle qu'elle a dans la partie restante du noyau turbulent de l'écoulement dans une conduite y compris son axe. La fig. X.7 montre, suivant les données des expériences, la forme de cette dépendance pour les conduites cylindriques. Sur cette même figure est montrée la relation

$$\frac{\bar{v}_m - \bar{v}_x}{v^*} = -\frac{1}{\varkappa} \ln \frac{y}{r_0} + B, \tag{X.37}$$

où $B = 0{,}8$, qui approxime assez bien la loi (X.36) dans la zone de la couche logarithmique turbulente. Avec $y > 0{,}15 r_0$, c'est-à-dire dans la région du noyau de l'écoulement, on observe des écarts de la formule (X.37) et pour cette zone on peut utiliser (X.36) sous la forme

$$\frac{\bar{v}_m - \bar{v}_x}{v^*} = -\frac{1}{\varkappa} \ln \frac{y}{r_0} + B - f_1\left(\frac{y}{r_0}\right). \tag{X.38}$$

La fonction $f_1\ (y/r_0)$ pour les conduites est montrée sur la fig. X.8.

La structure compliquée du champ des vitesses de l'écoulement turbulent dans une conduite rend difficile la déduction de la formule pour le calcul de la perte de charge. Cependant, comme il résulte des fig. X.6 et X.7, cette loi compliquée peut être, avec un degré de précision suffisant, approximée à l'aide de deux relations simples (X.34) et (X.35). La relation (X.34) peut être considérée comme valable jusqu'à l'ordonnée correspondant au point de son intersection avec la ligne correspondant à l'équation (X.35) ; cette ordonnée adoptée comme épaisseur conventionnelle de la sous-couche visqueuse δ_l correspond à

$$\frac{v^*\delta_l}{\nu}=\alpha_l=\text{const}. \qquad (X.39)$$

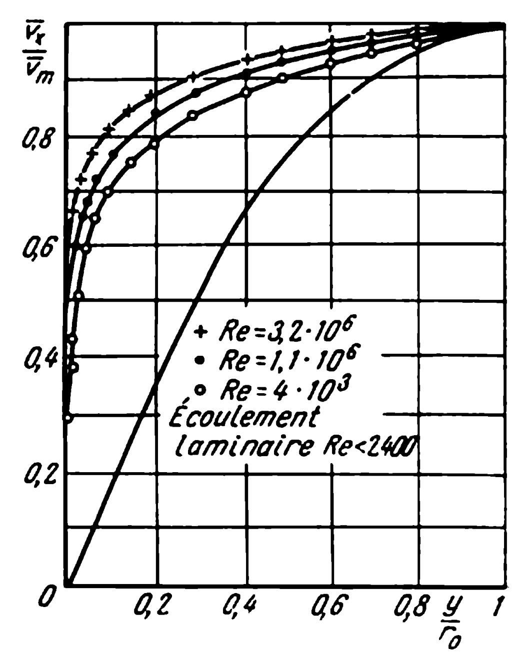


Fig. X.9

La loi de la distribution des vitesses dans la zone restante de l'écoulement, jusqu'au centre de la conduite, est supposée logarithmique, correspondant à l'équation (X.35). Un tel moyen de représentation du champ des vitesses a été employé par Nikuradse, les valeurs des constantes ayant été prises conformément aux résultats des expériences effectuées par lui $\varkappa = 0{,}40$, $C = 5{,}5$.

La substitution de ces constantes dans l'équation (IX.32) montre que dans ce cas $\alpha_l \approx 12$.

Exprimons à l'aide de l'équation (X.35) la vitesse au centre de la conduite v_m, en y posant $y = r_0$,

$$\frac{\bar{v}_m}{v^*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{v^*r_0}{\nu}+C. \qquad (X.40)$$

En retranchant de (X.35) l'expression (X.40), nous obtenons

$$\bar{v}_x=\bar{v}_m+\frac{v^*}{\varkappa}\ln\frac{y}{r_0}. \qquad (X.41)$$

d'où l'on voit que le rapport $\bar{v}_x/\bar{v}_m$ dépend non seulement de la coordonnée sans dimensions y/r_0, mais également de v^*, c'est-à-dire pour différentes valeurs de Re et des contraintes tangentielles, les épures de la vitesse sans dimensions dans la conduite ne sont pas géométriquement semblables (fig. X.9). Avec l'accroissement du nombre Re, leur coefficient de remplissage varie de 0,85 à 0,92. La vitesse moyenne dans la section de la conduite peut être déterminée à l'aide de la

formule (X.28) en y remplaçant les variables $r = r_0 - y$ et en utilisant pour v_x l'expression (X.41)

$$v_{\text{moy}} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \left(\bar{v}_m + \frac{v^*}{\varkappa} \ln \frac{y}{r_0} \right) (r_0 - y)\, dy =$$

$$= \bar{v}_m + \frac{2}{\varkappa} \left| \frac{y}{r_0} \ln \frac{y}{r_0} - \frac{y}{r_0} - \frac{y^2}{2r_0^2} \ln \frac{y}{r_0} + \frac{y^2}{4r_0^2} \right|_0^{r_0},$$

c'est-à-dire

$$v_{\text{moy}} = \bar{v}_m - \frac{1}{\varkappa} \frac{3}{2} v^*. \tag{X.42}$$

En portant dans cette formule la valeur de la vitesse au centre de la conduite suivant (X.40), nous trouvons

$$v_{\text{moy}} = \frac{v^*}{\varkappa} \ln \frac{v^* r_0}{\nu} + Cv^* - \frac{1}{\varkappa} \frac{3}{2} v^*, \tag{X.43}$$

ce qui permet facilement d'obtenir la relation pour le calcul du coefficient de frottement λ. On doit cependant tenir compte de ce que dans le cas donné

$$\frac{v^*}{v_{\text{moy}}} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho v_{\text{moy}}^2}} = \sqrt{\frac{c_t}{2}} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}, \tag{X.44}$$

et

$$\text{Re} = \frac{v_{\text{moy}} 2r_0}{\nu}.$$

En introduisant ces paramètres dans la relation (X.43), nous pouvons l'écrire sous la forme

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{1}{\varkappa} \ln \left(\sqrt{\frac{\lambda}{8}} \frac{\text{Re}}{2} \right) + C - \frac{3}{4} \frac{1}{\varkappa},$$

c'est-à-dire nous obtenons une formule générale pour le calcul du coefficient de frottement λ pour l'écoulement turbulent du fluide dans une conduite cylindrique. La valeur de la constante C dans cette formule a été corrigée par Nikuradse d'après les données des expériences. En passant aux logarithmes décimaux, nous obtenons définitivement la formule

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0{,}8, \tag{X.45}$$

qui assure une bonne concordance avec les valeurs expérimentales des coefficients de frottement λ dans les conduites cylindriques de section circulaire lisses et peut être utilisée dans les calculs techniques pour toute une gamme de $\text{Re} > 2400$.

Les épures sans dimensions de la vitesse, montrées sur la fig. X.9, peuvent être approximativement remplacées par les dépendances

exponentielles de la forme

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_m}=\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/n}. \qquad \text{(X.46)}$$

Cependant, comme on le voit de la figure, l'exposant $1/n$ dans cette formule, caractérisant le remplissage de l'épure de la vitesse, ne peut être considéré comme constant. Sa valeur diminue avec l'augmentation de Re, et pour cette raison, la loi exponentielle de la distribution des vitesses ne peut être considérée comme universelle pour tout le domaine des écoulements turbulents dans les tubes. Dans la gamme de variation de $\mathrm{Re} = 4\cdot10^3 \div 3\cdot10^6$ l'exposant $1/n$ change de 1/6 à 1/10. En adoptant $n = 1/7$, on peut obtenir la formule du coefficient de frottement proposée par Blasius

$$\lambda=0{,}316\,\mathrm{Re}^{-1/4}, \qquad \text{(X.47)}$$

qui cependant n'assure la concordance avec les données des expériences que pour $10^5 > \mathrm{Re} > 2{,}4\cdot10^3$. La formule (X.46) permet de déterminer une relation simple entre la vitesse moyenne et la vitesse maximale au centre du tube

$$\frac{v_{\text{moy}}}{\bar{v}_m}=\frac{2n^2}{(1+n)(1+2n)},$$

d'où il résulte qu'avec $1/n = 1/7$ la valeur de $v_{\text{moy}} = 0{,}817\bar{v}_m$.

Une faible différence entre les valeurs des vitesses moyenne et maximale est déterminée en écoulement turbulent par une distribution relativement uniforme des vitesses dans la section du tube.

Les valeurs des coefficients qui tiennent compte de l'influence de la distribution non uniforme des vitesses dans la section du tube sur l'énergie cinétique du fluide, calculées d'après la loi exponentielle de la distribution des vitesses, sont $\alpha_c = 1 \div 1{,}1$. Pour cette raison lors des calculs des écoulements, dans l'équation de Bernoulli (X.12) on peut prendre $\alpha_{c_t} = 1$ au lieu de $\alpha_{c_l} = 2$ pour l'écoulement laminaire.

Les formules obtenues permettent d'effectuer les calculs de l'écoulement turbulent seulement derrière le tronçon où il se forme après l'entrée dans le tube. Suivant les données des expériences, la longueur du tronçon de formation de l'écoulement turbulent est de $25 \div 40$ diamètres du tube, c'est-à-dire sensiblement plus court qu'en écoulement laminaire.

Comme le montrent les expériences, dans le cas des tubes dont la section transversale se distingue d'un rectangle, le calcul des pertes de charge en écoulement turbulent peut s'effectuer suivant la formule (X.22). Dans ce cas le coefficient de frottement c_{fr} dans cette formule doit être déterminé à l'aide des expressions utilisées pour le calcul de λ pour les tubes cylindriques en y remplaçant seulement le

nombre Re par une grandeur $4\mathrm{Re}_H$; $\mathrm{Re}_H = v_{\mathrm{moy}} r_H/\nu$, où r_H est le rayon hydraulique. Par exemple, en employant la formule de Blasius, nous obtenons la relation

$$c_{\mathrm{fr}} = 0{,}316\,(4\,\mathrm{Re}_H)^{-1/4},$$

qui concorde bien avec les données des expériences pour les tubes de section rectangulaire, trapézoïdale et triangulaire.

§ 56. INFLUENCE DE LA RUGOSITÉ DES TUBES SUR LES PERTES DE CHARGE

La surface intérieure des tubes réels est toujours plus ou moins rugueuse, c'est-à-dire présente des rugosités sous la forme de petites aspérités. Ces aspérités peuvent être réparties sur la surface du tube d'une manière homogène ou hétérogène et avoir différente forme et hauteurs k_a suivant l'origine de leur formation (technologie d'usinage, corrosion, érosion, etc.). On distingue une rugosité homogène et celle hétérogène ou technique. La rugosité homogène est généralement créée artificiellement pour l'étude systématique de son influence sur la structure de l'écoulement dans le tube. A cette catégorie de rugosité se rapporte par exemple la rugosité granuleuse créée au moyen des grains de sable de grandeur constante collés sur la surface intérieure du tube. La rugosité hétérogène représente un ensemble des aspérités de forme irrégulière et de différentes dimensions par rapport auxquelles on peut appliquer la notion de hauteur moyenne. En plus de la notion de la rugosité absolue, hauteur identique des aspérités k_a, on utilise la notion de rugosité relative k_a/r_0. Les expériences montrent que la rugosité peut influer sensiblement sur la loi de la distribution des vitesses et la résistance.

Examinons l'influence de la rugosité dans le cas de l'écoulement turbulent du fluide dans un tube. En tenant compte de la particularité de la structure de l'écoulement turbulent, on peut représenter différents régimes d'écoulement autour des aspérités, si l'on prend des aspérités isolées pour des corps miniatures non profilés.

Le premier régime est observé quand la hauteur des aspérités est inférieure à l'épaisseur conventionnelle du film visqueux δ_l dans l'écoulement turbulent. Dans ce cas, même pour de grands nombres Re du courant, l'écoulement autour des aspérités dans le film visqueux s'effectue à petite vitesse, graduellement et sans décollement, le film visqueux assumant le rôle d'un lubrifiant. Avec ceci, on peut s'attendre à ce que les aspérités n'influent point sur la structure de la couche logarithmique turbulente, c'est-à-dire que le tube rugueux peut être considéré comme hydrodynamiquement lisse. Les résultats des expériences montrent que la rugosité granuleuse n'influe pas sur la résistance du tube si $v^* k_a/\nu \leqslant 5$. Cette condition se trouve en bonne concordance avec la relation $\delta_l v^*/\nu = 5$, détermi-

nant l'épaisseur δ_1 du film visqueux, c'est-à-dire pour le premier régime $k_a < \delta_1$.

Le second régime, transitoire, correspond avec une rugosité granuleuse à des valeurs

$$5 \leqslant \frac{v^* k_a}{\nu} \leqslant 70.$$

Dans ce régime, les aspérités, en commençant par les sommets, au fur et à mesure de l'augmentation de Re, s'enfoncent de plus en plus dans la zone transitoire de la couche voisine de la paroi du fluide. Dans ce cas la structure du film visqueux change et il se fait sentir l'influence de la rugosité sur le champ des vitesses de la zone turbulente de l'écoulement. Dans ce régime, sur les aspérités se produit le décollement des tourbillons. Il est évident que la structure de l'écoulement dans ce régime dépend non seulement du paramètre $v^* y/\nu$, caractérisant l'écoulement turbulent dans un tube lisse, mais aussi de la relation sans dimensions supplémentaire $v^* k_a/\nu$ liée à la rugosité du tube.

Le troisième régime apparaissant avec $v^* k_a/\nu > 70$ est caractérisé par un décollement développé de l'écoulement autour des aspérités, une destruction de la structure du champ des vitesses du film visqueux et de la zone de transition, une influence prononcée de la rugosité sur la zone turbulente de l'écoulement.

Dans ce régime, la résistance du tube représente en fait la somme des résistances des aspérités séparées lors de l'écoulement autour d'elles avec décollement. Comme le coefficient de résistance d'un corps non profilé dans l'écoulement avec décollement ne dépend pratiquement pas de Re, on peut s'attendre à ce que le coefficient de résistance du tube dépendra non de la vitesse, mais seulement des paramètres géométriques de la rugosité. Ces considérations sont bien corroborées par les données des expériences.

Examinons la loi de la distribution des vitesses dans une couche limite turbulente d'un tube rugueux. Notons avant tout que pour une description du processus de mélange turbulent et du champ des vitesses dans la région voisine de la paroi de l'écoulement turbulent dans un tube, on peut, en posant $\tau = \tau_0 =$ const, faire appel aux raisonnements énoncés au chapitre IX lors de la déduction de la formule de la loi logarithmique de la distribution des vitesses (X.35). La valeur de la constante universelle $\varkappa$ caractérisant le processus du mélange turbulent et ne dépendant pas des conditions aux limites doit cependant rester la même que dans les tubes lisses. En ce qui concerne la constante C, déterminée par les conditions aux limites, et par conséquent, par les paramètres de la rugosité, sa valeur doit changer. Etant donné que les paramètres de la rugosité doivent exercer une influence manifeste sur le champ de la vitesse, introduisons-les dans la formule de la loi logarithmique en ajoutant et en

retranchant du deuxième membre de (X.35) une grandeur constante

$$\frac{\bar{v}_x}{v^*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{v^*y}{\nu}+C+\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{1}{k_a}-\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{1}{\varkappa_a}.$$

En groupant les termes, nous obtenons

$$\frac{\bar{v}_x}{v^*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{y}{k_a}+B_1, \tag{X.48}$$

où $B_1 = C + \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{v^*k_a}{\nu}$ doit être, de même que C, considéré comme une fonction du paramètre de la rugosité v^*k_a/ν. Ce n'est que dans les tubes lisses ou rugueux, mais en premier régime la valeur de C est constante. La formule (X.48) représente une loi logarithmique de la distribution des vitesses dans la zone voisine de la paroi de l'écoulement turbulent dans un tube rugueux.

Dans la zone intérieure du noyau turbulent, la loi logarithmique, comme au cas d'un tube lisse, n'est pas exacte. Pour représenter sous la forme sans dimensions les épures des vitesses dans un noyau turbulent, on peut se servir de la formule (X.36), laquelle est applicable également à une région turbulente de la couche voisine de la paroi.

D'une façon approximative, comme dans le cas des tubes lisses, on peut admettre que la loi logarithmique (X.48) est valable pour toute la section du tube et alors il sera facile d'obtenir la valeur de la vitesse maximale avec $y = r_0$

$$\frac{\bar{v}_m}{v^*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{r_0}{k_a}+B_1; \tag{X.49}$$

en la retranchant de (X.48), nous trouvons

$$\bar{v}_x=\bar{v}_m+\frac{v^*}{\varkappa}\ln\frac{y}{r_0},$$

ce qui coïncide avec la relation (X.41) pour un tube lisse. On en déduit que la vitesse moyenne est liée à la vitesse maximale par la relation (X.42). En y portant la valeur de la vitesse maximale suivant (X.49), nous trouvons

$$\frac{v_{\text{moy}}}{v^*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{r_0}{k_a}+B_1-\frac{1}{\varkappa}\frac{3}{2}. \tag{X.50}$$

Cette relation diffère de la formule (X.43) pour les tubes lisses par la présence de la fonction $B_1\left(\frac{v^*k_a}{\nu}\right)$; elle est valable pour tout régime d'écoulement autour des aspérités, c'est-à-dire c'est une expression générale de la vitesse moyenne dans les tubes rugueux.

Les épures de la vitesse dans un tube rugueux pour une valeur constante de Re dépendent de la rugosité relative du tube. Comme on

le voit de la fig. X.10, qui montre la variation de la vitesse relative $\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_m} = f\left(\frac{y}{r_0}, \frac{k_a}{r_0}\right)$ pour Re $= 1 \cdot 10^6$, le coefficient de remplissage des épures de la vitesse diminue avec l'augmentation de la rugosité du tube. Il en résulte que pour un débit constant, c'est-à-dire pour une vitesse moyenne constante v_{moy}, la vitesse maximale $\bar{v}_m$ au

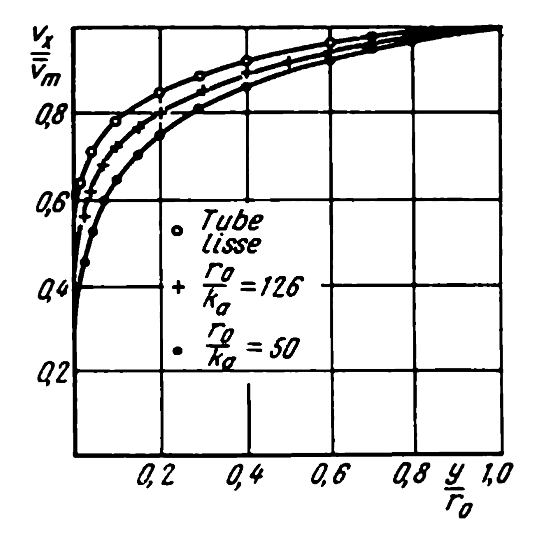


Fig. X.10

Fig. X.11

centre du tube augmente au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative. Ceci se confirme par la comparaison des épures de la vitesse dans les tubes lisse *1* et rugueux *2* (fig. X.11).

Pour analyser les régimes d'écoulement autour d'une rugosité dans les tubes, il est commode de représenter la loi sans dimensions de la distribution de la vitesse sous la forme

$$\left(\frac{\bar{v}_x}{v^*}\right)_{\text{rug}} = \left(\frac{\bar{v}_x}{v^*}\right)_{\text{lisse}} - \frac{\Delta\bar{v}_x}{v^*}. \qquad \text{(X.51)}$$

La comparaison de (X.51) avec (X.48) donne

$$\frac{\Delta\bar{v}_x}{v^*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{v^* k_a}{\nu} + C - B_1, \qquad \text{(X.52)}$$

où $\Delta\bar{v}_x/v^*$ est une correction à la vitesse sans dimensions dans un tube lisse, qui tient compte de l'influence de la rugosité sur la loi de la distribution de la vitesse. Cette correction est une fonction du paramètre de la rugosité $v^* k_a/\nu$.

Les valeurs de $\frac{\Delta\bar{v}_x}{v^*} = f_2\left(\frac{v^* k_a}{\nu}\right)$, obtenues d'après les données des expériences dans les tubes de différente rugosité, sont montrées sur la fig. X. 12.

Les abscisses, c'est-à-dire les valeurs de v^*k_a/ν pour lesquelles $\Delta\overline{v}_x/v^* = 0$, correspondent à la limite du premier régime quand le tube fonctionne comme hydromécaniquement lisse; elles dépendent de la structure géométrique de la rugosité. Sur cette figure, au troisième régime d'écoulement autour de la rugosité correspondent des tronçons sous la forme de droites inclinées. L'échelle de l'axe des abscisses étant logarithmique, cela veut dire que sur ces tronçons C et B_1 sont des grandeurs constantes. Leurs valeurs dépendent

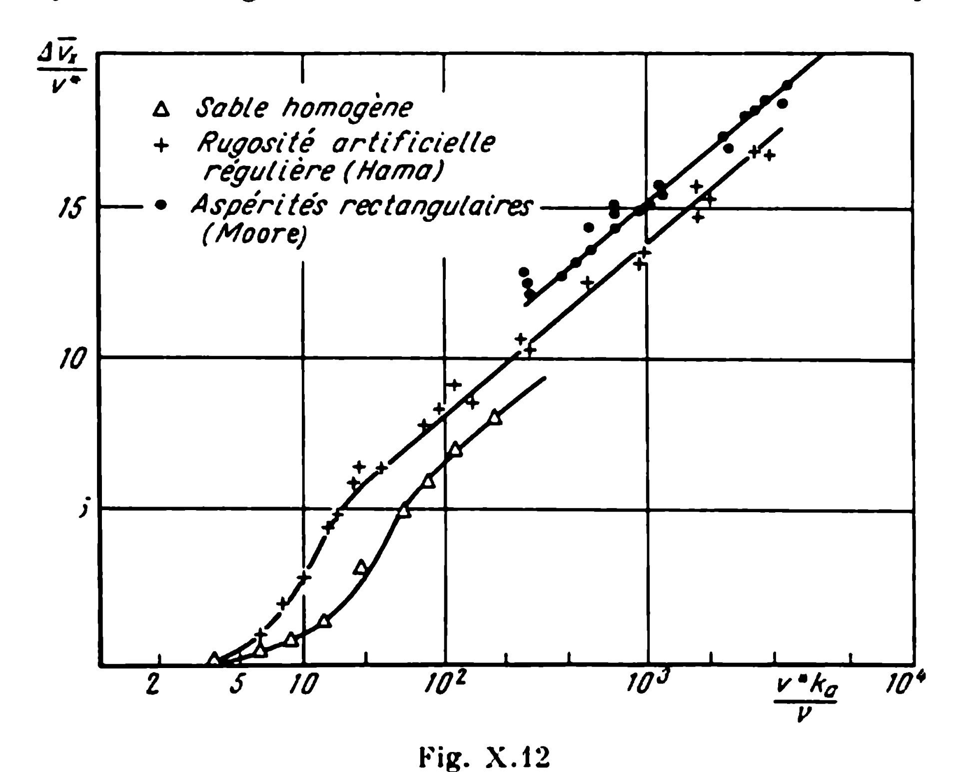


Fig. X.12

également des particularités géométriques de la rugosité. Dans le cas d'une rugosité granuleuse $B_1 = 8{,}48$. Au second régime, transitoire, correspond une dépendance de nature compliquée $B_1\ (v^*k_a/\nu)$.

Déterminons maintenant la loi du coefficient de résistance λ pour le mouvement dans un tube rugueux. A cet effet, servons-nous de la relation (X.50) et remplaçons dans celle-ci $\frac{v_{\text{moy}}}{v^*}$ en vertu de la relation (X.44)

$$\frac{8}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{r_0}{k_a} + B_1 - \frac{3}{2}\frac{1}{\varkappa}. \qquad (X.53)$$

Cette expression représente la loi générale de la résistance dans les tubes rugueux pour tout régime d'écoulement autour des rugosités.

En utilisant la valeur de la constante universelle $\varkappa = 0{,}40$ et en admettant pour le troisième régime d'écoulement dans le cas

d'une rugosité granuleuse $B_1 = 8{,}48$, nous obtenons

$$\frac{8}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}5 \ln \frac{r_0}{k_a} + 4{,}73.$$

Les coefficients de cette formule ont été ensuite corrigés par Nikuradse conformément aux résultats des expériences. Finalement, après passage aux logarithmes décimaux, la formule est devenue

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{r_0}{k_a} + 1{,}74\right)^2}. \qquad \text{(X.54)}$$

La relation (X.54) peut être utilisée dans les calculs pratiques des valeurs de λ pour les tubes à rugosité granuleuse, si $v^* k_a / \nu > 70$, c'est-à-dire pour les nombres de Reynolds

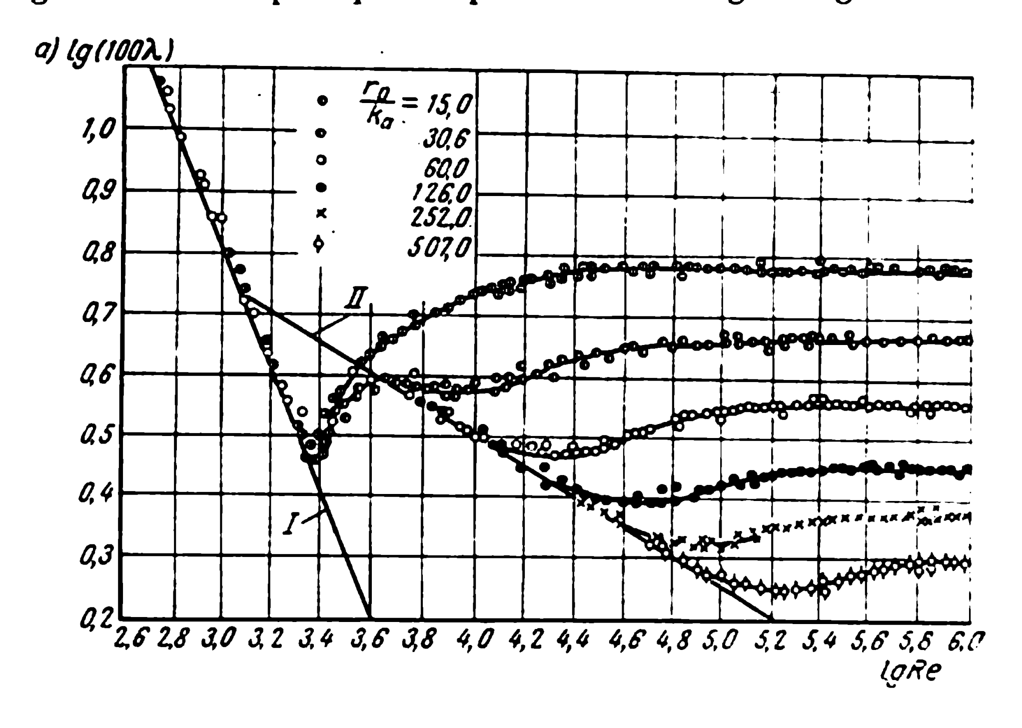
$$\mathrm{Re} > \frac{218 - 382 \lg \frac{k_a}{2r_0}}{\frac{k_a}{2r_0}}.$$

Pour les tubes à rugosité granuleuse, d'après les expériences de Nikuradse, on peut construire un diagramme général (fig. X.13,*a*) de la relation entre le coefficient de frottement λ et le nombre Re et la rugosité relative.

Sur cette figure la droite *I* correspond à la formule (X.30) pour l'écoulement laminaire dans un tube cylindrique. Les points expérimentaux se rapportant aux tubes rugueux pour les nombres de Reynolds subcritiques correspondent bien à cette dépendance. Ceci montre que dans le régime laminaire de l'écoulement, la rugosité n'influe pratiquement pas sur la résistance du tube. La ligne *II* correspond à la formule (X.45) pour l'écoulement turbulent dans les tubes lisses. Les points, où les courbes $r_0/k_a = \text{const}$ commencent à s'écarter de la ligne *II*, correspondent aux nombres de Reynolds pour lesquels commence le second régime d'écoulement autour des rugosités. Les segments horizontaux de ces courbes correspondent à la formule (X.54), c'est-à-dire au troisième régime d'écoulement autour des rugosités dans lequel le coefficient de résistance est constant et ne dépend pas de Re.

En cas d'une rugosité technique toutes les particularités de la variation des coefficients de résistance en fonction de Re sont conservées. Ceci est illustré par la fig. X.13,*b* où l'on voit une dépendance expérimentale $\lambda = f(\mathrm{Re})$ pour un tube avec rugosité technique pour une valeur de k_a/r_0. Par rapport à la relation montrée sur la fig. X.13,*a* ici la courbe ne comporte pas de creux caractéristiques pour le régime de transition dans le cas d'une rugosité granuleuse. D'autre part, cette courbe commence à s'écarter de la dépendance $\lambda = f(\mathrm{Re})$

pour les tubes lisses un peu plus tôt, c'est-à-dire que le tube à rugosité technique se comporte comme hydrodynamiquement lisse dans une gamme de Re plus petite que le tube à rugosité granuleuse.



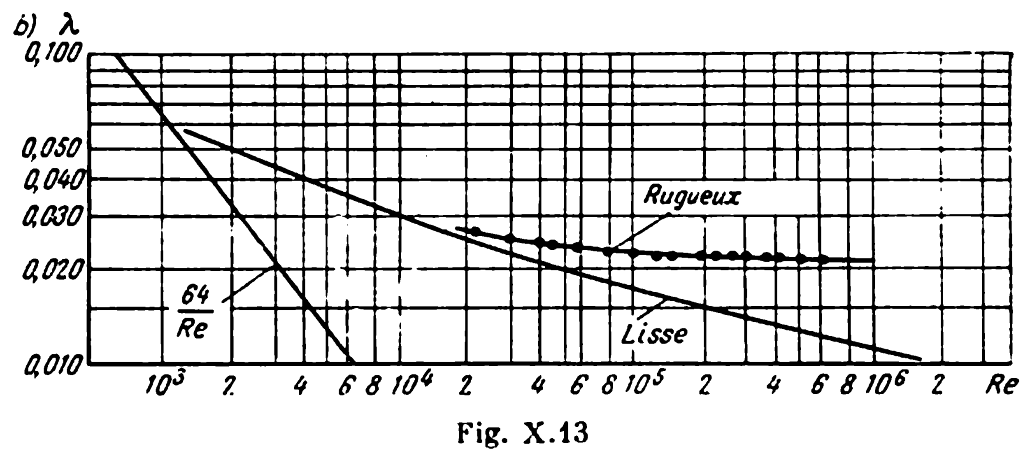


Fig. X.13

La détermination des coefficients λ des tubes à rugosité technique, pour tous les régimes d'écoulement autour des rugosités, peut se faire à l'aide de la formule de A. Altschul

$$\lambda = 0{,}1\left(1{,}46\frac{\bar{k}_a}{2r_0} + \frac{100}{\mathrm{Re}}\right)^{1/4},$$

où $\bar{k}_a$ est la hauteur moyenne réduite des aspérités de la rugosité; sa grandeur dépend de la nature et du type des tubes.

Avec $\bar{k}_a \to 0$ cette formule se transforme en une relation (X.47) pour les tubes lisses.

§ 57. PERTES DE CHARGE SINGULIÈRES

Les pertes d'énergie locales sont dues au fait que le fluide doit surmonter des résistances provoquées surtout par les décollements locaux des tourbillons, ainsi que par des transformations notables de la forme de l'écoulement et du champ des vitesses dans celui-ci. Tous ces processus dépendent en grande partie de la nature des obstacles locaux. La grande diversité des formes des obstacles engendrant

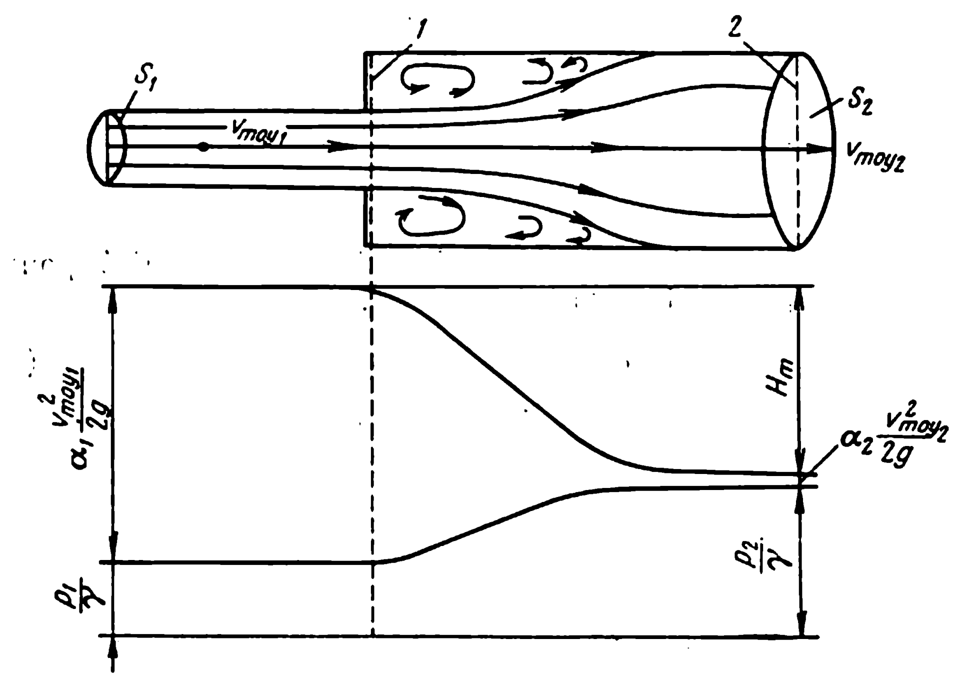


Fig. X.14

les résistances locales et la complexité des processus hydrodynamiques ayant lieu lors de l'écoulement d'un fluide à travers ceux-ci n'ont pas permis jusqu'à présent d'élaborer une théorie générale du calcul des résistances locales. Pour cette raison dans les calculs pratiques on utilise généralement les données sur les coefficients de résistance locale ζ obtenues au cours des études expérimentales, effectuées sur des stands spéciaux hydrauliques ou aérodynamiques. Dans certains cas, on peut cependant déduire les formules théoriques pour le calcul de ces coefficients.

Examinons le calcul des pertes locales dans un élargissement brusque.

La fig. X.14 montre le schéma des lignes de courant d'un écoulement de fluide visqueux dans un élargissement brusque. Immédiatement après l'élargissement brusque, on observe la formation de tourbillons annulaires intenses qui, en divergeant, occupent progressivement la section entière du tube. Le processus de divergence de ces

filets s'effectue sur un tronçon de section large correspondant au moins à dix diamètres. Les expériences prouvent que la pression qui s'exerce dans la section *1*, située immédiatement après l'élargissement brusque, ne diffère pratiquement pas de la pression dans la section étroite juste avant l'élargissement.

Les données indiquées permettent de déterminer la différence de pression sur le tronçon commençant à partir de l'élargissement brusque jusqu'à la fin de la formation de l'écoulement dans la section *1*. A cet effet utilisons la formule (X.19) obtenue d'après la loi de la quantité de mouvement. En négligeant dans celle-ci l'influence des contraintes tangentielles et en tenant compte que sur le tronçon horizontal entre les sections *1* et *2* le long des parois du tube cos (n, x) est égal à zéro, nous obtenons

$$(p_1-p_2)\,S_2=\rho\,(\alpha_2^* v_{\text{moy}_2}^2 S_2-\alpha_1^* v_{\text{moy}_1}^2 S_1).$$

En utilisant maintenant l'équation de la continuité pour les sections *1* et *2*, nous trouvons une relation

$$v_{\text{moy}_1} S_1 = v_{\text{moy}_2} S_2, \tag{X.55}$$

suivant laquelle la différence de pression peut s'exprimer sous la forme

$$p_1-p_2=\rho\left(\alpha_2^* v_{\text{moy}_2}^2-\alpha_1^* v_{\text{moy}_1}^2\frac{S_1}{S_2}\right)=$$
$$=\rho\,(\alpha_2^* v_{\text{moy}_2}^2-\alpha_1^* v_{\text{moy}_1} v_{\text{moy}_2}). \tag{X.56}$$

Pour définir les pertes de charge, utilisons l'équation de Bernoulli (X.11) en y posant $H = H_{\text{m}}$, $z_1 = z_2$ et en remplaçant la différence de pression suivant (X.56)

$$\gamma H_{\text{m}}=\rho v_{\text{moy}_2}(\alpha_2^* v_{\text{moy}_2}-\alpha_1^* v_{\text{moy}_1})+\frac{\rho}{2}(\alpha_{c_1} v_{\text{moy}_1}^2-\alpha_{c_2} v_{\text{moy}_2}^2). \tag{X.57}$$

Généralement l'écoulement considéré est turbulent et dans ce cas, comme cela a été indiqué au § 56, les coefficients, tenant compte de la distribution non uniforme de la vitesse dans la section, sont proches de l'unité. De cette façon en admettant $\alpha_{c_1} = \alpha_{c_2} = \alpha_2^* = \alpha_1^* = 1$ et en groupant les termes, nous obtenons

$$\gamma H_{\text{m}}=\rho\,\frac{(v_{\text{moy}_1}-v_{\text{moy}_2})^2}{2}, \tag{X.58}$$

Rapportons la perte d'énergie à la vitesse v_{moy_2} après l'élargissement de l'écoulement. Dans ce cas la formule générale peut être écrite sous la forme

$$\gamma H_{\text{m}}=\zeta_{\text{él}}\frac{\rho v_{\text{moy}_2}^2}{2}, \tag{X.59}$$

où $\zeta_{él}$ est le coefficient de perte de charge dans un élargissement brusque. En égalisant les expressions (X.58) et (X.59) et en tenant compte que $v_{moy_1}/v_{moy_2} = S_2/S_1$, nous trouvons

$$\zeta_{él} = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2. \qquad (X.60)$$

La comparaison montre que les résultats des calculs effectués d'après cette formule concordent avec les données des expériences. Il est à noter que la valeur du coefficient de perte de charge $\zeta_{él}$

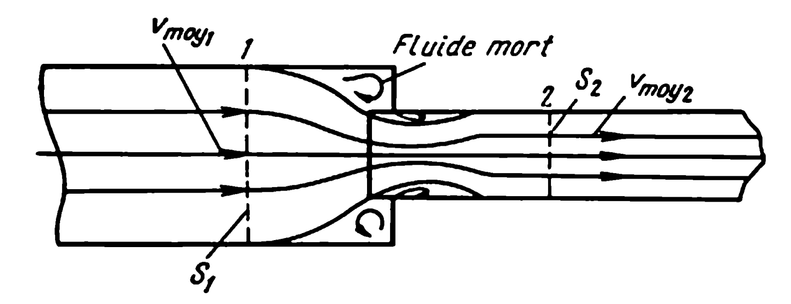


Fig. X. 15

variera si dans la formule (X.59) on prend v_{moy_1} pour la vitesse caractéristique. Il est facile de s'assurer que dans ce cas

$$\zeta_{él} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2, \qquad (X.61)$$

mais la valeur totale de la perte γH_m ne changera pas. Sur la fig. X.14 est montré schématiquement le diagramme de Bernoulli pour le tronçon de l'écoulement à élargissement brusque entre les sections *1* et *2*, illustrant la variation de certaines formes d'énergie spécifique dans cet écoulement.

Examinons le schéma permettant de calculer le coefficient de contraction dans un rétrécissement brusque.

Les observations montrent (fig. X.15) que dans ce cas la contraction de l'écoulement qui commence dans la section *1* du tube large avant son entrée dans le tube étroit se prolonge également sur un certain tronçon dans le tube étroit. Progressivement dans le tube étroit la veine de fluide s'élargit, cet élargissement se terminant dans une certaine section *2*. Immédiatement avant la section contractée, entre la veine et les parois du tube large, il se forme une zone de « fluide mort ».

En négligeant les contraintes tangentielles et l'influence de la non-uniformité de l'écoulement dans la section, utilisons la formule (X.19) de la loi de la quantité de mouvement. Tenons compte de la dernière intégrale de cette formule en y posant $\cos(n, x) = 1$ et le domaine d'intégration $S_1 - S_2$. Finalement, on peut écrire

$$p_1S_1 - p_2S_2 - p(S_1 - S_2) = \rho(v^2_{moy_2}S_2 - v^2_{moy_1}S)_1, \qquad (X.62)$$

où p est la pression dans la zone de « fluide mort » devant l'entrée dans le tube étroit. Pour éliminer cette pression, utilisons, en négligeant les pertes de frottement, l'équation de Bernoulli sur le tronçon du tube large à partir de la section *1* jusqu'à la zone morte, où $v = 0$,

$$p = p_1 + \frac{\rho v_{\text{moy}_1}^2}{2}.$$

En introduisant cette valeur de p dans (X.62) après regroupement des termes, nous obtenons

$$p_1 - p_2 = \rho \left(v_{\text{moy}_2}^2 - \frac{v_{\text{moy}_1}^2}{2} - \frac{v_{\text{moy}_1}^2}{2} \frac{S_1}{S_2} \right).$$

En utilisant l'équation de Bernoulli (X.11) et en y posant $H = H_{\text{m}}$ et ensuite en portant la différence de pression trouvée, nous avons

$$\gamma H_{\text{m}} = \rho \left(v_{\text{moy}_2}^2 - \frac{v_{\text{moy}_1}^2}{2} - \frac{v_{\text{moy}_1}^2}{2} \frac{S_1}{S_2} \right) + \frac{\rho v_{\text{moy}_1}^2}{2} - \frac{\rho v_{\text{moy}_2}^2}{2} =$$
$$= \frac{\rho}{2} \left(v_{\text{moy}_2}^2 - v_{\text{moy}_1}^2 \frac{S_1}{S_2} \right).$$

En tenant compte de l'équation de continuité, suivant laquelle

$$v_{\text{moy}_1} = v_{\text{moy}_2} \frac{S_2}{S_1},$$

nous trouvons

$$\gamma H_{\text{m}} = \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right) \frac{\rho v_{\text{moy}_2}^2}{2}. \qquad \text{(X.63)}$$

En comparant cette expression avec la formule générale (X.24), nous obtenons le coefficient de perte de charge ζ_{c} dans un rétrécissement brusque du tube sous la forme

$$\zeta_{\text{c}} = 1 - \frac{S_2}{S_1}.$$

Cette formule correspond aux résultats des expériences si l'orifice est à bords vifs. Dans le cas de l'orifice à bords arrondis il faut introduire dans la formule un coefficient de correction empirique inférieur à l'unité.

Un élargissement progressif du tube a lieu, par exemple, dans les diffuseurs. Dans ce cas, les pertes d'énergie dépendent notablement de la structure de l'écoulement à l'entrée du diffuseur, ainsi que de l'angle de son ouverture et de la variation de pression sur la longueur du diffuseur. Suivant la combinaison de ces facteurs, deux formes d'écoulements dans les diffuseurs sont possibles : écoulement harmonieux sans décollement ou écoulement avec décollement et

formation de tourbillons discrets. En utilisant l'équation de Bernoulli (X.11) et l'équation de continuité (X.7) dans la section *1* avant l'entrée dans le diffuseur et dans la section *2* dans la partie large à la sortie de celui-ci et en tenant compte de ce que

$$H=\zeta_{\text{d}}\frac{v^2_{\text{moy}_1}}{2g},$$

nous obtenons l'expression générale pour le coefficient ζ_{d} de la résistance du diffuseur sous la forme

$$\zeta_{\text{d}}=\frac{2(p_1-p_2)}{\rho v^2_{\text{moy}_1}}+\alpha_{\text{c}_1}-\frac{\alpha_{\text{c}_2}S_1^2}{S_2^2}. \qquad \text{(X.64)}$$

Ce coefficient tient compte des pertes dues au frottement de la veine contre la paroi, ainsi qu'à son élargissement dans le diffuseur.

Pour pouvoir calculer ζ_{d} d'après cette formule en écoulement sans décollement, les diffuseurs sont munis de schémas théoriques et expérimentaux; quant aux écoulements avec décollement, ils sont calculés suivant des données empiriques.

Ainsi, de ce qui a été énoncé il suit que même dans les cas rares où les formules des coefficients des pertes de charges peuvent être déduites en partant des considérations théoriques on doit souvent y introduire des coefficients expérimentaux pour préciser les valeurs de ζ obtenues. Ceci s'explique par la nécessité de se servir dans les calculs pratiques des données expérimentales sur les valeurs de ζ. Les valeurs des coefficients ζ pour différentes pertes de charge sont données dans [1], [10].

§ 58. ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE PAR LES ORIFICES ET LES AJUTAGES

Le calcul des écoulements d'un fluide visqueux par les méthodes du problème à une dimension de la mécanique des fluides est basé sur l'emploi conjoint de l'équation de Bernoulli tenant compte des pertes

$$p_1+\gamma z_1+\alpha_{\text{c}_1}\frac{\rho v^2_{\text{moy}_1}}{2}=p_2+\gamma z_2+$$
$$+\alpha_{\text{c}_2}\frac{\rho v^2_{\text{moy}_2}}{2}+\gamma\sum_{k=1}^{n}H_{\text{m}_k}+\gamma\sum_{i=1}^{m}H_{L_i} \qquad \text{(X.65)}$$

et de l'équation de continuité (X.7).

Suivant le problème posé, les grandeurs cherchées sont les vitesses et les débits en différents points le long de l'écoulement ou les

pertes de charges ou les chutes de pression nécessaires pour assurer les débits donnés.

Suivant les particularités de l'écoulement examiné, lors de la détermination des pertes, dans le deuxième membre de l'équation de Bernoulli (X.65) le rôle principal revient soit à la somme des pertes locales, soit à la somme des pertes réparties. Dans les écoulements très courts, on peut négliger les pertes réparties et se limiter seulement à la prise en compte des pertes locales. Dans les écoulements de grande longueur, les pertes locales se révèlent souvent relativement faibles, et on les néglige dans ce cas. Evidemment des cas intermédiaires sont possibles, quand il est indispensable de tenir compte de toutes les pertes.

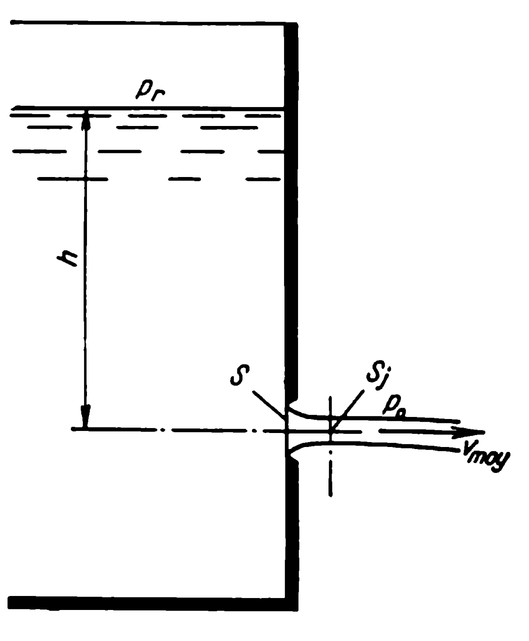


Fig. X.16

Commençons à examiner les problèmes relatifs aux écoulements des fluides visqueux par l'étude des écoulements de fluide à travers des orifices, c'est-à-dire par le problème des écoulements courts, où l'on peut négliger l'influence des pertes réparties.

Examinons l'écoulement d'un fluide par un orifice en mince paroi d'un réservoir débouchant à l'air libre (fig. X.16).

Les observations montrent que le jet sortant d'un tel orifice se contracte et la surface S_j de sa section mouillée située à une petite distance du plan de l'orifice devient inférieure à la surface S. La contraction est due à l'action des forces d'inertie qui naissent dans le jet lors de sa sortie, quand les lignes de courant contournent les bords de l'orifice. L'influence du contournement des bords est surtout importante pour les particules dont les trajectoires font 90° avec l'axe de l'orifice, c'est-à-dire celles qui se déplacent le long des parois. L'effet de contraction se détermine par le coefficient de contraction du filet $\varepsilon = S_j/S$ dont la valeur dépend de la forme et des dimensions absolues de l'orifice, ainsi que de la vitesse d'écoulement. Dans le cas de l'orifice dans une paroi verticale, sa valeur dépend notablement, les autres conditions étant égales, de la disposition de l'orifice par rapport au fond du réservoir. Grâce à la présence d'une surface directrice, parallèle à l'axe de l'orifice, le filet n'est pas contracté du côté de cette surface ou l'est partiellement. Les parois transversales n'influent pas sur le processus de contraction du filet, si la distance entre le bord le plus proche de l'orifice et la paroi de

guidage constitue plus de trois diamètres de l'orifice. Dans ce cas les valeurs du coefficient de contraction pour les orifices ronds et carrés sont $\varepsilon = 0{,}60 \div 0{,}64$.

En plus de la contraction du jet, il se produit également l'inversion de la forme de sa section transversale. Ainsi, par exemple, le filet sortant d'un orifice carré a une section transversale en forme d'étoile. Ce processus est la conséquence de l'influence des forces de la tension superficielle. Cependant l'inversion de la section du jet n'influe aucunement sur la surface de sa section ni sur le coefficient ε.

Pour le calcul de la vitesse du liquide dans un jet sortant d'un orifice, admettons que ce dernier est disposé dans la paroi d'un réservoir, où la pression à la surface du liquide p_r n'est pas égale à la pression atmosphérique p_0. Soit la profondeur d'immersion de l'axe de l'orifice du liquide égale à h. L'écoulement dans le jet après sa sortie de l'orifice peut être considéré comme graduellement varié. Appliquons l'équation de Bernoulli (X.65) aux sections de l'écoulement dont la première coïncide avec la surface libre du liquide dans le réservoir et la seconde avec la section du jet située immédiatement après sa sortie de l'orifice. En négligeant les pertes de frottement du fluide sur les parois du réservoir, nous obtenons

$$\gamma h + p_r + \alpha_{c_r} \frac{\rho v_{\text{moy}_r}^2}{2} = p_0 + \alpha_c \frac{\rho v_{\text{moy}}^2}{2} + \zeta_0 \frac{\rho v_{\text{moy}}^2}{2}.$$

Le dernier terme de cette expression tient compte de la perte d'énergie locale liée à l'écoulement du fluide par l'orifice en mince paroi.

Admettons que la vitesse d'abaissement du niveau dans le réservoir v_{moy_r} est faible. Ceci n'est possible que si la surface de l'orifice S est considérablement inférieure à la surface libre du liquide dans le réservoir S_r. En vertu de l'équation de continuité, la vitesse d'écoulement du liquide par l'orifice v_{moy} et la vitesse v_{moy_r} sont liées par relation

$$v_{\text{moy}_r} = v_{\text{moy}} \frac{S_J}{S_r}.$$

En tenant compte que $\frac{S_c}{S_r} \ll 1$, on peut négliger le carré de ce rapport qui fait partie du troisième terme du premier membre de l'équation de Bernoulli. Alors pour la vitesse moyenne d'écoulement du fluide par l'orifice, nous trouvons l'expression suivante

$$v_{\text{moy}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_0}} \sqrt{2g\left(h + \frac{p_r - p_0}{\gamma}\right)}. \qquad \text{(X.66)}$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_0}}$ est dit coefficient de la vitesse. Il tient compte de l'influence de la résistance locale et de la distribution non

uniforme de la vitesse dans la section du jet sur la valeur des vitesses. Comme $\alpha_c \geqslant 1$ et $\zeta_0 > 0$, le coefficient de la vitesse est inférieur à l'unité.

Maintenant déterminons le débit Q du liquide lors de l'écoulement par l'orifice

$$Q = v_{moy} S_j.$$

En portant dans cette formule la valeur de la vitesse moyenne tirée de (X.66) et en exprimant la surface de la section du jet S_j par la surface de l'orifice, nous trouvons

$$Q = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_0}} S \sqrt{2g\left(h + \frac{p_r - p_0}{\gamma}\right)}. \qquad \text{(X.67)}$$

La grandeur

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_0}} \qquad \text{(X.68)}$$

est appelée coefficient de débit de l'orifice donné. De cette façon, la relation pour la détermination du débit de fluide par l'orifice dans une paroi peut s'écrire définitivement sous la forme suivante

$$Q = \mu S \sqrt{2g\left(h + \frac{p_r - p_0}{\gamma}\right)}. \qquad \text{(X.69)}$$

Dans le cas particulier, quand la pression sur la surface de l'eau dans le réservoir est égale à celle atmosphérique

$$Q = \mu S \sqrt{2gh}. \qquad \text{(X.70)}$$

Les valeurs des coefficients de débit μ se déterminent expérimentalement. Pour des petits orifices circulaires et carrés $\mu \approx 0{,}62$ et le coefficient de la résistance locale $\zeta_0 \approx 0{,}06$. Si les parois exercent une influence directrice, le coefficient de débit augmente par rapport à sa valeur donnée ci-dessus et avec l'augmentation de la charge h, il diminue.

En cas d'une immersion peu profonde du centre de l'orifice, il se forme un mouvement hélicoïdal du fluide approchant l'orifice. Il est possible également qu'il se forme un entonnoir aérien prenant son origine sur la surface libre. Un tel entonnoir se forme quand la profondeur d'immersion de l'orifice est égale environ à trois fois le diamètre de l'orifice.

La formule (X.69) permet d'effectuer le calcul du débit lors de l'écoulement par des orifices de grande surface dans la paroi, si l'on peut négliger la vitesse d'abaissement de la surface libre dans le réservoir. Dans la formule donnée, on entend par h la profondeur d'immersion du centre de gravité de la surface de l'orifice au-dessous

de la surface libre. Les valeurs des coefficients de débit pour de tels orifices se révèlent quelque peu supérieures à celles pour les petits orifices, $\mu = 0{,}65 \div 0{,}70$.

En construction navale, un intérêt particulier revient au cas de l'écoulement du fluide par un orifice noyé, c'est-à-dire de l'écoulement d'un réservoir dans l'autre qui est partiellement rempli (fig. X.17).

Analogiquement au cas précédent, l'écoulement par un orifice s'accompagne de la contraction du jet avec son élargissement ultérieur. Par conséquent, outre la perte d'énergie due à la résistance locale lors du passage du fluide à travers l'orifice, il faut tenir également compte des pertes dues à l'élargissement brusque du jet.

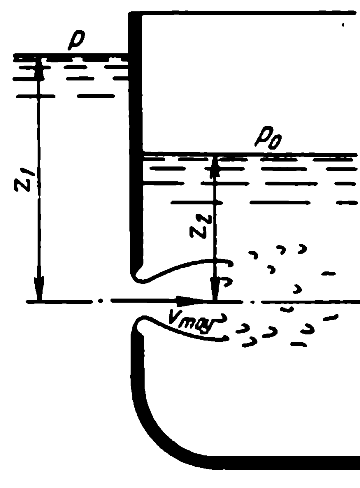


Fig. X.17

En traçant le plan de référence par l'axe de l'orifice et en admettant petites les vitesses de variation des hauteurs du niveau à gauche et à droite de l'orifice et ensuite en négligeant leurs carrés, écrivons l'équation de Bernoulli (X.65) pour les sections situées sur les surfaces libres. En tenant compte des pertes d'énergie locales dans la région de l'orifice et en les rapportant à la vitesse moyenne du fluide dans celui-ci, nous trouvons

$$p+\gamma z_1 = p_0+\gamma z_2+\zeta_0\frac{\rho v_{\text{moy}}^2}{2}+\zeta_{\text{él}}\frac{\rho v_{\text{moy}}^2}{2},$$

d'où

$$v_{\text{moy}} = \frac{1}{\sqrt{\zeta_0+\zeta_{\text{él}}}}\sqrt{2g\left(z_1-z_2+\frac{p-p_0}{\gamma}\right)}.$$

La valeur du coefficient de résistance $\zeta_{\text{él}}$ peut être obtenue de la formule (X.61) en y posant $S=\infty$, c'est-à-dire $\zeta_{\text{él}}=1$. Déterminons le débit de fluide par l'orifice en tenant compte de la contraction du jet

$$Q=\varepsilon S v_{\text{moy}} = \frac{\varepsilon S}{\sqrt{\zeta_0+1}}\sqrt{2g\left(z_1-z_2+\frac{p-p_0}{\gamma}\right)}.$$

Le facteur

$$\mu=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\zeta_0+1}}$$

représente le coefficient de débit de l'orifice noyé, par sa grandeur il est proche du coefficient de l'orifice non noyé. Ceci résulte de la comparaison avec la formule (X.68) dans laquelle on peut pratiquement admettre $\alpha_c \approx 1$.

Ainsi, la formule du débit de fluide par l'orifice noyé peut être écrite sous la forme

$$Q = \mu S \sqrt{2g\left(z_1 - z_2 + \frac{p - p_0}{\gamma}\right)}. \tag{X.71}$$

Pour augmenter le débit de fluide lors de son écoulement par un orifice et obtenir un jet sous pression, on adjoint à l'orifice un tube court appelé ajutage. Les ajutages peuvent être de différentes formes

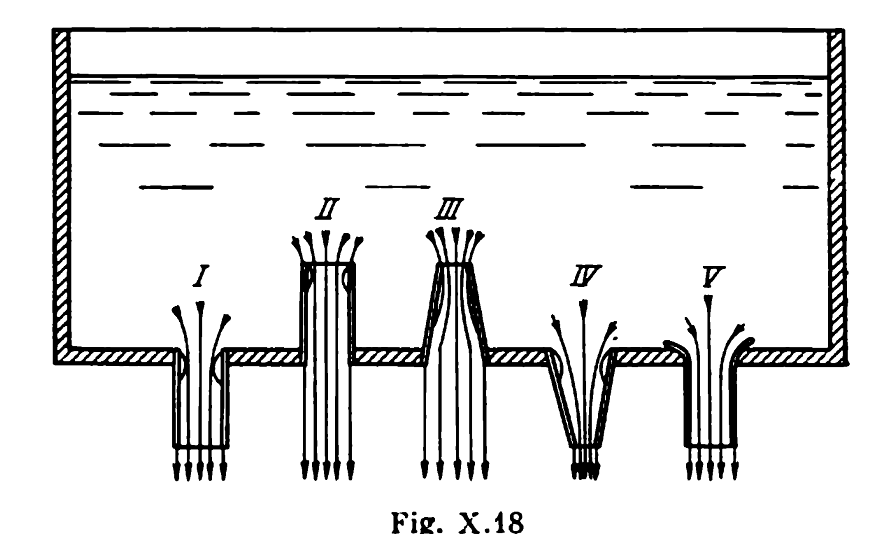


Fig. X.18

(fig. X.18): cylindriques *I* et *II*; coniques, convergents et divergents, *III* et *IV*; conoïdaux, *V*. De plus, on les classe en ajutages intérieurs (*II* et *III*) et extérieurs (*I*, *IV*, *V*).

En régime de fonctionnement correcte de l'ajutage, la section mouillée du jet sortant de celui-ci est égale à l'aire de la section de sortie de l'ajutage. Ainsi on arrive à éviter la contraction du jet à la sortie de l'ajutage et le coefficient de rétrécissement du jet à la sortie $\varepsilon = 1$. Ceci constitue la propriété essentielle de l'ajutage.

Examinons le principe de fonctionnement d'un ajutage cylindrique extérieur (fig. X.19). La veine liquide entrant dans l'ajutage subit d'abord un rétrécissement, analogue à celui qui a lieu à la sortie d'un orifice. Le jet diverge ensuite et à une certaine distance de l'entrée dans l'ajutage, il occupe toute sa section.

L'air contenu dans l'espace entre le jet rétréci et les parois de l'ajutage est emporté par le courant d'eau, et dans cette portion de l'écoulement, c'est-à-dire dans la section rétrécie, il se forme une dépression à la surface du fluide. Par suite de cette dépression, la différence entre la pression à la surface libre du fluide et la pression du jet rétréci augmente par rapport à l'écoulement par un simple orifice. Ceci contribue, suivant l'équation de Bernoulli, à l'augmentation de la vitesse d'écoulement du jet dans la section rétrécie de

l'ajutage, ce qui conduit à l'apparition de l'effet de succion. Néanmoins, les pertes d'énergie augmentent dans l'ajutage. Elles sont dues à l'élargissement du jet dans l'ajutage ainsi qu'au frottement du fluide sur ses parois. Lorsque la construction de l'ajutage est correcte, l'influence de ces pertes augmentées est compensée par l'effet de succion, et de ce fait le débit de l'ajutage devient supérieur à celui de l'orifice.

Pour évaluer l'influence de ces facteurs, nous allons déduire la formule pour le calcul du débit d'un ajutage cylindrique. Ecrivons

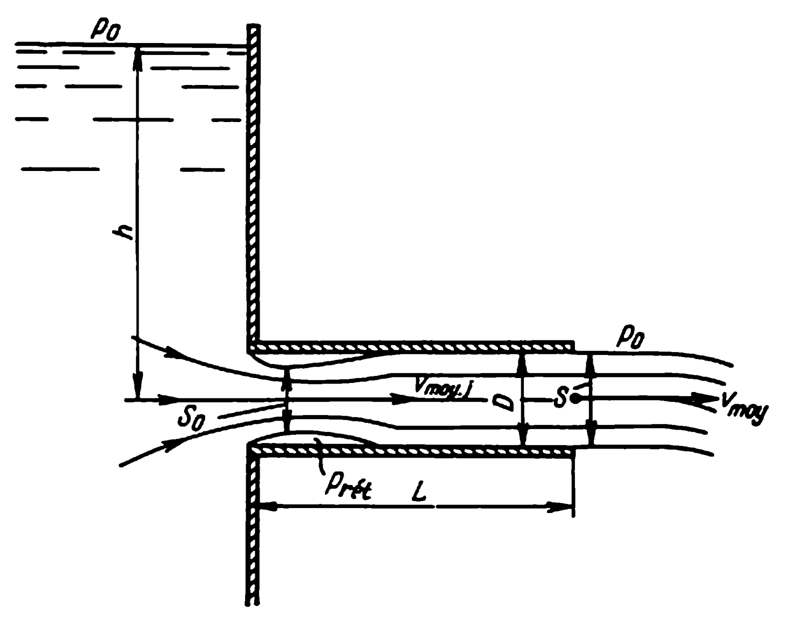


Fig. X.19

l'équation de Bernoulli pour la section qui se confond avec la surface libre du liquide et pour la section du jet à la sortie de l'ajutage. Posons la pression p_0 à la surface du liquide dans les deux sections égales à celle atmosphérique et négligeons la vitesse d'abaissement du niveau du fluide. Le plan de référence est considéré comme étant confondu avec l'axe de l'ajutage

$$p_0+\gamma h=\alpha_c\frac{\rho v_{moy}^2}{2}+\left(\zeta_{o_a}+\zeta_{él}+\lambda\frac{L}{D}\right)\frac{\rho v_{moy}^2}{2}+p_0.$$

Ici le terme $\lambda\frac{L}{D}\frac{\rho v_{moy}^2}{2}$ tient compte des pertes dans l'ajutage sur sa longueur L, et les pertes locales sont rapportées à la vitesse v_{moy} à la sortie de l'ajutage ; la vitesse dans la section de sortie est

$$v_{moy}=\frac{1}{\sqrt{\zeta_{o_a}+\zeta_{él}+\lambda\frac{L}{D}+\alpha_c}}\sqrt{2gh}. \qquad (X.72)$$

Le débit d'eau dans l'ajutage compte tenu de ce que $\varepsilon = 1$ sera

$$Q = v_{\text{moy}} S = \frac{1}{\sqrt{\zeta_{0a} + \zeta_{\text{él}} + \lambda \frac{L}{D} + \alpha_c}} S \sqrt{2gh}.$$

Le coefficient de débit de l'ajutage

$$\mu_a = \frac{1}{\sqrt{\zeta_{0a} + \zeta_{\text{él}} + \lambda \frac{L}{D} + \alpha_c}}, \qquad (X.73)$$

c'est-à-dire il est égal au coefficient de vitesse de l'ajutage. Compte tenu de ce fait, nous obtenons finalement

$$Q = \mu_a S \sqrt{2gH}.$$

En comparant cette formule avec (X.70), établie pour le calcul du débit de liquide en écoulement par l'orifice, nous voyons que pour une même charge h l'ajutage assure un plus grand débit, si

$$\mu_a > \mu. \qquad (X.74)$$

Cette condition permet de déterminer les dimensions relatives optimales de l'ajutage.

Remarquons que le rapport de l'aire du jet S_0 dans la section contractée de l'ajutage à la section de sortie est égal au coefficient de contraction du jet ε. Alors en vertu de la formule (X.60)

$$\zeta_{\text{él}} = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2.$$

Le coefficient de résistance de l'orifice ζ_{0a} rapporté à la vitesse à la sortie de l'ajutage est lié au coefficient de résistance ζ_0 rapporté à la vitesse dans la section contractée S_j par une relation

$$\zeta_{0a} = \zeta_0 \left(\frac{S}{S_j}\right)^2 = \frac{\zeta_0}{\varepsilon^2}.$$

Par suite, la condition (X.74) peut s'écrire sous la forme développée

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\zeta_0}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 + \lambda \frac{L}{D} + \alpha_c}} > \frac{\varepsilon}{\sqrt{\zeta_0 + \alpha_c}}.$$

Après les transformations simples de cette inégalité, nous établissons qu'au point de vue du débit de fluide l'ajutage est plus effectif qu'un orifice, le coefficient de contraction du jet ε étant le même, si

$$\frac{L}{D} < \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon\lambda}. \qquad (X.75)$$

En vertu de cette condition, la longueur limite de l'ajutage suivant la valeur du coefficient de perte de charge répartie λ est

$$L = (40 \div 50)\, D.$$

Pour une longueur des ajutages $L = (3 \div 4)\, D$, $\mu \approx 0{,}82$. Dans les ajutages plus courts il n'est pas exclu que l'air extérieur pénètre dans la zone de la dépression et de ce fait le jet dans l'ajutage ne peut pas diverger d'où la diminution brusque du coefficient de débit.

Trouvons la pression p_j dans la section contractée du jet dans l'ajutage. A cet effet utilisons l'équation de Bernoulli, écrite pour la surface libre et la section contractée,

$$p_0 + \gamma h = p_j + \alpha_c \frac{\rho v^2_{moy_j}}{2} + \zeta_0 \frac{\rho v^2_{moy_j}}{2}.$$

En tenant compte que $v_{moy_j} = v_{moy}/\varepsilon$, nous trouvons

$$p_j = p_0 + \gamma h - \frac{\rho}{2} \frac{v^2_{moy}}{\varepsilon^2} (\alpha_c + \zeta_0).$$

En exprimant v_{moy} en concordance avec la formule (X.72), nous obtenons

$$p_j = p_0 - \gamma \left(\frac{\alpha_c + \zeta_0}{\zeta_{0a} + \zeta_{él} + \lambda \frac{L}{D} + \alpha_c} \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right) h. \qquad (X.76)$$

Ainsi, la pression dans la section contractée p_j tombe proportionnellement à l'augmentation de la charge h. Si la pression p_j diminue jusqu'à atteindre la pression p_s de la vapeur d'eau saturée, alors à la température donnée le liquide dans la section contractée se mettra à bouillir. Dans ce cas il se produit l'effet de cavitation, qui entraîne la rupture du jet, la pénétration de l'air dans l'ajutage et la perturbation de son fonctionnement. Avec $p_0 = 1$ atm, la charge limite après laquelle commence la perturbation du fonctionnement de l'ajutage, d'après la formule (X.76), est $h \approx 9{,}5$ m.

Dans les ajutages cylindriques intérieurs, les valeurs des coefficients de débit sont un peu plus petites que dans les ajutages extérieurs, c'est-à-dire $\mu \approx 0{,}71$. Le coefficient de débit des ajutages coniques convergents dépend de l'angle du cône et a une valeur maximale $\mu = 0{,}95$, pour un angle de 13°. Dans les ajutages divergents, la dépression dans la section contractée est supérieure par rapport aux ajutages cylindriques; un tel ajutage suce de façon effective le liquide. On emploie les ajutages divergents lorsqu'il est désirable d'obtenir un grand débit de fluide avec une faible vitesse d'écoulement à la sortie de l'ajutage.

§ 59. CALCUL DU TEMPS DE VIDANGE D'UN RÉCIPIENT

L'abaissement du niveau de fluide dans un réservoir jusqu'à un niveau donné lors de son écoulement s'effectuant pendant un certain temps représente un exemple d'écoulement unidimensionnel varié. La détermination de ce temps est liée à la nécessité de résoudre le problème sur la durée de vidange d'un récipient, ou sur l'égalisation des niveaux de fluide dans des réservoirs communiquants. Strictement parlant, la résolution de ce problème requiert l'application de l'équation de Bernoulli pour l'écoulement varié de fluide visqueux (X.16). Cependant, si l'on admet que les vitesses de variation du niveau de fluide et, par conséquent, les accélérations locales des particules $\partial v_{\text{moy}}/\partial t$ sont faibles, on peut négliger l'influence de ces accélérations sur le processus de l'écoulement. Dans ce cas, pour résoudre le problème on peut utiliser l'équation de Bernoulli (X.12) pour le mouvement établi et, comme un corollaire, déterminer les valeurs instantanées des débits Q suivant les formules obtenues dans le paragraphe précédent. Cette méthode se réduit en somme à l'utilisation du principe de la stationnarité, c'est-à-dire de l'hypothèse que les valeurs instantanées du débit se déterminent en fonction des valeurs instantanées de la charge et des coefficients de débit suivant les formules déduites pour l'écoulement permanent.

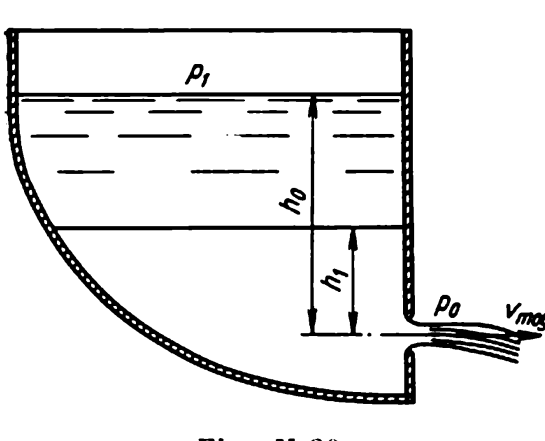


Fig. X.20

Commençons l'étude du problème posé par le cas où il faut déterminer le temps au cours duquel le liquide s'abaissera dans un réservoir de forme quelconque depuis son niveau initial h_0 jusqu'au niveau donné h_1 (fig. X.20). L'écoulement peut s'effectuer par un orifice ou par un ajutage. On suppose que les pressions p_1 sur la surface du fluide dans le réservoir et p_0 sur la surface du jet s'écoulant ne sont pas égales. Pour la détermination de la valeur instantanée du débit de liquide s'écoulant par un orifice, utilisons la formule (X.69)

$$Q = \mu S \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p_0}{\gamma}\right)},$$

en admettant dans celle-ci h égal à la hauteur instantanée du niveau de liquide au-dessus du centre de l'orifice.

D'après cette formule, le volume élémentaire de débit de liquide pendant le temps dt par un orifice est $Q\,dt$. La diminution du volume

de fluide dans le réservoir, due à ce débit, est égale au produit de la surface libre S_r par la variation de la charge $-dh$, c'est-à-dire

$$Q\,dt = -S_r\,dh.$$

En substituant ici la valeur du débit Q, nous trouvons

$$\mu S\sqrt{2g\left(h+\frac{p_1-p_0}{\gamma}\right)}\,dt = -S_r\,dh,$$

d'où le temps d'abaissement du niveau de h_0 jusqu'à h_1 se détermine par l'intégration

$$t = -\frac{1}{S}\int_{h_0}^{h_1}\frac{S_r\,dh}{\mu\sqrt{2g\left(h+\frac{p_1-p_0}{\gamma}\right)}}.$$

On doit tenir compte que dans le cas général d'un réservoir de forme quelconque l'aire de sa surface libre S_r est une fonction de h; le coefficient de débit μ dépend également de la valeur de la charge instantanée h. Cependant pratiquement μ peut être considérée comme une grandeur constante. Cela permet d'écrire la formule de calcul du temps sous la forme

$$t = \frac{1}{\mu S\sqrt{2g}}\int_{h_1}^{h_0}\frac{S_r(h)\,dh}{\sqrt{h+\frac{p_1-p_0}{\gamma}}}. \qquad \text{(X.77)}$$

L'intégrale figurant dans cette formule peut être calculée, dans le cas d'un récipient de forme quelconque, d'après les règles de l'intégration approchée (par exemple, d'après la règle des trapèzes). Pour les formes simple de la dépendance $S_r(h)$, elle se calcule en quadratures. Par exemple, si $S_r(h) = S_r = \text{const}$, alors

$$\int_{h_1}^{h_0}\frac{dh}{\sqrt{h+\frac{p_1-p_0}{\gamma}}} = 2\left(\sqrt{h_0+\frac{p_1-p_0}{\gamma}}-\sqrt{h_1+\frac{p_1-p_0}{\gamma}}\right),$$

c'est-à-dire

$$t = \frac{2S_r}{\mu S\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0+\frac{p_1-p_0}{\gamma}}-\sqrt{h_1+\frac{p_1-p_0}{\gamma}}\right). \qquad \text{(X.78)}$$

En admettant dans cette formule $h_1 = 0$, nous trouvons le temps de vidange total du réservoir. Comme il est facile de voir, les formules (X.77) et (X.78) donnent également la solution du problème sur le temps d'élévation du niveau de h_0 jusqu'à h_1 dans un récipient communiquant avec un autre réservoir, où la hauteur du niveau de liquide, par rapport auquel on mesure h_0 et h_1, est supposée constante. Ceci correspond à un problème de noyage des compartiments sur un navire.

§ 60. ÉCOULEMENT DU FLUIDE DANS LES CONDUITES

Un type important du problème à une dimension en mécanique des fluides est l'étude des écoulements de fluide de grande longueur

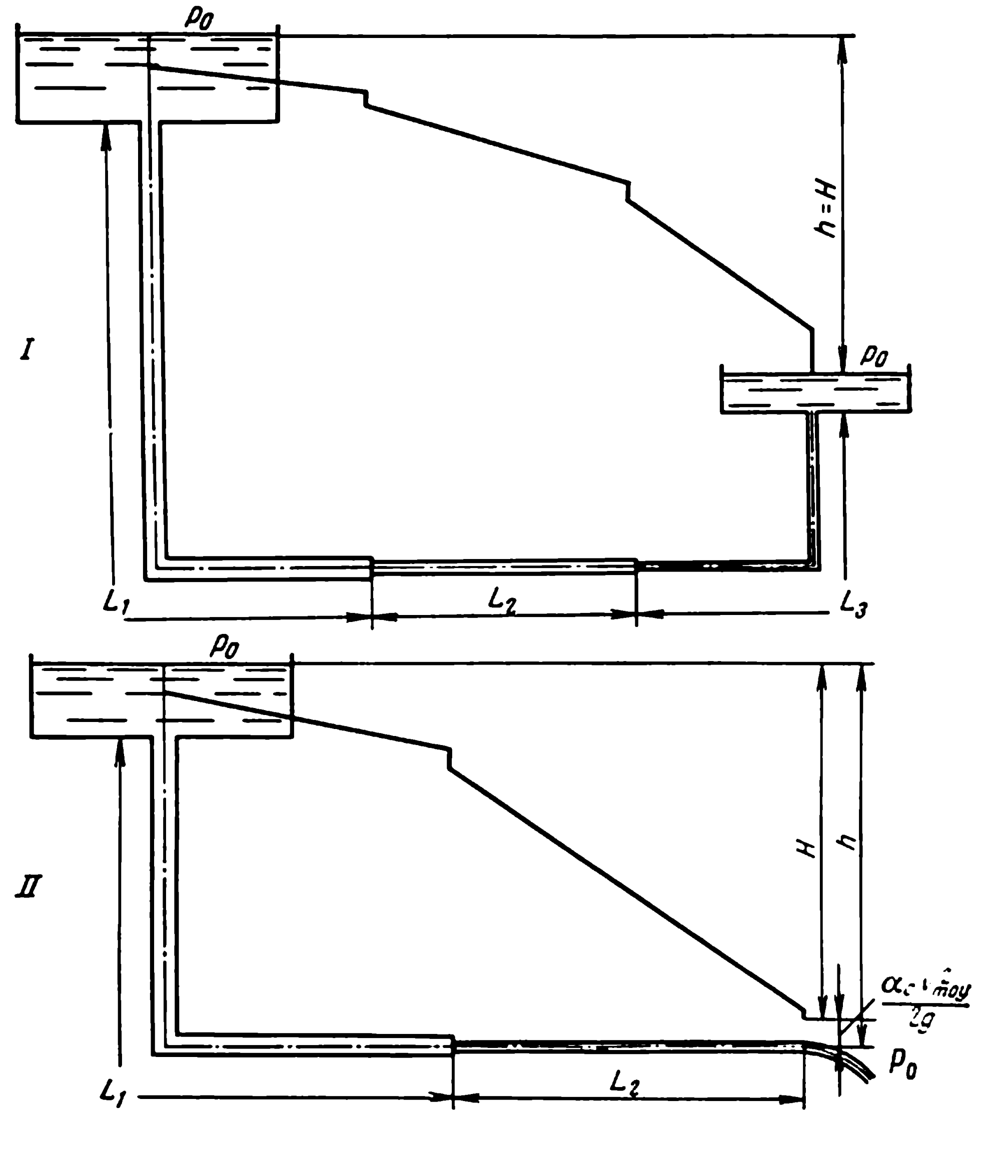


Fig. X.21

dans lesquels les pertes d'énergie essentielles sont des pertes réparties. A ce type de problèmes se rapporte l'étude des écoulements de fluide dans les conduites.

Les conduites peuvent être divisées en deux catégories principales: simples et multiples. Une conduite simple est ordinairement un système de tronçons de tubes réunis en série, avec un débit constant suivant la longueur et n'ayant pas de ramifications. Une conduite

multiple est un système de tubes ramifiés, branchés en parallèle ou avec différentes sources d'alimentation.

Examinons les principales relations caractérisant l'écoulement du fluide dans une conduite simple. Supposons que l'écoulement du fluide dans celle-ci s'effectue sous l'effet d'une charge h créée par un réservoir de charge dans lequel on maintient un niveau de liquide constant. Dans une conduite simple, l'eau est soit amenée dans un autre réservoir de plus grandes dimensions I, soit s'écoule librement de son extrémité II, comme il est montré sur la fig. X.21. Dans le cas I, la charge h est complètement dépensée pour surmonter les résistances réparties et les résistances locales entre les deux réservoirs. Dans le cas II, la perte de charge est due aussi bien à l'affranchissement des résistances qu'à la création de l'énergie cinétique de la veine liquide s'écoulant de la conduite.

Utilisons l'équation de Bernoulli (X.12) et écrivons celle-ci pour l'écoulement dans une conduite simple, correspondant au schéma II. Admettons que le plan de référence est situé au niveau de la sortie du jet de la conduite et considérons la conduite comme se composant d'une série de tronçons L_i avec des tubes de différents diamètres D_i. Pour calculer les pertes de charge H nous utilisons la relation (X.17). En partant de ces hypothèses nous pouvons écrire

$$\gamma h = \alpha_c \frac{\rho v_{moy}^2}{2} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{\rho v_{moy_i}^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \frac{\rho v_{moy_k}^2}{2}. \qquad (X.79)$$

En faisant appel à l'équation de continuité, nous pouvons exprimer les vitesses dans les différents tronçons de la conduite figurant dans cette expression en fonction de la vitesse moyenne v_{moy} à la sortie de la conduite

$$S_1 v_{moy_1} = S_2 v_{moy_2} = \ldots S_i v_{moy_i} = S v_{moy}.$$

La valeur du coefficient de la non-uniformité α_c en écoulement turbulent peut être admise égale à l'unité.

Finalement, suivant l'équation (X.79)

$$v_{moy} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\alpha_c + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \left(\frac{S}{S_i}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \left(\frac{S}{S_k}\right)^2}}.$$

Alors le débit sera

$$Q = \mu_{cond} S \sqrt{2gh}, \qquad (X.80)$$

où

$$\mu_{cond} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \left(\frac{S}{S_i}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \left(\frac{S}{S_k}\right)^2}} \qquad (X.81)$$

représente le coefficient de débit de la conduite.

En comparant les expressions (X.80) et (X.70), nous nous assurons de leur identité extérieure pour les valeurs évidemment différentes des coefficients de débit. Les valeurs de μ_{cond} dépendent des valeurs des coefficients de perte de charge répartie λ dont le calcul doit s'effectuer en partant des nombres de Reynolds, compte tenu de l'influence de la rugosité des parois du tube. Pour une conduite de diamètre constant suivant la longueur, la formule (X.81) prendra la forme

$$\mu_{\text{cond}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_c+\lambda\frac{L}{D}+\sum_{k=1}^{n}\zeta_k}}. \tag{X.82}$$

Parfois, pour tenir compte de l'influence des pertes locales dont la part dans la valeur totale des résistances d'une conduite de grande longueur n'est généralement pas grande, on simplifie cette formule en remplaçant la longueur réelle L de la conduite par sa longueur équivalente

$$L_{\text{réd}}=L+\frac{D}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\zeta_k,$$

c'est-à-dire en ramenant la formule à la forme

$$\mu_{\text{cond}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_c+\lambda\frac{L_{\text{réd}}}{D}}}.$$

Si la conduite simple correspond au schéma *I*, alors il n'y a pas lieu de tenir compte du premier terme du deuxième membre de l'équation (X.79). Alors, en négligeant les pertes locales, le coefficient de débit pour une conduite de section constante suivant la longueur peut s'écrire ainsi

$$\mu_{\text{cond}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda\frac{L}{D}}}. \tag{X.83}$$

Dans les calculs pratiques des conduites, il est parfois commode de représenter les relations obtenues ci-dessus sous une forme qui simplifie les calculs. D'après (X.80) et (X.83), le calcul d'une conduite simple de section constante est

$$Q=S\sqrt{\frac{2ghD}{\lambda L}}, \tag{X.84}$$

où le rapport h/L suivant la formule (X.13) représente la pente hydraulique de la conduite

$$I_{\text{h}}=\frac{h}{L}.$$

Ainsi, la formule pour le calcul du débit s'écrira sous la forme

$$Q=K\sqrt{I_h}, \tag{X.85}$$

où

$$K=S\sqrt{\frac{2gD}{\lambda}}=\sqrt{\frac{\pi^2gD^5}{8\lambda}}. \tag{X.86}$$

La grandeur K, représentant suivant la formule (X.85) le débit d'une conduite à pente hydraulique égale à l'unité $I_h = 1$, s'appelle caractéristique de débit ou module de débit du tube.

Les valeurs de K dépendent des coefficients de perte de charge répartie λ. Ordinairement dans les conduites les nombres Re de l'écoulement correspondent au troisième régime de l'écoulement autour des aspérités de la rugosité, lorsque λ dépend seulement de la rugosité relative et ne dépend pas du nombre Re du tube. Pour cette raison le coefficient K peut être calculé à l'avance pour les tubes avec différentes rugosités et de différents diamètres et être représenté sous la forme d'abaques facilitant les calculs.

Suivant la formule (X.85), la charge indispensable pour assurer le débit donné Q se détermine par la relation

$$h=\frac{Q^2}{K^2}L. \tag{X.87}$$

Les formules (X.85) et (X.87) permettent de déterminer facilement le débit Q pour une charge donnée h et un diamètre D des tubes ou bien la charge nécessaire h pour Q et D donnés, c'est-à-dire de résoudre les deux principaux problèmes pour une conduite simple. Le troisième problème, la détermination du diamètre requis du tube D pour Q et h donnés, vu que λ dépend d'une façon complexe de D [voir formule (X.54)], peut être résolu seulement par la méthode des approximations successives. Si le long d'une conduite simple il y a des tronçons de tubes de différents diamètres, alors la charge disponible totale sera dépensée pour surmonter la somme des pertes réparties suivant la longueur des différents tronçons, c'est-à-dire

$$h=\sum_{i=1}^{n} H_{L_i}.$$

En tenant compte que sur chaque tronçon de longueur L_i et de diamètre D_i, suivant la formule (X.87)

$$H_{L_i}=\frac{Q_i^2}{K_i^2}L_i$$

et que par suite de la condition de continuité

$$Q_1=Q_2=\ldots=Q_i=Q,$$

nous trouvons la formule

$$h = Q^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{K_i^2} \tag{X.88}$$

qui est commode pour le calcul des conduites simples de section variable.

Si la conduite est dotée d'une pompe, alors la charge h_p créée par celle-ci peut être considérée équivalente à une certaine énergie supplémentaire communiquée à l'écoulement du fluide. La valeur

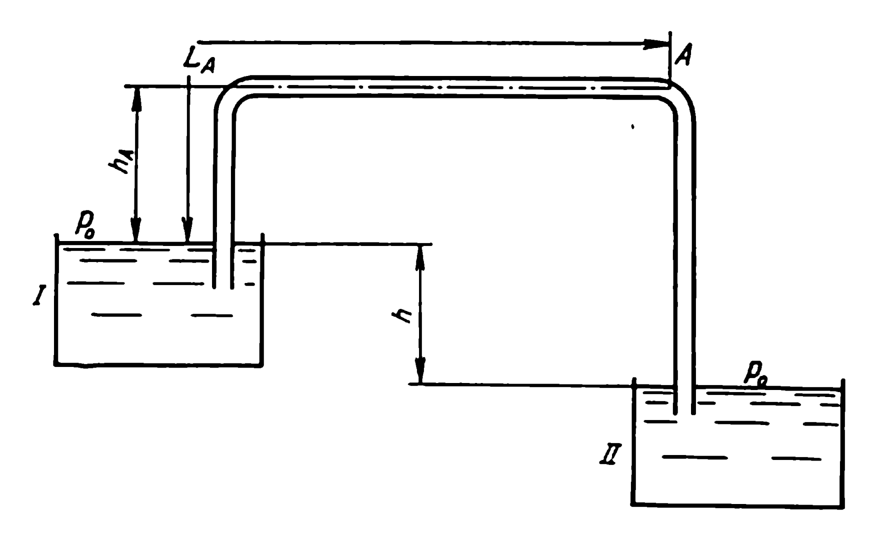


Fig.. X.22

spécifique de cette énergie correspond à la charge h_p créée par la pompe et peut être prise en compte dans les formules indiquées comme un terme supplémentaire à la charge h disponible. Dans le cas donné la pente hydraulique doit être déterminée suivant la formule

$$I_h = \frac{h + h_p}{L}. \tag{X.89}$$

Le calcul ultérieur peut s'effectuer toujours suivant la formule (X.85). La pompe rend possible l'amenée du liquide par la conduite d'un réservoir à bas niveau dans un réservoir à niveau plus élevé. Dans la relation (X.89), la valeur h sera inférieure à zéro et égale à la différence des niveaux entre les points d'alimentation et de consommation du fluide. L'analyse détaillée du fonctionnement de la pompe, compte tenu des caractéristiques de la conduite donnée, s'effectue, par exemple, pour le calcul des systèmes de navires.

Une conduite sur la longueur de laquelle il y a un tronçon de tubes disposé au-dessus de la surface libre du réservoir I, d'où le fluide est pompé dans le réservoir II, est dite siphon (fig. X.22). Le calcul de l'écoulement dans celui-ci s'effectue suivant les formu-

les ordinaires (X.80) et (X.85). Cependant dans un tel écoulement est possible l'apparition d'une dépression notable dans la partie élevée de la conduite, où une grande chute de pression peut provoquer la cavitation. Cela conduira à la discontinuité de l'écoulement et à la cessation de l'écoulement de l'eau dans la conduite. Le plus probable est l'apparition de la pression minimale au point A, le

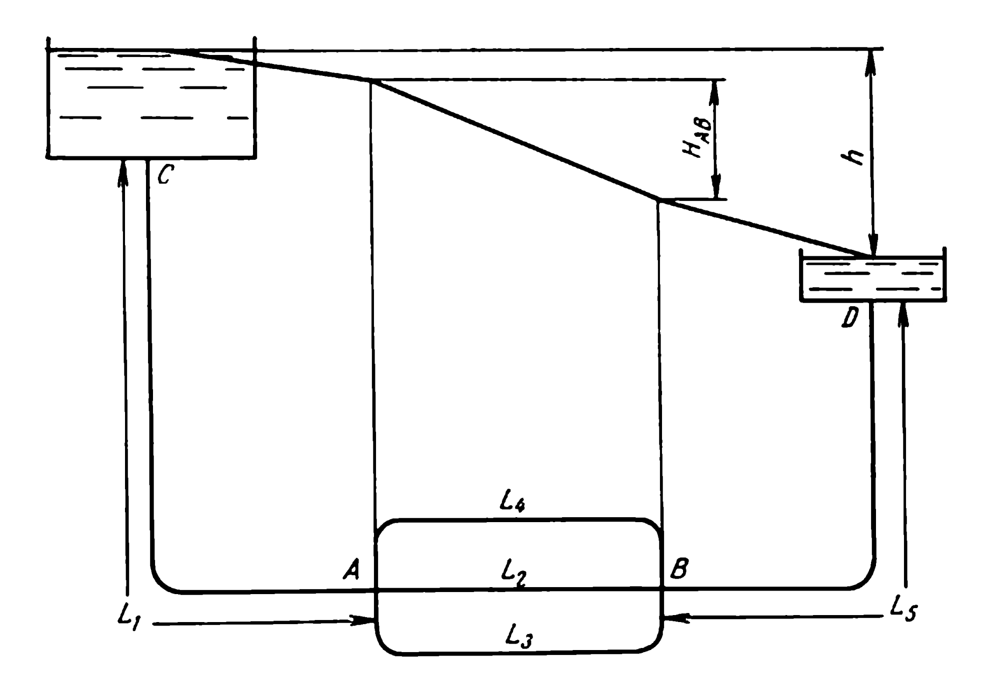


Fig. X.23

plus élevé et le plus éloigné du réservoir *I* (fig. X.22). En désignant la longueur de la conduite avant cet endroit par L_A et sa hauteur au-dessus du niveau du réservoir supérieur par h_A, d'après l'équation de Bernoulli, nous trouvons

$$p_0 = p_A + h_A\gamma + \alpha_c \frac{\rho v_{moy}^2}{2} + \lambda \frac{L_A}{D} \frac{\rho v_{moy}^2}{2} + \sum_{i=1}^{k} \zeta_i \frac{\rho v_{moy}^2}{2},$$

où p_A est la pression au point A.

D'où il vient

$$\frac{p_0 - p_A}{\gamma} = h_A + \left(\alpha_c + \lambda \frac{L_A}{D} + \sum_{i=1}^{k} \zeta_i\right) \frac{\rho v_{moy}^2}{2},$$

où $p_0 - p_A$ est la dépression au point A.

La valeur de $p_0 - p_A/\gamma$, admissible du point de vue du fonctionnement normal de la conduite, ne dépasse ordinairement pas 6-7 m d'eau.

Examinons quelques particularités des écoulements dans des conduites multiples. La fig. X.23 montre une conduite sur le tron-

çon AB de laquelle sont branchés en parallèle des tubes de différents diamètres et longueurs. La particularité caractéristique de ce tronçon est la présence de ramification des tubes aux points A et B. Pour composer les équations décrivant le mouvement d'un fluide, on part de ce que les pertes de charge entre les points de ramification A et B dans toutes les branches sont identiques, c'est-à-dire que l'écoulement dans n'importe quelle de ces branches s'effectue sous l'action d'une perte de charge identique. Ceci permet d'établir un système fermé d'équations pour une conduite ramifiée.

Etablissons un tel système pour la conduite représentée sur la fig. X.23 avec trois ramifications parallèles de tubes. Désignons par H_{AB} la perte de charge inconnue entre les points A et B. Alors pour chaque branche, de même que pour une conduite simple, on peut écrire suivant (X.87)

$$\frac{Q_2^2}{K_2^2} L_2 = H_{AB}; \quad \frac{Q_3^2}{K_3^2} L_3 = H_{AB}; \quad \frac{Q_4^2}{K_4^2} L_4 = H_{AB}. \qquad (X.90)$$

Choisissons maintenant sur le tronçon ramifié une branche quelconque de longueur L_2. Alors dans la conduite composée des tronçons CA de longueur L_1, AB de longueur L_2 et BD de longueur L_5, l'écoulement s'effectuera sous l'action d'une même charge h, mais avec des débits différents, c'est-à-dire suivant la formule (X.88)

$$\frac{Q^2}{K_1^2} L_1 + \frac{Q_2^2}{K_2^2} L_2 + \frac{Q^2}{K_5^2} K_5 = h, \qquad (X.91)$$

où il est admis que sur les tronçons avant et après la ramification les débits sont identiques, c'est-à-dire $Q_1 = Q_5 = Q$.

Enfin, aux points de ramification doit être observée la condition de continuité

$$Q = Q_2 + Q_3 + Q_4. \qquad (X.92)$$

Le système de cinq équations obtenu (X.90)-(X.92) permet de déterminer cinq inconnues: Q, Q_1, Q_2, Q_3 et H_{AB} ; après quoi on peut également calculer les pertes de charge sur les tronçons CA et BD, c'est-à-dire déterminer toutes les caractéristiques de la conduite examinée.

Une conduite multiple, où la prise de liquide de la conduite principale s'effectue au moyen d'un grand nombre de ramifications, disposées sur sa longueur plus ou moins régulièrement, peut être schématisée sous la forme d'une conduite avec un débit continu sur sa longueur. A cet effet, supposons que le débit de fluide aux consommateurs s'effectue régulièrement sur toute la longueur de la conduite avec une intensité q rapportée à l'unité de sa longueur (fig. X.24). En outre, nous admettrons que seule une partie de fluide est débitée sur la longueur de la conduite et qu'à son extrémité la valeur de son débit est Q_{cond}. Par suite le débit total de liquide au début de la

conduite est

$$Q = Q_{cond} + qL.$$

Le premier terme Q_{cond} est dit débit transité et le second débit réparti.

Considérons la section de la conduite située à une distance x de son commencement. Le débit dans cette section sera évidemment

$$Q_x = Q_{cond} + qL - qx.$$

Toutefois, d'après la formule (X.85)

$$I_h = \frac{Q^2}{K^2} = \frac{(Q_{cond} + qL - qx)^2}{K^2}.$$

Cette relation permet de déterminer la dépendance de la charge en fonction des débits de différente nature pour le schéma de conduite

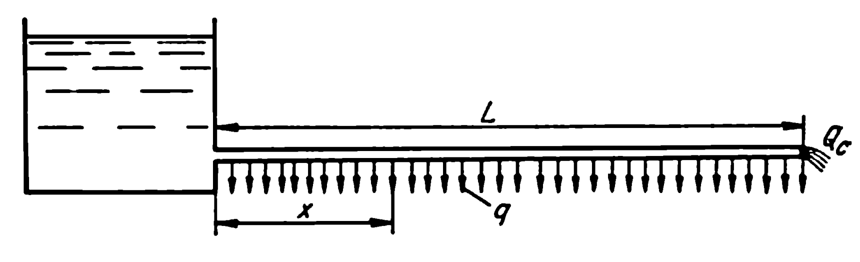


Fig. X.24

donné. En effet, comme $I_h \neq$ const, alors suivant (X.15)

$$I_h = \frac{dH}{dx} = \frac{(Q_{cond} + qL - qx)^2}{K^2}.$$

En intégrant cette équation sur la longueur de la conduite, nous trouvons

$$H = \frac{1}{K^2} \int_0^L [(Q_{cond} + qL)^2 - 2(Q_{cond} + qL)qx + q^2x^2]\, dx.$$

Après le calcul de l'intégrale nous obtenons une équation qui fournit la charge nécessaire assurant le fonctionnement de la conduite avec les débits réparti et transité donnés

$$H = \frac{L}{K^2}\left(Q_{cond}^2 + 2qQ_{cond}L + \frac{q^2L^2}{3}\right). \qquad \text{(X.93)}$$

Si la conduite n'a qu'un débit réparti et $Q_{cond} = 0$, alors

$$H = \frac{L}{K^2}\frac{q^2L^2}{3},$$

c'est-à-dire une telle conduite est équivalente à une simple conduite de débit $Q = qL$, mais demande une charge trois fois moindre.

L'analyse des systèmes de conduites ramifiées plus complexes s'appuie sur le même principe que celle des schémas simples examinés ci-dessus. Cependant dans ce cas la majorité des problèmes est résolue à l'aide de différentes méthodes approchées ou grapho-analytiques, examinées dans les manuels d'hydraulique [1] et autres parties spécialisées de la mécanique des fluides appliquée.

§ 61. COUP DE BÉLIER

Parmi les problèmes des mouvements unidimensionnels variés du fluide l'étude du coup de bélier est d'un intérêt particulier. La particularité de ce problème consiste en la nécessité de tenir compte des phénomènes de compressibilité qui permettent d'expliquer la propagation des ondes élastiques dans les milieux matériels.

Le coup de bélier apparaît lorsqu'on arrête brusquement l'écoulement dans une conduite. Il s'accompagne d'un arrêt soudain de la masse de fluide et d'une augmentation brusque de la pression, qui se propage le long de la conduite, provoquant des bruits et la vibration de la conduite et dans les cas sérieux, sa destruction, l'endommagement de la robinetterie et des pompes. Dans l'élaboration de la théorie de ce processus complexe non stationnaire un grand rôle incombe aux recherches de N. Joukovski réalisées à la fin du XIXe siècle.

Décrivons le phénomène de l'apparition du coup de bélier dans une conduite simple alimentée par un grand réservoir avec un niveau constant (fig. X.25). Pour simplifier, nous admettrons indéformables les parois du tube par lequel s'écoule le fluide.

Au moment de la fermeture instantanée de la vanne disposée dans la section AB à la sortie du tube, il se produit l'arrêt du fluide qui se déplaçait auparavant avec une vitesse constante v_{moy}. Si le fluide était incompressible, le processus d'arrêt se passerait instantanément dans toute la masse de fluide se trouvant au moment donné dans le tube. Cependant, étant donné que le fluide est compressible, le processus d'arrêt du fluide se déroule dans le temps de la manière suivante. D'abord s'arrêtent les couches transversales par rapport à l'axe du tube, situées à l'approche immédiate de la vanne, ensuite s'arrêtent successivement toutes les autres couches depuis la vanne vers le réservoir. La perte d'énergie cinétique du fluide ayant lieu dans les couches arrêtées provoque l'élévation de la pression Δp dont la zone se met à se propager dans le tube pour embrasser tout le volume occupé par le fluide arrêté. Par conséquent, le processus d'arrêt du fluide pendant le coup de bélier remonte le tube avec la même vitesse $c_{\text{bél}}$ avec laquelle dans un fluide s'effectue le processus de la transmission de la pression. Dans le cas où l'élasticité des parois des tubes n'influe pas sur ce processus, la vitesse $c_{\text{bél}}$ est égale à la vitesse de la propagation du son dans le fluide. Comme dans un fluide incompressible cette vitesse est infinie, le processus d'élévation de

la pression sur toute la longueur du tube, sans tenir compte de la compressibilité, devrait être considéré comme instantané. Ainsi, après un intervalle de temps $t = L/c_{\text{bél}}$, le fluide dans tout le tube s'arrêtera à l'état comprimé sous l'action de la pression qui sera supérieure de Δp à la pression statique p.

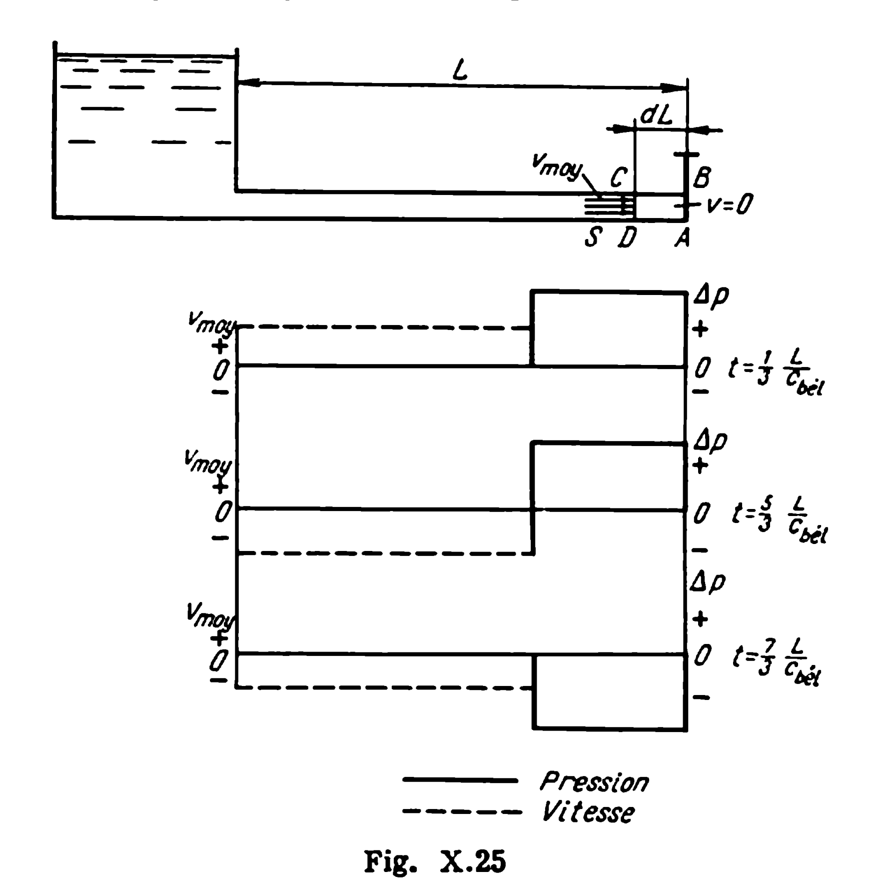


Fig. X.25

Il est facile de voir qu'un tel état de repos du fluide ne peut se conserver. A la sortie du réservoir dans lequel, en cas de son grand volume et de la présence de la surface libre, la pression peut être considérée constante, l'équilibre du fluide sera perturbé par suite de la variation de pression Δp. Sous l'influence de cette variation de pression, le fluide se mettra à se déplacer dans le tube avec une vitesse correspondante v_{moy}, mais cette fois en sens inverse, c'est-à-dire vers le réservoir. Ce processus s'accompagnera du rétablissement de la pression initiale p qui existait aux points correspondants du tube avant la fermeture de la vanne. Après un intervalle de temps $t = 2L/c_{\text{bél}}$ la pression statique se rétablira dans toute la conduite et toute la masse de fluide y prendra son volume initial en se déplaçant vers l'entrée du tube. Le déplacement des particules vers le réservoir fera couler le fluide depuis la vanne, c'est-à-dire provoquera la baisse de la pression de la valeur Δp. Cette onde de dépression se mettra à se propager vers le réservoir et après l'avoir atteint à l'ins-

tant $t = 2L/c_{\text{bél}}$ subira une réflexion avec changement de signe. Quand le fluide atteindra la vanne fermée, dans cette zone la pression augmentera à nouveau de Δp et tout le processus se répétera périodiquement dans le temps. La loi de la distribution de la surpression et de la vitesse le long du tube pour trois moments de temps est montrée schématiquement sur la fig. X.25 et la loi de la variation de la surpression dans le temps à l'extrémité du tube $x = L$ et dans la section au milieu du tube $x = L/2$, sur la fig. X.26.

En effet, si l'on tient compte de la viscosité du fluide, de la déformation des parois du tube et de la dissipation de l'énergie qui

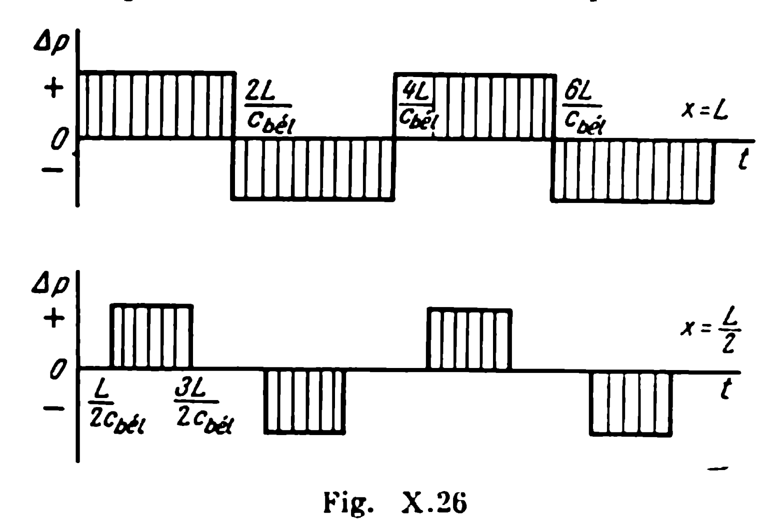


Fig. X.26

y est liée, il faudra considérer le processus de la variation de la pression dans le temps comme amorti. D'autre part, son allure et la grandeur Δp dépendent notablement du caractère fini du temps de fermeture de la vanne.

Déduisons la formule pour le calcul de la grandeur Δp lors d'un coup de bélier. A cet effet utilisons la loi de la quantité de mouvement

$$\frac{d\overline{Q}_f}{dt} = \overline{R},$$

en l'appliquant à un volume élémentaire d'une longueur dL dans lequel pendant le temps dt s'est effectué l'arrêt du fluide (fig. X.25). Ici $\overline{Q_f}$ est le vecteur quantité de mouvement du fluide dans le volume considéré. En utilisant cette loi sous la forme d'une projection sur l'axe du tube, dont l'aire de la section transversale est S et en négligeant la déformation du tube, nous trouvons

$$d\overline{Q}_f = \rho S dL v_{\text{moy}}.$$

Alors la loi de la quantité de mouvement s'écrit sous la forme

$$\frac{dL\rho S v_{\text{moy}}}{dt} = (p - p - \Delta p)\, S.$$

En tenant compte que

$$\frac{dL}{dt} = -c_{\text{bél}}$$

représente la vitesse de propagation des perturbations élastiques dans un liquide dans le sens inverse de la vitesse de l'écoulement principal, nous obtenons

$$\Delta p = \rho c_{\text{bél}} v_{\text{moy}}. \tag{X.94}$$

Il résulte de cette formule que la valeur Δp au commencement du coup de bélier pour $t < 2L/c_{\text{bée}}$ est positive et à l'instant $t > 2L/c_{\text{bél}}$ elle est négative, car la vitesse v_{moy} change de signe en concordance avec le déroulement du phénomène décrit ci-dessus.

Pour la détermination de la vitesse de propagation de la déformation élastique $c_{\text{bél}}$, on doit tenir compte de l'élasticité du matériau du tube et de la compressibilité du fluide.

Déterminons la variation de la masse du fluide dans le volume de fluide arrêté *ABCD* (fig. X.25) pendant le temps dt, en tenant compte de la variation de sa masse volumique ρ et de l'aire de la section du tube S due à l'augmentation de la pression. Elle est égale à la différence des masses de fluide initiale et finale, calculées en tenant compte de la compressibilité et de la déformation,

$$(\rho + d\rho)(S + dS)\,dL - \rho S\,dL \approx (\rho\,dS + S\,d\rho)\,dL.$$

Suivant la condition de continuité, la variation de la masse est égale à la masse de fluide entrant à travers la partie encore non déformée de la section S

$$(\rho\,dS + S\,d\rho)\,dL = \rho S v_{\text{moy}}\,dt.$$

En tenant compte que $dL = c_{\text{bél}}dt$, nous trouvons

$$c_{\text{bél}} = \frac{v_{\text{moy}}}{\frac{dS}{S} + \frac{d\rho}{\rho}}. \tag{X.95}$$

La grandeur dS/S pour une section circulaire du tube peut être exprimée en fonction de l'accroissement de son rayon dr lors de la déformation

$$\frac{dS}{S} = \frac{2\pi r\,dr}{\pi r^2} = 2\frac{dr}{r}$$

ayant lieu sous l'action de la charge intérieure Δp.

En vertu des données connues du cours de la résistance des matériaux

$$\frac{dr}{r} = \frac{r}{tE}\Delta p,$$

où t est l'épaisseur des parois du tube et E le module d'élasticité du matériau des parois.

La grandeur $d\rho/\rho$ est liée au module d'élasticité E_f du fluide par la relation

$$E_f=\rho\frac{dp}{d\rho}\approx\rho\frac{\Delta p}{d\rho}.$$

En portant ces relations dans (X.95), nous trouvons

$$c_{\text{bél}}=\frac{v_{\text{moy}}}{\Delta p\left(\frac{1}{E_f}+\frac{2r}{tE}\right)}.$$

Si l'on exprime dans cette formule Δp suivant la relation (X.94) et on résout l'équation trouvée par rapport à $c_{\text{bél}}$, en définitive, on obtiendra l'expression qui fournit la vitesse de propagation des déformations élastiques sous la forme

$$c_{\text{bél}}=\frac{\sqrt{\frac{E_f}{\rho}}}{\sqrt{1+\frac{E_f}{E}\frac{2r}{t}}},$$

qui a été, comme (X.94), établie par N. Joukovski. Pour des parois non élastiques du tube $E=\infty$ et la vitesse de propagation des déformations élastiques

$$c_{\text{bél}}=\sqrt{\frac{E_f}{\rho}}.$$

Cette expression représente la formule de Newton pour la détermination de la vitesse de propagation du son dans un milieu fluide illimité. Pour l'eau, à la température de 10 °C, $E_f=2{,}07\cdot10^8$ kgf/m^2. L'élasticité des parois du tube diminue sensiblement la vitesse $c_{\text{bél}}$, surtout si les tubes sont fabriqués en matériau peu élastique.

CHAPITRE XI

THÉORIE DE LA COUCHE LIMITE

§ 62. PARTICULARITÉS DU MOUVEMENT DE FLUIDE POUR DE GRANDS NOMBRES DE REYNOLDS

L'étude théorique des mouvements d'un fluide visqueux permet d'obtenir les résultats définitifs des calculs de la résistance, soit en cas des mouvements lents pour de faibles nombres Re (§ 44), soit pour de grands nombres Re. Pour les grandes valeurs des nombres Re, on pourrait à première vue négliger les forces de viscosité par rapport aux forces d'inertie et chercher la solution du problème au moyen de la théorie des écoulements potentiels d'un fluide parfait ; cependant, de tels mouvements, satisfaisant aux équations de Navier-Stokes, ne permettent pas de satisfaire à la condition aux limites de l'adhérence d'un fluide aux parois solides. Ceci montre que la condition d'adhérence conduit à la perturbation de la potentialité de l'écoulement et ceci surtout au voisinage de la surface des corps. Par conséquent, dans ce cas les équations de Navier-Stokes décrivent non pas un écoulement potentiel, mais un écoulement turbulent.

Un intérêt particulier revient aux mouvements dans lesquels les effets d'inertie dans le fluide l'emportent sur l'influence des forces de viscosité. Comme on le sait, l'influence relative de chacune de ces deux classes principales de forces est caractérisée par le nombre Re de l'écoulement. Le cas examiné représente le mouvement avec de grandes valeurs de Re. Lors de tels mouvements tout le courant fluide peut être approximativement divisé en deux zones: 1) zone de très faible épaisseur dite couche limite, où l'influence des forces de viscosité est aussi importante que l'influence de toutes les autres forces et 2) zone d'influence négligeable de la viscosité appelée fluide libre. Pour la zone de la couche limite, grâce à sa faible épaisseur relative, les équations du mouvement peuvent être simplifiées, à la suite de quoi leur résolution devient plus facile que celle des équations générales de Navier-Stokes. Dans le fluide libre on peut considérer les fluide comme parfait et étudier son mouvement en se servant des méthodes de calcul connues de la théorie des écoulements potentiels.

Le problème se ramène à examiner séparément les équations simplifiées du mouvement de fluide dans ces deux zones et à raccorder ensuite les solutions obtenues. Suivant l'influence relative des

forces d'inertie et de viscosité ou, ce qui revient au même, suivant la valeur du nombre Re de l'écoulement, l'épaisseur relative de la couche limite et du fluide libre varie. Plus le nombre Re est grand, c'est-à-dire plus importante est la valeur relative des forces d'inertie, moins épaisse est la couche limite et, par conséquent, plus grande est l'étendue du fluide libre et inversement, avec la croissance de l'importance de la viscosité la couche limite s'épaissit et la zone de courant extérieure à la couche limite diminue.

Ce rôle déterminant du nombre Re, de l'ordre de grandeur duquel dépend si telle ou telle partie du courant fluide se rapporte à la zone de la couche limite ou du fluide libre, constitue la particularité principale des méthodes approchées de la solution des problèmes de la dynamique des fluides visqueux, portant le nom de théorie de la couche limite.

Les mouvements du fluide dans la couche limite et dans le fluide libre sont indissolublement liés entre eux. Dans la position du problème initiale de Prandtl, cette liaison a été considérée comme unilatérale ; on considérait que le fluide libre existe indépendamment de la couche limite et on l'admettait à l'avance connu ; quant au mouvement dans la couche limite, il est déterminé suivant le fluide libre donné. Le développement ultérieur de la théorie de la couche limite a montré que cela n'était pas ainsi et c'est seulement avec une certaine approximation, pas toujours satisfaisante, qu'on peut effectuer le calcul suivant un tel schéma.

Remarquons tout d'abord qu'à la suite du freinage du fluide dans la couche limite, les lignes de courant se déplacent et refoulent le liquide libre. La variation des vitesses longitudinales aux frontières de la couche due à ce refoulement s'avère dans la majorité des cas négligeable. L'influence opposée notable exercée par la couche limite sur le fluide libre a pour cause l'apparition de vitesses transversales qui se conservent dans le fluide libre et dans un certain nombre de cas constituent l'objet principal du phénomène étudié (injection du fluide dans le filet). Dans certains cas plus rares (décollement et état précédant le décollement) l'influence inverse de la couche limite sur les vitesses longitudinales dans le fluide libre a aussi de l'importance. Dans ce cas, on ne peut considérer l'écoulement du fluide libre comme connu à l'avance ; pour le déterminer il faut tenir compte du mouvement dans la couche limite, qui à son tour dépend de l'écoulement du fluide libre. L'étude, même très approchée, des problèmes de ce type représente jusqu'ici de grandes difficultés. Enumérons, selon L. Loïtsianski [16], les classes de mouvements les plus souvent étudiées au moyen de la théorie de la couche limite. Le trait typique de ces classes est la présence de deux zones : du fluide libre et de la couche limite.

Dans l'écoulement d'un fluide autour d'un corps immobile (fig. XI.1), le passage de la vitesse nulle des particules fluides adhé-

rant à la surface du corps à la vitesse voisine de la vitesse à l'infini s'effectue de façon brusque dans la région située au voisinage immédiat de la surface du corps. Dans cette région, couche limite le long de la surface du corps, se développent des forces de viscosité importantes, comparables aux forces d'inertie. Loin du corps, où les vitesses sont devenues presque uniformes et ont atteint des valeurs voisines de la vitesse à l'infini amont, les forces de viscosité deviennent insignifiantes, de façon qu'on peut les négliger, en considérant ce fluide libre comme une région de mouvement de fluide non visqueux. En aval de ce corps, à une certaine distance, il se conserve

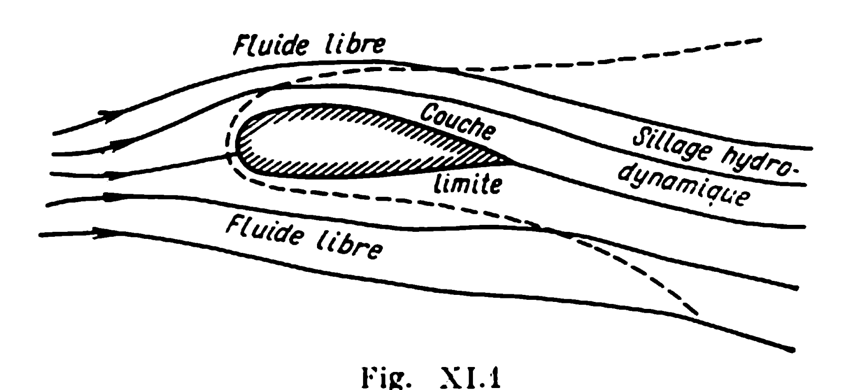


Fig. XI.1

encore la région de fluide freiné par le corps, où les vitesses tendent à s'égaliser à la suite de l'interaction avec le fluide libre pour atteindre à nouveau la valeur de la vitesse à l'infini amont. Une telle région d'écoulement de fluide est dite sillage hydrodynamique du corps; parfois on l'appelle encore ombre hydrodynamique. Le sillage hydrodynamique représente un autre exemple typique de la couche limite, où se manifeste également d'une façon nette l'interaction de la couche limite avec le fluide libre.

Le filet fluide pénétrant dans l'espace rempli par le fluide immobile de propriétés physiques identiques ou proches nous fournit encore un exemple de la couche limite (fig. XI.2). Au commencement, à l'entrée dans le fluide au repos, l'effet de l'influence de la viscosité se manifeste dans la couche limite surtout à la périphérie du filet, ensuite progressivement d'autres particules se trouvant dans les régions voisinant l'axe du filet sont entraînées dans le processus de freinage visqueux, enfin l'effet de freinage produit par le fluide libre se répand sur tout le filet qui devient entièrement couche limite. C'est dans cette couche limite que se dérouleront les processus de brassage du filet avec le fluide au repos.

Si un filet s'écoule dans un fluide en mouvement, par exemple le déplacement d'un filet dans un écoulement de même direction, alors ici également nous avons affaire à la couche limite (le filet lui-même) et au fluide libre de même direction.

Examinons le tronçon initial d'une buse quelconque dans laquelle entre un fluide visqueux (fig. XI.3). Sur ses parois intérieures, comme sur toute surface solide, apparaît une couche limite se développant progressivement en aval de l'écoulement. A l'intérieur de la buse, en dehors de cette couche limite, il existe un fluide libre qui ne disparaît qu'après la jonction des couches limites qui se sont

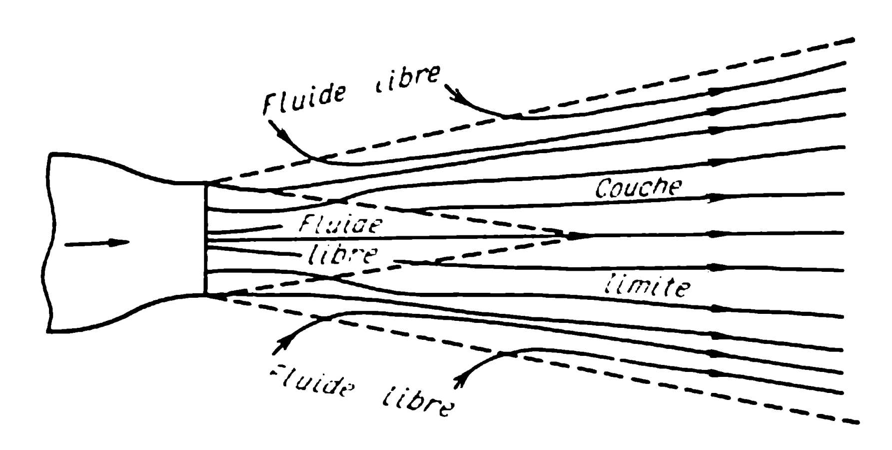


Fig. XI.2

formées sur les parois. En aval de cette section, il n'y aura ni fluide libre, ni couche limite; c'est la région du mouvement permanent de fluide visqueux pour le calcul duquel on doit utiliser les méthodes générales de la dynamique du fluide visqueux. Les méthodes de la

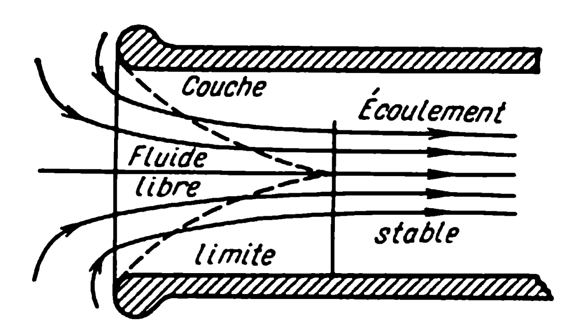


Fig. XI.3

théorie de la couche limite ne sont évidemment applicables qu'aux tronçons initiaux. Et de plus, comme il est facile de s'en assurer, au fur et à mesure de l'élargissement de la couche limite, le mouvement dans le fluide libre doit changer. Ainsi, le tronçon initial nous sert d'un exemple simple de l'interaction notable de la couche limite et du fluide libre.

Pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds de l'écoulement, l'épaisseur de la couche limite est très petite par rapport à la

dimension longitudinale caractéristique de l'écoulement. Ainsi, par exemple, l'épaisseur maximale de la couche limite sur le bord arrière d'une aile d'avion ne dépasse pas quelques centimètres. Des couches limites relativement épaisses se forment autour des carènes de navires dont la longueur atteint cent mètres et plus; l'épaisseur de la couche limite près de la poupe peut atteindre 50 centimètres et même plus.

La notion de la couche limite impose l'introduction de l'évaluation quantitative de son épaisseur. A cet effet on utilise trois grandeurs: épaisseur de la couche limite δ; épaisseur de refoulement δ^*; épaisseur de la perte d'impulsion δ^{**}.

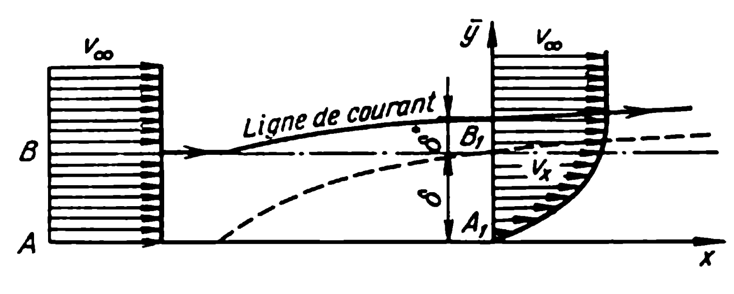


Fig. XI.4

La notion d'épaisseur de la couche limite est conventionnelle et malgré son évidence physique est au fond indéterminée. Pour l'épaisseur de la couche limite on prend la distance de la surface du corps pour laquelle la vitesse d'écoulement dans la couche limite atteint 99,5 % de la vitesse d'écoulement potentiel du fluide libre. Comme la zone réelle de l'influence de la viscosité se propage de la surface du corps asymptotiquement, alors, si l'on prend au moins 99.0 % au lieu de 99,5 %, la valeur absolue de l'épaisseur de la couche limite diminuera sensiblement. Dans les études expérimentales, la précision adoptée pour la détermination de l'épaisseur δ correspond aux limites de la précision de la mesure des vitesses dans l'écoulement. On doit remarquer que la frontière extérieure de la couche limite, suivant la définition adoptée de l'épaisseur δ, n'est pas une ligne de courant de l'écoulement et sert seulement de limite conventionnelle de la zone d'influence de la viscosité.

La notion d'épaisseur de refoulement est liée au calcul de la déviation de la ligne de courant du fluide libre sous l'action de la couche limite. Comparons les débits de fluide à travers les sections AB et A_1B_1 dans un écoulement de fluide visqueux le long d'une plaque plane.

Sur la fig. XI.4 on voit que $Q_{AB} > Q_{A_1B_1}$, c'est-à-dire que la droite BB_1, à la différence d'un fluide non visqueux, n'est pas une ligne de courant; pour trouver la déviation de la ligne de courant δ^* sous l'influence de la couche limite, exigeons l'égalité des débits,

c'est-à-dire écrivons que

$$Q_{AB}=Q_{A_1B_1}+v_\infty\delta^*. \qquad \text{(XI.1)}$$

Il est évident que

$$Q_{AB}=v_\infty\delta=v_\infty\int_0^\delta dy,$$

et

$$Q_{A_1B_1}=\int_0^\delta v_x\,dy.$$

En substituant les expressions de ces débits dans la formule (XI.1) nous obtenons

$$v_\infty\delta=\int_0^\delta v_x\,dy+v_\infty\delta^*,$$

d'où

$$\delta^*=\int_0^{\delta,\,\infty}\left(1-\frac{v_x}{v_\infty}\right)dy. \qquad \text{(XI.2)}$$

Il est facile de voir que dans la limite supérieure de cette intégrale on peut à la place de δ écrire l'infini, puisque pratiquement cela ne se répercute pas sur sa valeur, car en dehors de la couche limite la fonction sous le signe somme est égale à zéro. De cette façon, en déterminant l'épaisseur de refoulement, on peut ne pas utiliser la notion d'épaisseur de la couche limite. D'après ce qui a été exposé, on voit que δ^* caractérise la déviation des lignes de courant du fluide libre par rapport aux lignes de courant dans un fluide parfait, provoqué par l'action de la couche limite. Notons que la valeur totale de cette déviation n'est atteinte que pour les lignes de courant disposées au voisinage de la frontière extérieure de la couche limite; la ligne de courant nulle, confondue avec la surface du corps, ne change pas sa position.

L'épaisseur de la perte d'impulsion δ^{**} définie par la relation

$$\delta^{**}=\int_0^{\delta,\,\infty}\frac{v_x}{v_\infty}\left(1-\frac{v_x}{v_\infty}\right)dy, \qquad \text{(XI.3)}$$

comme il sera montré plus loin, caractérise la perte de la quantité de mouvement nécessaire pour surmonter les forces de frottement à l'intérieur de la couche limite. Lors de son calcul, on peut prendre pour la limite supérieure, comme dans le cas précédent, soit δ, soit l'infini. Si la pression le long de la couche limite n'est pas constante, alors la vitesse v_∞ dans (XI.2) et (XI.3) doit être remplacée par

la valeur de v sur sa frontière extérieure dans la section correspondante.

La couche limite, dans l'étude de laquelle l'influence de la viscosité est considérée comme asymptotiquement propagée depuis la surface du corps dans le fluide, sera dite couche limite asymptotique ; ses caractéristiques sont δ^* et δ^{**}. La couche limite, en dehors de laquelle on suppose conventionnellement l'absence totale des forces de la viscosité, est caractérisée par l'épaisseur δ et s'appelle couche limite d'épaisseur finie ; pour lier entre elles les deux notions de la couche limite, il faut établir la liaison entre les grandeurs δ, δ^* et δ^{**}.

A l'intérieur de la couche limite, indépendamment de la structure du fluide libre, peut exister un régime d'écoulement laminaire ou turbulent. Le passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent dans la couche limite a lieu quand le nombre Re atteint sa valeur critique, celui s'accompagne de la perte de stabilité de l'écoulement laminaire. Le nombre Re dans le cas de la couche limite peut se calculer sous la forme $\mathrm{Re}_\delta = v\delta/\nu$, $\mathrm{Re}^* = v\delta^*/\nu$ ou $\mathrm{Re}^{**} = v\delta^{**}/\nu$, où v est la vitesse sur la frontière extérieure de la couche limite.

Par suite, on distingue les couches limites laminaire et turbulente ; à chaque régime d'écoulement dans la couche correspondent ses lois de la distribution des vitesses. Comme l'épaisseur de la couche limite augmente de l'extrémité avant vers la poupe du corps, même pour une valeur constante de la vitesse d'écoulement sur sa frontière extérieure le nombre Re le long de la couche a une valeur variable. Plus compliquée est la couche limite mixte, quand dans la partie avant du corps par suite de la petitesse du nombre Re elle est laminaire et à partir de la fin d'une certaine région le long de la surface du corps, qui s'appelle région transitoire, elle devient turbulente.

Comme la valeur de la pression dans la couche limite est déterminée par le mouvement du fluide libre, dans le cas de l'écoulement autour d'une surface curviligne la pression le long de la couche limite ne sera pas constante et ce n'est que dans le cas particulier de la plaque plane disposée le long de l'écoulement que la chute de pression longitudinale sera nulle. L'existence de la chute de pression longitudinale, surtout si sa valeur est grande. peut provoquer le décollement de la couche limite.

Lors du mouvement dans la couche limite de l'extrémité avant du corps vers son maître couple, le fluide se déplace de la zone de haute pression vers la zone de pression plus basse, c'est-à-dire avec une accélération positive. Au-delà du point de minimum de l'épure de la pression le mouvement des particules de fluide s'effectue avec une accélération négative vers le côté de la pression croissante, leur énergie cinétique se transformant partiellement en énergie

potentielle de pression; en même temps les particules dépensent une partie de leur énergie cinétique pour surmonter les forces de frottement. Par suite, à une certaine distance de l'extrémité avant, derrière le point de minimum de la pression l'énergie cinétique des particules de fluide au voisinage de la paroi, c'est-à-dire dans la zone d'action des plus grandes forces de viscosité, sera nulle et l'épure de la vitesse dans cette section de la couche limite sera tangente à la normale à la surface du corps et en ce point $\partial v_x/\partial n = 0$.

A l'arrière de ce point, sous l'influence de la chute de pression dans la partie aval du corps, il se forme un écoulement inverse du

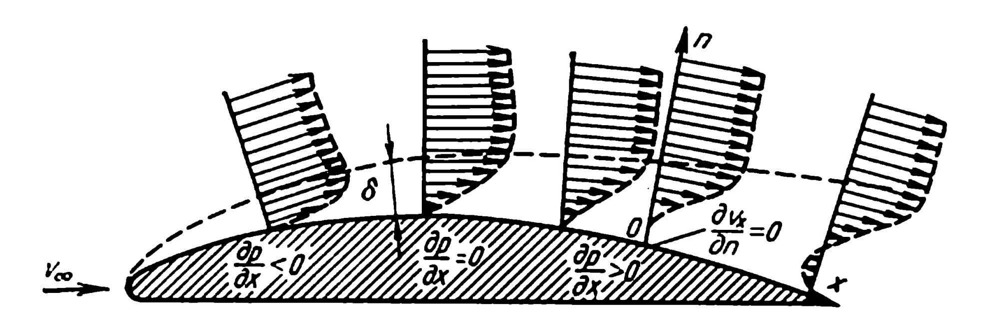


Fig. XI.5

fluide, qui repousse la couche limite de la paroi, comme il est montré sur la fig. XI.5. La surface de séparation des écoulements avec différentes directions des vitesses est instable et se détruit après formation de tourbillons.

Le point o où $\partial v_x/\partial n = 0$, c'est-à-dire $\tau_0 = 0$, est le point de décollement de la couche limite, c'est-à-dire le point visible du détachement des tourbillons. La position du point de décollement dépend du régime d'écoulement du fluide au sein de la couche limite.

Dans l'écoulement longitudinal autour d'une plaque plane mince le long de laquelle la pression dans l'écoulement est constante, le décollement de la couche limite n'a pas lieu. Le phénomène de décollement de la couche limite ne s'observe pas également sur les corps avec un faible rapport de l'épaisseur à la longueur; de tels corps sont dits bien profilés.

§ 63. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX DANS LA COUCHE LIMITE

Les particularités énoncées de la couche limite et en particulier la petitesse de son épaisseur pour les grands nombres Re permettent d'indiquer le moyen de simplifier les équations de Navier-Stokes (VIII.12) pour la zone de la couche limite. On doit noter que pour les grands nombres Re, le rapport des forces de viscosité aux forces d'inertie dans un écoulement est extrêmement petit. Pour cette

raison, en première approximation, on pourrait, paraît-il, dans les équations de Navier-Stokes rejeter les termes qui tiennent compte des forces de viscosité.

Cependant, du point de vue mathématique, une telle opération est inadmissible, car les termes qui tiennent compte des forces de viscosité renferment les dérivées secondes des vitesses de l'écoulement par rapport aux coordonnées. L'élimination de ces dérivées change l'ordre de l'équation différentielle et par conséquent exclut la possibilité de satisfaire à un nombre indispensable de conditions aux limites, en particulier à la condition d'adhérence du fluide aux parois solides. Par suite, lors des simplifications ultérieures des équations du mouvement, il faut évaluer l'ordre de leurs termes séparés et ne rejeter que ceux d'entre eux qui peuvent être considérés comme suffisamment petits.

Etudions les équations d'un écoulement plan permanent de fluide visqueux établies pour des surpressions hydrodynamiques

$$\left.\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right);\\ v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right);\\ \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (XI.4)$$

Nous admettrons la courbure de la surface du corps petite et donc l'axe des x coïncidant avec la surface du corps et l'axe des y normal à la surface.

Passons maintenant à l'évaluation de l'ordre de grandeur de différents termes dans les équations (XI.4) en se guidant par l'énoncé adopté par N. Fabricant. Comptons que les abscisses x sont des grandeurs de même ordre que la dimension caractéristique L (par exemple la longueur) du corps; les ordonnées y des grandeurs de même ordre que l'épaisseur de la couche limite δ parce qu'elles varient de 0 à δ; les composantes de la vitesse le long du contour baigné v_x, des grandeurs du même ordre que la vitesse de l'écoulement à l'infini v_∞. Les autres grandeurs dans les équations (XI.4) peuvent être exprimées au moyen des grandeurs mentionnées.

Examinons d'abord la première des équations (XI.4): la dérivée $\partial v_x/\partial x$ représente une grandeur de l'ordre de v_∞/L et, par conséquent, le premier terme du premier membre est du même ordre de grandeur que v_∞^2/L. Pour pouvoir juger de la valeur de la composante de la vitesse v_y, reportons-nous à l'équation de continuité du mouvement. Le premier terme de son premier membre est une grandeur de l'ordre de v_∞/L; par conséquent, le second terme doit être aussi du même ordre, car autrement la somme de ces termes ne sera pas nulle; ainsi $\partial v_y/\partial y \sim v_\infty/L$. La grandeur v_y peut maintenant être

exprimée en fonction de $\partial v_y/\partial y$ à l'aide de la relation

$$v_y = \int_0^y \frac{\partial v_y}{\partial y} dy.$$

Suivant le théorème de la moyenne, nous obtenons

$$v_y = \left(\frac{\partial v_y}{dy}\right)_{\text{moy}} \int_0^y dy = \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_{\text{moy}} y \sim \frac{v_\infty}{L} \delta.$$

Etant donné que

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{v_\infty}{\delta},$$

le second terme dans le premier membre de la première des équations (XI.4) est aussi une grandeur de l'ordre de v_∞^2/L. Ainsi, dans le premier membre de l'égalité examinée, les deux termes sont des grandeurs du même ordre.

Passons maintenant au deuxième membre de la première équation du système (XI.4) et examinons l'expression entre parenthèses. Ici le premier terme peut être représenté sous la forme

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right).$$

Mais comme $\partial v_x/\partial x \sim v_\infty/L$, alors $\partial^2 v_x/\partial x^2 \sim v_\infty/L^2$. Analogiquement, nous trouvons l'ordre de grandeur du second terme

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{v_\infty}{\delta^2}.$$

Maintenant on voit que les termes entre parenthèses sont des grandeurs d'ordre différent: le premier terme est une grandeur finie et le second terme une grandeur importante de l'ordre de $1/\delta^2$. De ce fait, le premier terme peut être négligé par rapport au second, et donc les forces de viscosité seront caractérisées par un seul terme $\nu (\partial^2 v_x/\partial y^2)$ qui est proportionnel à $\nu v_\infty/\delta^2$.

Remarquons que bien que le coefficient cinématique de la viscosité du fluide donné soit une grandeur petite, le terme qui caractérise les forces de viscosité doit tout de même être dans la couche limite une grandeur de même ordre que l'accélération convective.

En partant de ce fait, on peut faire une conclusion sur l'épaisseur de la couche limite. Etant donné que l'accélération convective, proportionnelle à v_∞^2/L, et le terme caractérisant les forces de viscosité, proportionnel à $\nu v_\infty/\delta^2$, sont des grandeurs de même ordre, on peut écrire

$$\frac{v_\infty^2}{L} \sim \nu \frac{v_\infty}{\delta^2},$$

d'où

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{v_\infty}}. \tag{XI.5}$$

Parfois, au lieu de l'épaisseur de la couche limite δ, on considère la grandeur sans dimensions $\frac{\delta}{L}$ qui s'appelle épaisseur relative de la couche limite. De (XI.5), il suit que

$$\frac{\delta}{L} \sim \sqrt{\frac{\nu}{v_\infty L}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}.$$

où le nombre Re est calculé suivant la longueur L.

Ainsi, l'épaisseur de la couche limite sera d'autant plus grande que le coefficient cinématique de la viscosité du fluide et les dimensions du corps seront plus grands et d'autant plus petite que la vitesse à l'infini sera plus grande; l'épaisseur relative de la couche limite sera d'autant plus petite que le nombre Re sera plus grand.

Quant au terme $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$, il ne contient ni le coefficient cinématique de la viscosité ν, ni l'épaisseur de la couche limite δ et est une grandeur finie.

Ainsi, dans la première des équations (XI.4) on ne peut négliger qu'un seul terme, après quoi elle prend la forme suivante

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Examinons maintenant la seconde équation du système (XI.4). Etant donné que

$$v_y \sim \frac{v_\infty}{L}\delta; \quad v_x \sim v_\infty; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \frac{v_\infty}{L^2}\delta; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{v_\infty}{L},$$

alors

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \frac{v_\infty^2}{L^2}\delta; \quad v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{v_\infty^2}{L^2}\delta.$$

De cette façon, le premier membre de cette équation représente une grandeur proportionnelle à δ. Adressons-nous au deuxième membre et examinons l'expression entre parenthèses. Il est facile de voir que

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \sim \frac{v_\infty}{L^3}\delta;$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \sim \frac{v_\infty}{L\delta},$$

et pour cela on peut négliger le premier de ces termes par rapport au second. L'action des forces de viscosité s'exprime donc par l'expres-

sion $\nu \partial^2 v_y / \partial y^2$. Pour évaluer l'ordre de sa grandeur, remarquons que, comme cela découle de la relation (XI.5),

$$\nu \sim \frac{v_\infty}{L} \delta^2,$$

c'est pourquoi

$$\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \sim \frac{v_\infty^2}{L^2} \delta,$$

c'est-à-dire représente une grandeur de même ordre que l'expression du premier membre de l'équation.

L'équation examinée permet de faire une conclusion sur l'ordre de la grandeur de $\partial p / \partial y$. Comme les accélérations des forces d'inertie et de la force de viscosité sont proportionnelles à $v_\infty^2 \delta / L^2$, il résulte de l'équation que

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{v_\infty^2}{L^2} \delta.$$

Si l'on trace en un point quelconque du contour d'un corps baigné une normale à sa surface et on choisit sur celle-ci deux points: l'un sur la surface du corps et l'autre à une distance y de la surface, alors en vertu de la relation précédente on peut obtenir la différence de pressions entre ces points

$$p_2 - p_1 = \int_0^y \frac{\partial p}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{\text{moy}} \int_0^y dy = \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{\text{moy}} y \sim \frac{v_\infty^2}{L^2} \delta^2.$$

Ainsi, la variation de la pression suivant une normale au contour du corps à l'intérieur de la couche limite représente une grandeur petite de l'ordre de $(\delta/L)^2$. Dans la plupart des cas pratiquement importants, on peut négliger cette grandeur par suite de la petitesse de δ par rapport à L et, par conséquent, considérer que $p_2 - p_1 = 0$, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Ceci montre que dans la couche limite p ne dépend pas de y. La conclusion faite est une des plus remarquables conclusions établies dans la théorie de la couche limite. C'est justement cette propriété de la couche limite qui permet d'expliquer la cause d'une concordance assez exacte des données expérimentales sur la mesure de la distribution des vitesses avec les calculs effectués sur la base de la théorie de l'écoulement potentiel. Le fait est que, en calculant le champ des vitesses d'un écoulement potentiel, on peut obtenir seulement la distribution des vitesses en dehors de la couche limite, parce qu'au sein de la couche le mouvement est turbulent. Cependant, on sait que pour les corps bien profilés, sur presque toute l'étendue de la surface

du corps, la distribution de pressions calculée théoriquement correspond parfaitement à la distribution de pressions trouvée expérimentalement. Ce fait ne peut être expliqué que si l'on tient compte de ce que dans la couche limite la pression ne varie pas suivant la normale à la surface du corps.

La seconde des équations du système (XI.4) peut donc être intégrée pour la couche limite sous sa forme générale. L'égalité $p=\text{const}$ en tous les points d'une même normale à la surface du corps peut être considérée comme l'intégrale générale de cette équation, déterminant l'une des inconnues, à savoir, la pression p. Il est vrai que la pression p comme fonction de x n'est pas déterminée par cette intégrale. Elle doit être obtenue par le calcul de l'écoulement extérieur du fluide libre parfait.

Des deux équations du mouvement de fluide (XI.4) il ne reste plus que la première, dans laquelle on peut effectuer, outre les simplifications déjà examinées, le remplacement de $\partial p/\partial x$ par dp/dx, car dans la couche limite p ne dépend pas de y. En y ajoutant l'équation de continuité, nous obtenons un système de deux équations différentielles pour deux inconnues v_x et v_y

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}+\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \qquad \text{(XI.6)}$$

Ce système d'équations du mouvement de fluide dans une couche limite laminaire plane a été proposé par Prandtl en 1904. En différentiant l'intégrale d'Euler (IV.22), nous obtenons pour le fluide libre dans l'écoulement permanent

$$\frac{dp}{dx}=-\rho v \frac{dv}{dx}, \qquad \text{(XI.7)}$$

où v est la vitesse de l'écoulement sur la frontière extérieure de la couche limite.

En substituant dp/dx dans l'équation (XI.6), nous écrivons la première équation du système sous la forme

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}=v \frac{dv}{dx}+\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \qquad \text{(XI.8)}$$

Pour l'intégration du système d'équations (XI.6), il est indispensable d'observer les conditions aux limites suivantes:

1) la condition d'adhérence du fluide sur la surface du corps, c'est-à-dire pour $y=0$,

$$v_x=v_y=0;$$

2) la condition à un grand éloignement du corps, pour $y \to \infty$

$$v_x=v.$$

Les simplifications analogues des équations du mouvement pour des grands nombres Re sont possibles également dans le cas de l'étude des écoulements à trois dimensions.

Si la courbure de la surface du corps est très grande, c'est-à-dire le rayon de courbure est petit par rapport aux dimensions du corps, alors on ne peut pas considérer comme constante la pression en travers de la couche limite; par conséquent, au voisinage des sommets des angles aigus les équations (XI.6) deviennent inutilisables. Les équations obtenues, dont la première est toujours non linéaire, sont plus simples que les équations ordinaires de Navier-Stokes et leur solution est possible dans de nombreux cas.

L'intégration du système d'équations (XI.6) peut être ramenée à l'intégration d'une seule équation, si l'on tient compte de ce que pour les écoulements plans il existe une fonction de courant de l'écoulement $\psi(x; y)$. Les projections de la vitesse de l'écoulement s'obtiennent des relations (III.60)

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

la prise en compte de ces relations permettant de réduire le système d'équations (XI.6) à une seule équation

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = v\frac{dv}{dx} + \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \qquad \text{(XI.9)}$$

et les conditions aux limites seront alors:

1) sur la surface du corps, pour $y = 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0;$$

2) pour $y \to \infty$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v.$$

§ 64. ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE PLAQUE PLANE PARALLÈLE À LA VITESSE À L'INFINI

A titre d'exemple de l'empoi des équations de Prandtl, examinons le problème de la couche limite laminaire le long d'une plaque mince d'envergure infinie, dont l'axe est parallèle à v_∞ et la longueur est infinie.

Etant donné que la résistance d'une telle plaque n'est due qu'aux contraintes tangentielles, elle peut être considérée comme un corps parfaitement profilé. Pour cette raison les résultats du calcul de la résitance d'une telle plaque peuvent en première approximation être utilisés pour l'évaluation de la résistance d'autres corps bien profilés, par exemple des ailes de grande envergure avec de faibles angles d'attaque.

Dans le cas examiné, la vitesse de l'écoulement potentiel du fluide libre est partout constante, la chute de pression n'a pas lieu et, par conséquent, $dv/dx = 0$. Pour résoudre le problème, il faut intégrer les équations du mouvement dans la couche limite (XI.6) en tenant compte des conditions aux limites

$$v_x = v_\infty \quad \text{pour} \quad y \to \infty;$$
$$v_x = v_y = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \text{ et } x > 0.$$

Nous allons résoudre le problème par rapport à la fonction de courant ψ, c'est-à-dire nous examinerons l'équation (XI.9)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \tag{XI.10}$$

Suivant la relation (XI.5) $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{v_\infty}}$. De plus, tenant compte de ce que $x \sim L$ et $y \sim \delta$, on peut écrire que

$$y \sim \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}. \tag{XI.11}$$

Introduisons dans l'expression (XI.11) le coefficient de proportionnalité sans dimensions entre y et $\sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}$, en le désignant par η. Dans ce cas

$$\eta = y\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}.$$

En prenant η pour une nouvelle variable indépendante, nous chercherons la solution de v_x sous la forme de la fonction d'une seule variable η

$$v_x = v_\infty \varphi'(\eta), \tag{XI.12}$$

où par le signe « prime » est désignée la dérivée par rapport à η.

Trouvons l'expression pour la fonction de courant en tenant compte que

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Dans le cas donné

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_\infty \varphi'(\eta) = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}, \tag{XI.13}$$

d'où

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \sqrt{v_\infty \nu x}\, \varphi'(\eta).$$

De cette façon, à une constante arbitraire près

$$\psi = \sqrt{v_\infty \nu x}\, \varphi(\eta). \tag{XI.14}$$

Exprimons maintenant en fonction de $\varphi(\eta)$ toutes les grandeurs qui font partie de l'équation (XI.10).

De l'égalité (XI.14) on trouve

$$-v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v_\infty \nu}{x}}\, \varphi(\eta) + \sqrt{v_\infty \nu x}\, \varphi'(\eta)\, \frac{\partial \eta}{\partial x} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v_\infty \nu}{x}}\, [\varphi(\eta) - \eta\varphi'(\eta)], \tag{XI.15}$$

étant donné que

$$x\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2}\, y\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = -\frac{1}{2}\,\eta.$$

D'une façon analogue nous obtenons

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = v_\infty \sqrt{\dfrac{v_\infty}{\nu x}}\, \varphi''(\eta); \quad \dfrac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \dfrac{v_\infty^2}{\nu x}\, \varphi'''(\eta); \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{v_\infty}{x}\, \eta\varphi''(\eta). \end{array}\right\} \tag{XI.16}$$

Après substitution des expressions (XI.13), (XI.15) et (XI.16) dans l'équation (XI.10), nous obtenons

$$-\frac{v_\infty^2}{2x}\, \eta\varphi'(\eta)\, \varphi''(\eta) + \frac{v_\infty^2}{2x}\, \varphi''(\eta)\, [\eta\varphi'(\eta) - \varphi(\eta)] = \frac{v_\infty^2}{x}\, \varphi'''(\eta).$$

En effectuant la simplification, nous obtenons une équation différentielle ordinaire non linéaire

$$2\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0. \tag{XI.17}$$

Ainsi, on s'assure de la validité de l'hypothèse suivant laquelle pour la vitesse longitudinale v_x il existe une solution sous la forme de la fonction d'une seule variable η.

L'équation (XI.17), établie par Blasius, doit être intégrée avec les conditions aux limites suivantes:

$$\left.\begin{array}{r} \varphi = 0; \quad \varphi' = 0 \text{ pour } \eta = 0; \\ \varphi' \to 1 \text{ pour } \eta \to \infty. \end{array}\right\} \tag{XI.18}$$

Blasius a intégré l'équation (XI.17) au moyen des séries entières pour de faibles valeurs de η et d'une expression asymptotique pour de grands η. Ultérieurement, cette équation a été intégrée avec une meilleure précision par des méthodes numériques. Dans le tableau 1 sont données les valeurs de la fonction $\varphi(\eta)$ et de ses deux dérivées.

Tableau 1

η	φ	$\varphi' = \frac{v_x}{v_\infty}$	φ''	η	φ	$\varphi' = \frac{v_x}{v_\infty}$	φ''
0	0	0	0,33206	4,4	2,69238	0,97587	0,03897
0,2	0,00664	0,06641	0,33199	4,6	2,88826	0,98269	0,02948
0,4	0,02656	0,13277	0,33147	4,8	3,08534	0,98779	0,02187
0,6	0,05974	0,19894	0,33008	5,0	3,28329	0,99155	0,01591
0,8	0,10611	0,26471	0,32739	5,2	3,48189	0,99425	0,01134
1,0	0,16557	0,32979	0,32301	5,4	3,68094	0,99616	0,00793
1,2	0,23795	0,39378	0,31659	5,6	3,88031	0,99748	0,00543
1,4	0,32298	0,45627	0,30787	5,8	4,07990	0,99838	0,00365
1,6	0,42032	0,51676	0,29667	6,0	4,27964	0,99898	0,00240
1,8	0,52952	0,57477	0,28293	6,2	4,47948	0,99937	0,00155
2,0	0,65003	0,62977	0,26675	6,4	4,67938	0,99961	0,00098
2,2	0,78120	0,68132	0,24835	6,6	4,87931	0,99977	0,00061
2,4	0,92230	0,72899	0,22809	6,8	5,07928	0,99987	0,00037
2,6	1,07252	0,77246	0,20646	7,0	5,27926	0,99992	0,00022
2,8	1,23099	0,81152	0,18401	7,2	5,47925	0,99996	0,00013
3,0	1,39682	0,84605	0,16136	7,4	5,67924	0,99998	0,00007
3,2	1,56911	0,87609	0,13913	7,6	5,87924	0,99999	0,00004
3,4	1,74696	0,90177	0,11788	7,8	6,07923	1,00000	0,00002
3,6	1,92954	0,92333	0,09809	8,0	6,27923	1,00000	0,00001
3,8	2,11605	0,94112	0,08013	8,2	6,47923	1,00000	0,00001
4,0	2,30576	0,95552	0,06424	8,4	6,67923	1,00000	0,00000
4,2	2,49806	0,96696	0,05052	8,6	6,87923	1,00000	0,00000
4,4	2,69238	0,97587	0,03897	8,8	7,07923	1,00000	0,00000

En utilisant les données de ce tableau et en employant les formules (XI.2) et (XI.3), il est facile de déterminer les relations suivantes pour l'épaisseur de refoulement et l'épaisseur de perte d'impulsion de la couche laminaire le long de la plaque:

$$\left.\begin{aligned} \delta^* &= 1,73\sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}\,; \\ \delta^{**} &= 0,664\sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI.19)}$$

En utilisant la valeur $\varphi''(0) = 0,332$, indiquée dans le tableau 1, nous obtiendrons la formule de Blasius pour la contrainte de frottement

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu v_\infty\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}\,\varphi''(0) = 0,332\sqrt{\frac{\mu\rho v_\infty^3}{x}}\,, \qquad \text{(XI.20)}$$

suivant laquelle la contrainte de frottement sur la surface de la plaque diminue de façon inversement proportionnelle à la racine carrée de la distance de l'extrémité avant de la plaque (fig. XI.6).

En introduisant le coefficient de frottement local

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}},$$

nous trouverons sa dépendance du nombre de Reynolds local $\mathrm{Re}_x = v_\infty x/\nu$

$$c_f = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \qquad \text{(XI.21)}$$

On peut calculer la résistance de frottement du tronçon d'un côté de la plaque dont la longueur est L et la largeur égale à l'unité, en intégrant les contraintes tangentielles suivant la formule

$$R_f = \int_0^L \tau_0\, dx = \left| 0{,}332 \cdot 2 \sqrt{\mu \rho v_\infty^3 x} \right|_0^L = 0{,}664 \sqrt{\mu \rho v_\infty^3 L}.$$

Le coefficient général de frottement sera déterminé par la relation

$$C_f = \frac{R_f}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} L 1} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}}}, \qquad \text{(XI.22)}$$

où

$$\mathrm{Re} = \frac{v_\infty L}{\nu}.$$

Les valeurs de C_f calculées d'après la formule (XI.22) concordent bien avec les résultats des essais sur les plaques planes minces pour les nombres $\mathrm{Re} < 2{,}5 \cdot 10^6$. Cette formule est utilisée dans les calculs techniques de la couche limite laminaire. Les valeurs de τ_0 sur l'extrémité avant de la plaque tendent, suivant (XI.20), à l'infini, car au point donné, en vertu de la solution, la vitesse subit un saut de la valeur v_∞ jusqu'à zéro ; ceci conduit à une discontinuité dans la valeur de la contrainte τ_0.

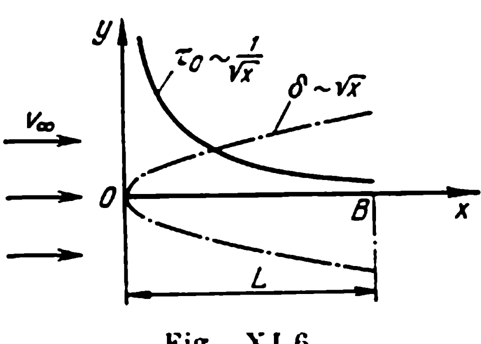


Fig. XI.6

A l'arrière du bord de la plaque B (fig. XI.6), la vitesse le long de l'axe dans la solution donnée est nulle. Ce n'est pas exact et lorsque la longueur de la plaque est insuffisante, cela influe sur la précision de calcul des contraintes tangentielles, car dans un écoulement réel les vitesses en aval de la plaque ne sont pas nulles et augmentent au fur et à mesure qu'on s'éloigne de son bord arrière.

La fig. XI.7 montre le graphique de la distribution des vitesses longitudinales dans les sections de la couche limite de la plaque en

coordonnées sans dimensions v_x/v_∞; η. Sur ce graphique sont portés les points expérimentaux qui concordent bien avec la théorie.

Si l'on entend par l'épaisseur de la couche limite une telle valeur de y pour laquelle la vitesse longitudinale v_x diffère de la vitesse du fluide libre v_∞ d'une petite valeur choisie, alors on peut repré-

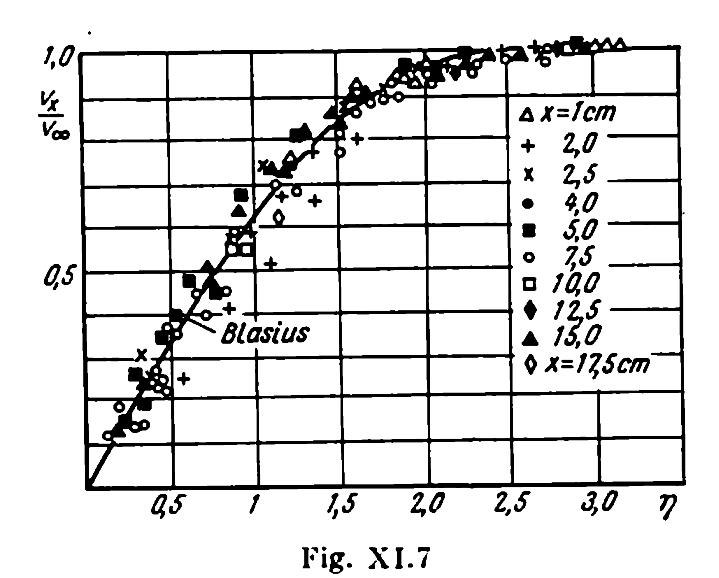


Fig. XI.7

senter approximativement la distribution des vitesses sous la forme exprimant la propriété de similitude

$$\frac{v_x}{v_\infty}=f\left(\frac{y}{\delta}\right). \qquad \text{(XI.23)}$$

En utilisant les données de la troisième colonne du tableau 1, on peut, en se donnant par exemple la valeur de la vitesse v_x qui différera de v_∞ de 0,5 %, déterminer l'épaisseur de la couche limite suivant la formule approchée

$$\delta=5,2\sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}, \qquad \text{(XI.24)}$$

d'où il résulte que l'épaisseur de la couche limite croît le long de la plaque en aval de l'écoulement comme la racine carrée de l'abscisse x (fig. XI.6).

Nous obtenons la dépendance de l'épaisseur de la couche δ du nombre $\mathrm{Re}=\frac{v_\infty L}{\nu}$ en écrivant (XI.24) sous la forme

$$\frac{\delta}{L}=5,2\sqrt{\frac{x}{L}}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}. \qquad \text{(XI.25)}$$

Cette égalité confirme la propriété de la couche limite laminaire: son épaisseur relative dans n'importe quelle section est inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre de Reynolds.

§ 65. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE POUR LES SURFACES AVEC DES CHUTES DE PRESSION LONGITUDINALES

Le principal problème de l'étude de la couche limite en présence d'une chute de pressions longitudinale est le calcul des contraintes tangentielles τ_0 agissant le long de la paroi, ainsi que la détermination du point de décollement de la couche limite.

Il est plus commode de comparer les résultats des calculs avec les résultats des expériences en confrontant la position du point de décollement établie expérimentalement et calculée théoriquement, car la détermination de la position du point de décollement au cours des expériences s'avère plus simple que la mesure des autres caractéristiques de la couche limite.

La distribution des pressions le long de la surface du corps lors de ces calculs doit être connue à l'avance. Elle se détermine soit par des mesures expérimentales au cours des essais sur les modèles, soit par le calcul théorique de l'écoulement autour d'un corps d'un fluide non visqueux. Le second moyen de se donner la distribution de la pression est valable pour les calculs de la couche limite des corps allongés bien profilés pour lesquels l'influence de la viscosité sur l'épure des pressions est moins importante. Dans ces calculs, on entend par l'abscisse x une coordonnée curviligne comptée à partir du point avant critique le long de la surface du corps; le calcul des contours asymétriques par rapport à la vitesse à l'infini doit être effectué séparément pour les côtés supérieur et inférieur.

Etant donné que l'expression analytique de l'épure de la distribution de la pression le long de la surface d'un corps n'est généralement pas connue et l'épure est donnée graphiquement, on est amené à déterminer la grandeur $\frac{dp}{dx} = -\rho v \frac{dv}{dx}$ par différentiation graphique, et les valeurs de la fonction dp/dx sont données sous la forme d'un tableau. Tout cela rend difficile l'intégration des équations différentielles du mouvement de fluide dans la couche limite et diminue la précision des résultats obtenus. Pour parer dans une certaine mesure à ces difficultés, on fait recours à la représentation approchée de la fonction v. A cet effet, il est commode d'employer une série entière

$$v = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \tag{XI.26}$$

dont les coefficients sont choisis d'après les conditions de coïncidence des ordonnées de la courbe $v = f(x)$ avec les valeurs calculées suivant la formule approchée mentionnée.

Cependant, dans ce cas aussi, l'intégration de l'équation (XI.9) est liée à des calculs difficiles et volumineux. De nos jours, ces calculs s'effectuent au moyen des calculatrices électroniques numériques.

De façon approchée la solution cherchée peut être représentée sous la forme d'une série

$$\psi=\psi_1 x+\psi_3 x^3+\psi_5 x^5+\ldots, \qquad \text{(XI.27)}$$

où les coefficients ψ_n sont des fonctions de y. La substitution de ψ et de v dans l'équation (XI.9) et la comparaison des coefficients aux exposants identiques de x donnent un système d'équations différentielles ordinaires par rapport aux fonctions inconnues ψ_n. En soumettant la solution aux conditions aux limites $v_x = v_y = 0$ avec $y = 0$ et $v_x = v$ avec $y \to \infty$, on peut obtenir les fonctions cherchées. On doit remarquer que dans ce cas la similitude des épures sans dimensions de la vitesse dans les différentes sections suivant la longueur de la couche limite ne se conserve pas. Cette méthode exige un grand nombre de calculs, mais en revanche leurs résultats concordent bien avec les données des expériences. Ainsi, par exemple, en utilisant cette méthode pour le calcul de la couche limite le long de la surface d'un cylindre circulaire, on détermine la position du point de décollement pour un angle polaire θ, compté à partir du point avant critique et égal à 82°, ce qui correspond aux données expérimentales.

Le problème plus simple est celui sur la couche limite avec une chute de pression longitudinale, quand la vitesse du fluide libre le long de la surface est donnée sous la forme d'une simple fonction puissance

$$v=cx^m, \qquad \text{(XI.28)}$$

où c et m sont des constantes. Pour $m > 0$ il y a un écoulement accéléré le long de la paroi et pour $m < 0$ ralenti. La loi indiquée de la distribution des vitesses du fluide libre correspond à un écoulement potentiel le long du côté de l'angle égal au sommet à $2\pi m/1+m$.

Cet exemple est un cas particulier parce qu'on ne peut pas admettre m constant le long de la surface curviligne du corps, mais néanmoins son étude présente de l'intérêt, car cela permet d'avoir une représentation des caractéristiques des couches limites pour les différents écoulements de fluide libre.

Les recherches théoriques ont montré que la loi (XI.28) de variation de la vitesse de l'écoulement potentiel du fluide libre est la seule possible qui garantit la conservation de la similitude des épures sans dimensions de la distribution des vitesses dans les différentes sections suivant la longueur de la couche ; l'équation (XI.9) avec cette loi se réduit à une équation différentielle ordinaire.

La résolution s'effectue de façon analogue à celle du problème de l'écoulement autour d'une plaque plane.

Introduisons l'ordonnée transversale sans dimensions

$$\eta=y\sqrt{\frac{v(1+m)}{2\nu x}}, \qquad \text{(XI.29)}$$

qui diffère de l'ordonnée de construction analogue introduite lors de l'étude de l'écoulement autour d'une plaque plane par la présence d'un multiplicateur constant $\sqrt{\frac{1+m}{2}}$.

Si l'on désigne $\beta = \frac{2m}{1+m}$, on peut montrer que $\eta = y\sqrt{\frac{v'}{\nu\beta}}$ où le prime désigne la différentiation suivant x.

Par analogie avec le cas d'écoulement autour d'une plaque

$$\psi = \sqrt{\frac{2m}{1+m} v\nu x}\, \varphi_1(\eta); \tag{XI.30}$$

alors

$$v_x = v\varphi_1'. \tag{XI.31}$$

Après le calcul des dérivées et la simplification, l'équation (XI.9) prend la forme

$$\varphi_1''' + \varphi_1\varphi_1'' = \beta(\varphi_1'^2 - 1), \tag{XI.32}$$

les conditions aux limites étant les suivantes: $\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = 0$; $\varphi_1'(\infty) = 1$.

L'équation (XI.32) pour le cas $m = 0$ devient l'équation pour la plaque plane (XI.17) déjà étudiée; la différence entre les coefficients de φ_1'' s'explique par l'introduction du facteur constant dans la variable η.

L'intégration de cette équation différentielle non linéaire ordinaire en quadratures est impossible; elle a été effectuée par Faulkner et Skan par des méthodes numériques au moyen des calculatrices. Finalement, on obtient [16] les valeurs de la fonction φ_1' ainsi que les valeurs des intégrales et de la dérivée $\varphi_1''(0)$, nécessaires au calcul des grandeurs δ^*, δ^{**} et τ_0:

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu\beta}{v'}} \int_0^\infty (1-\varphi_1')\, d\eta; \quad \delta^{**} = \sqrt{\frac{\nu\beta}{v'}} \int_0^\infty \varphi_1'(1-\varphi_1')\, d\eta$$

et

$$\tau_0 = \mu v \sqrt{\frac{v'}{\nu\beta}}\, \varphi_1''(0).$$

Etant donné que $v' = cmx^{m-1}$, il résulte de ces expressions qu'avec $m = 1$ les grandeurs δ^* et δ^{**} ne dépendent pas de l'abscisse x, c'est-à-dire qu'elles sont constantes le long de l'écoulement et, comme l'ont montré les calculs,

$$\delta^* = 0{,}648\sqrt{\frac{\nu}{c}} \quad \text{et} \quad \delta^{**} = 0{,}292\sqrt{\frac{\nu}{c}}.$$

Le cas particulier de $m = 1$ correspond à l'écoulement au voisinage du point critique $x = 0$ où $v = 0$. Pour $m < 1$, c'est-à-dire dans les écoulements ralentis et modérément accélérés $m - 1 < 0$ et les grandeurs δ^* et δ^{**} augmentent suivant l'écoulement, surtout très intensivement dans les écoulements ralentis, quand $m < 0$. Dans les écoulements fortement accélérés ($m > 1$) la couche limite le long de l'écoulement diminue en épaisseur.

§ 66. ÉQUATION INTÉGRALE DE LA COUCHE LIMITE

Les méthodes d'étude de la couche limite examinées ci-dessus, étant basées sur l'intégration des équations simplifiées du mouvement de fluide, sont liées à de grandes difficultés mathématiques, ce qui les rend peu pratiques pour les calculs techniques. Pour cette raison, il est tout naturel de chercher à créer des méthodes de calcul telles qui étant moins difficiles pourraient assurer la précision requise des résultats finals. La création de telles méthodes se trouve possible si l'on applique à un écoulement à l'intérieur de la couche limite des lois générales de la mécanique du fluide: de la quantité de mouvement, des moments de la quantité de mouvement et le théorème de forces vives. En utilisant ces lois, on peut obtenir la liaison entre les caractéristiques de l'écoulement dans la couche limite et les forces agissantes. Si l'on choisit ensuite de façon approximative la loi de la distribution des vitesses dans la couche limite, alors les équations de liaison, obtenues grâce à l'utilisation des lois citées, permettront d'effectuer le calcul approché des caractéristiques de la couche limite. Une telle méthode est beaucoup plus commode pour l'étude de la couche limite d'épaisseur finie car dans ce cas les calculs initiaux, liés à la déduction des relations correspondantes, sont les plus simples. Cependant, les résultats finals, c'est-à-dire la liaison entre les vitesses et les forces dans la couche limite, peuvent être facilement généralisés de façon que lors de leur utilisation il sera inutile d'introduire la notion de l'épaisseur de la couche limite.

Les plus fréquemment utilisées sont les méthodes approchées de calcul de la couche limite basées sur une équation intégrale obtenue d'après la loi de la quantité de mouvement.

Examinons une couche limite plane d'épaisseur finie le long d'une surface curviligne. Appliquons la loi de la quantité de mouvement à un volume de fluide $ABCD$ (fig. XI.8) contenu entre les deux sections infiniment proches de la couche limite AB et CD avec les abscisses x et $x + dx$, la paroi solide AD et la frontière extérieure de la couche BC. Désignons par m et I respectivement la masse et la projection sur l'axe des x de la quantité de mouvement du fluide

traversant la section AB de la couche

$$m=\int_0^\delta \rho v_x\,dy;\qquad I=\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy.$$

Dans la section CD ces grandeurs seront

$$m+\frac{dm}{dx}dx \quad \text{et} \quad I+\frac{dI}{dx}dx.$$

Alors de la condition de continuité il suit que la masse traversant le tronçon BC de la frontière de la couche par seconde est égale à $dm/dx\,dx$. En tenant compte de ce que sur tout le tronçon BC de la frontière extérieure de la couche on peut admettre, à une erreur de l'ordre supérieur de petitesse, la vitesse égale à v, nous trouvons que la projection sur l'axe des x de la quantité de mouvement à travers la section BC est égale à $v\,dm/dx dx$. Les projections sur l'axe des x des forces extérieures appliquées aux frontières AB, BC, CD et AD de l'élément choisi de volume seront respectivement $p\delta$; $p\frac{d\delta}{dx}dx$; $-\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)\left(\delta+\frac{d\delta}{dx}dx\right)$; $-\tau_0\,dx$.

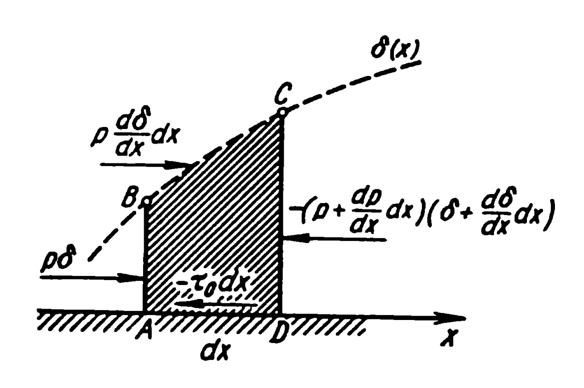


Fig. XI.8

En écrivant que le flux de la quantité de mouvement à travers la surface $ABCD$ est égal à la somme des forces extérieures s'exerçant sur celle-ci, nous obtenons en projection sur l'axe des x

$$\left(I+\frac{dI}{dx}dx\right)-I-v\frac{dm}{dx}dx=$$
$$=p\delta+p\frac{d\delta}{dx}dx-\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)\left(\delta+\frac{d\delta}{dx}dx\right)-\tau_0\,dx$$

ou, en rejetant les petites grandeurs de second ordre et en divisant après cela les deux membres par dx,

$$\frac{dI}{dx}-v\frac{dm}{dx}=-\frac{dp}{dx}\delta-\tau_0.$$

En y substituant les expressions des grandeurs m et I, nous trouvons

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy-v\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x\,dy=-\frac{dp}{dx}\delta-\tau_0. \qquad \text{(XI.33)}$$

Cette égalité s'appelle équation des impulsions ou équation intégrale de Kármàn pour un écoulement plan dans la couche limite. Etant donné que lors de sa déduction il n'a été fait aucune hypothèse sur la nature de la contrainte tangentielle, on peut utiliser cette égalité pour n'importe quel régime d'écoulement dans la couche limite, laminaire ou turbulent; la valeur dp/dx dans la relation (XI.33) est supposée connue à l'avance et s'exprime en fonction de la vitesse v de l'écoulement potentiel en dehors de la couche limite par la formule (XI.7)

L'inconvénient de cette forme d'expression de l'équation intégrale réside en ce qu'elle contient comme paramètre inconnu l'épaisseur de la couche limite δ. En introduisant les caractéristiques généralisées δ^* et δ^{**}, on peut écrire l'équation intégrale de la couche limite asymptotique.

Transformons l'équation intégrale (XI.33) en y remplaçant la quantité dp/dx suivant (XI.7).

$$-\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy + v\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x\,dy + \rho v\frac{dv}{dx}\delta =$$

$$=\frac{d}{dx}\left(v\int_0^\delta \rho v_x\,dy\right) - \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy - \frac{dv}{dx}\int_0^\delta \rho v_x\,dy + \frac{dv}{dx}\int_0^\delta \rho v\,dy =$$

$$=\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x(v-v_x)\,dy + \frac{dv}{dx}\int_0^\delta \rho(v-v_x)\,dy = \tau_0.$$

Introduisons ici l'épaisseur de la perte d'impulsion δ^{**} et l'épaisseur de refoulement δ^* qui, suivant (XI.3) et (XI.2), sont liées avec les intégrales du premier membre de l'équation par les relations

$$\left.\begin{aligned} v^2\delta^{**} &= \int_0^\delta v_x(v-v_x)\,dy\,; \\ v\delta^* &= \int_0^\delta (v-v_x)\,dy. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI.34)}$$

En définitive, nous avons

$$\frac{d}{dx}(\rho v^2\delta^{**}) + \frac{dv}{dx}\rho v\delta^* = \tau_0, \qquad \text{(XI.35)}$$

d'où, après calcul de la dérivée et réduction de cette équation à la forme sans dimensions, nous aurons

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{dv}{dx}\frac{\delta^{**}}{v}\left(2+\frac{\delta^*}{\delta^{**}}\right) = \frac{\tau_0}{\rho v^2}\,. \qquad \text{(XI.36)}$$

Sous cette forme sans dimensions, l'équation intégrale peut être utilisée pour l'étude de la couche limite asymptotique, car le calcul des termes qu'elle renferme n'exige plus l'introduction de la notion de la couche d'épaisseur finie.

En calculant la couche limite d'après l'équation intégrale (XI.33) ou (XI.36), on doit connaître à l'avance la loi de la distribution des vitesses en travers de la couche limite; en particulier. elle peut être donnée approximativement sous la forme de la fonction d'un paramètre caractéristique quelconque qui lie l'influence de la forme du corps à une certaine caractéristique de la couche limite. Alors la relation intégrale permettra d'obtenir l'équation pour la détermination de ce paramètre en des différents points le long de la surface du corps. Les lois de la distribution des vitesses, exprimées au moyen d'un paramètre approprié, sont dites paramétriques.

Pour définir la loi de la distribution des vitesses en travers de la couche, on doit utiliser les conditions aux limites, auxquelles cette loi doit satisfaire sur la paroi et sur la frontière extérieure de la couche.

En particulier, pour $y = 0$ sur la paroi est remplie la condition d'adhérence du fluide, où $v_x = v_y = 0$; de plus, au moyen de l'équation du mouvement de fluide dans la couche limite (XI.8) nous trouvons qu'avec $y = 0$ a lieu la relation

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -v \frac{dv}{dx} . \qquad \text{(XI.37)}$$

Sur la frontière extérieure de la couche, où $y = \delta$, $v_x = v$; en outre, étant donné que $\tau = 0$, $\partial v_x/\partial y = 0$ et alors suivant l'équation (XI.8)

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0.$$

En cas de nécessité on peut exiger que les dérivées d'ordres supérieurs de la vitesse par rapport à la coordonnée y soient également nulles sur la frontière extérieure.

L'équation intégrale a la forme la plus simple dans le cas de la plaque plane placée parallèlement à la vitesse à l'infini. Dans ce cas $v = v_\infty$ de façon constante et la relation (XI.36) s'écrit ainsi:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} . \qquad \text{(XI.38)}$$

En calculant la résistance de frottement d'un côté de la plaque suivant la formule

$$R_f = \int_0^l \tau_0 \, dx$$

et en y substituant τ_0 suivant (XI.38), nous obtenons

$$R_f = \rho v_\infty^2 \delta_L^{**}, \qquad \text{(XI.39)}$$

où δ_L^{**} est l'épaisseur de la perte d'impulsion calculée sur le bord arrière de la plaque.

Cette formule explique l'origine du terme de l'épaisseur de la perte d'impulsion; en effet, δ^{**} est l'épaisseur à laquelle est proportionnelle la perte de la quantité de mouvement au deuxième membre de l'égalité (XI.39) dépensée pour surmonter les forces de frottement du fluide le long de la surface de la plaque.

En comparant la relation (XI.39) avec la formule générale de la théorie de similitude

$$R_f = C_f \frac{\rho v_\infty^2}{2} L,$$

nous trouvons que le coefficient de la résistance de frottement de la plaque peut être calculé au moyen de la formule simple

$$C_f = \frac{2\delta_L^{**}}{L}. \qquad \text{(XI.40)}$$

Le calcul de la résistance de frottement des corps à surface curviligne d'après cette formule est impossible.

Des calculs, analogues aux précédents, permettent d'obtenir l'équation intégrale sous la forme sans dimensions également pour le cas de l'écoulement longitudinal autour d'un corps de révolution. Si pour les coordonnées on prend l'abscisse de la section méridienne et l'ordonnée y comptée suivant la normale à la surface du corps dont l'équation du contour est donnée sous la forme $r_0(x)$, alors on peut écrire

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta v_x^2 r\, dy - \rho v \frac{d}{dx} \int_0^\delta v_x r\, dy = -\frac{dp}{dx} \int_0^\delta r\, dy - \tau_0 r, \qquad \text{(XI.41)}$$

où $r = r_0 + y \cos\theta$ et θ est l'angle formé par la tangente au contour du corps et son axe.

Pour les corps allongés, pour lesquels l'épaisseur de la couche limite est faible par rapport à r_0, c'est-à-dire $y \ll r$, nous obtenons

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{v'\delta^{**}}{v}\left(2 + \frac{\delta^*}{\delta^{**}}\right) + \frac{r_0'}{r_0}\delta^{**} = \frac{\tau_0}{\rho v^2}, \qquad \text{(XI.42)}$$

où δ^* et δ^{**} se déterminent toujours par les formules (XI.2) et (XI.3) et $r_0' = dr_0/dx$.

§ 67. MÉTHODE DE CALCUL APPROCHÉ DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE DANS LE CAS DE LA LOI PARAMÉTRIQUE DE LA DISTRIBUTION DES VITESSES

Parmi les méthodes de calcul approché des caractéristiques de la couche limite le long des surfaces curvilignes, les plus commodes sont celles qui utilisent pour dimension caractéristique non pas l'épaisseur de la couche limite, mais les caractéristiques intégrales δ^* et δ^{**}. Pour le calcul de la couche, il faut dans ce cas déterminer les grandeurs δ^* et δ^{**} le long de la surface du corps, ainsi que les contraintes tangentielles τ_0; ces grandeurs étant trouvées, le calcul est considéré achevé. La position du point de décollement se détermine dans ce cas comme une abscisse pour laquelle $\tau_0 = 0$.

Imaginons qu'on puisse approximer la loi de la distribution des vitesses dans la couche limite sous la forme d'une fonction telle que

$$v_x = v\varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}}, f\right), \tag{XI.43}$$

où le rapport $y/\delta^{**} = \eta_1$ joue le rôle d'une coordonnée transversale sans dimensions et le paramètre f (fonction inconnue de x) dépend de la forme du corps et s'appelle facteur de forme.

Déterminons le facteur de forme comme une dérivée seconde prise avec le signe opposé de la vitesse sans dimensions suivant la coordonnée η_1 calculée directement près de la paroi. Ainsi, en tenant compte de (XI.8), nous obtenons

$$f = -\left(\frac{d^2\varphi}{d\eta_1^2}\right)_{\eta_1=0} = -\frac{\delta^{**2}}{v}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -\frac{\delta^{**2}}{v}\left(-\frac{vv'}{\nu}\right) = \frac{v'\delta^{**2}}{\nu}, \tag{XI.44}$$

où v' est la dérivée de la vitesse v par rapport à x.

Montrons que les grandeurs $H = \delta^*/\delta^{**}$ et $\tau_0/\rho v^2$, figurant dans l'équation des impulsions (XI.36), sont des fonctions du facteur de forme.

En effet, en utilisant (XI.2) et (XI.3) et en tenant compte de (XI.43), nous obtenons

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \frac{\int_0^\infty [1-\varphi(\eta_1, f)]\, d\eta_1}{\int_0^\infty \varphi(\eta_1, f)[1-\varphi(\eta_1, f)]\, d\eta_1} = H(f). \tag{XI.45}$$

En calculant τ_0 d'après la formule de Newton, compte tenu de (XI.43), nous trouvons

$$\frac{\tau_0}{\rho v^2} = \frac{\mu}{\rho v^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\nu}{v\delta^{**}}\left[\frac{\partial\left(\frac{v_x}{v}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right)}\right]_{y=0} = \frac{\nu}{v\delta^{**}}\zeta(f), \tag{XI.46}$$

où $\zeta = \left(\frac{d\varphi}{d\eta_1}\right)_{\eta_1=0}$ est la dérivée première de la vitesse sans dimensions suivant la coordonnée η_1, calculée directement près de la paroi.

En substituant (XI.45) et (XI.46) dans (XI.36), nous aurons

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}+\frac{v'\delta^{**}}{v}(2+H)=\frac{\nu}{v\delta^{**}}\zeta.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $2v\delta^{**}/\nu$ transformons-la sous la forme

$$v\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta^{**2}v'}{\nu}\frac{1}{v'}\right)+2\frac{v'\delta^{**2}}{\nu}(2+H)=2\zeta.$$

Après l'introduction du facteur de forme $f = v'\delta^{**2}/\nu$ cette équation prend la forme monoparamétrique

$$v\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{v'}\right)=F. \qquad \text{(XI.47)}$$

En calculant la dérivée dans le premier membre de (XI.47) et en groupant les termes, nous obtenons l'expression

$$\frac{df}{dx}=\frac{v'}{v}F+\frac{v''}{v'}f, \qquad \text{(XI.48)}$$

dans laquelle la fonction $F(f)$ se détermine par la relation

$$F=2[\zeta-f(2+H)]. \qquad \text{(XI.49)}$$

L'égalité (XI.48) représente l'équation différentielle par rapport au facteur de forme que l'on peut utiliser pour le calcul de f le long de la couche limite. Si la forme de la fonction $\varphi(\eta_1, f)$ est connue, alors au moyen des formules (XI.45) et (XI.46) il est facile de déterminer la relation entre les grandeurs H et ζ et par conséquent la dépendance de F du facteur de forme. Si lors de l'intégration de l'équation (XI.48) on détermine f en des différents points du corps, alors les formules (XI.45) et (XI.46) permettront de calculer les caractéristiques de la couche limite δ^*, δ^{**} et τ_0 le long de tous les points de sa surface.

Cependant, vu la complexité de la fonction F, on ne parvient pas à écrire l'intégrale générale pour l'équation (XI.48). C'est pourquoi pour chaque cas particulier de la loi de distribution des vitesses transversalement à la couche limite on est obligé d'intégrer cette équation par des méthodes approchées.

Une méthode approchée originale de la définition de la forme explicite des fonctions ζ, H et F a été proposée par N. Kotchine et L. Loïtsianski. Elle est basée sur l'utilisation des résultats de la solution, examinée au § 65, des équations de la couche limite où le fluide libre est donné sous la forme $v = cx^m$ et la constante m a des

valeurs différentes. Cette solution est commode parce qu'elle reproduit avec un grand degré de précision les lois de la distribution des vitesses et les autres caractéristiques de la couche limite aussi bien dans la zone des écoulements accélérés que ralentis.

D'après les données de cette solution, pour un certain nombre de valeurs du paramètre $\beta = \frac{2m}{1+m}$, déterminant différentes lois de la distribution des vitesses transversalement à la couche limite $v_x = v\varphi(\eta_1, f)$, on peut tabuler les fonctions f, H, ζ et F. Par la suite on peut rejeter le paramètre β et considérer le tableau comme une liaison entre le facteur de forme f et les grandeurs ζ, H et F dans les différents écoulements accélérés et ralentis.

En partant des considérations analogues, L. Loïtsianski a obtenu la relation entre les grandeurs ζ, H et F et le facteur de forme f, qui est consignée dans le tableau 2.

Tableau 2

f	ζ	H	F	f	ζ	H	F
−0,089	0,000	3,85	1,04	0,01	0,236	2,55	0,38
−0,085	0,019	3,66	1,00	0,02	0,253	2,50	0,33
−0,08	0,039	3,50	0,96	0,03	0,270	2,46	0,275
−0,07	0,071	3,28	0,88	0,04	0,286	2,41	0,22
−0,06	0,097	3,12	0,81	0,05	0,302	2,36	0,17
−0,05	0,120	3,00	0,74	0,06	0,318	2,32	0,12
−0,04	0,142	2,90	0,68	0,07	0,335	2,28	0,07
−0,03	0,162	2,82	0,615	0,08	0,350	2,24	0,02
−0,02	0,181	2,74	0,55	0,084	0,357	2,22	0,003
−0,01	0,200	2,67	0,495	0,085	0,357	2,22	−0,002
0,00	0,219	2,61	0,44				

L'analyse du tableau montre que les valeurs de la fonction F pour les lois de la distribution des vitesses envisagées s'approximent bien par la dépendance linéaire

$$F = a - bf, \tag{XI.50}$$

où a et b sont des constantes.

L'analyse des autres approximations approchées des lois monoparamétriques de la distribution des vitesses dans la couche limite confirme l'aspect général de la dépendance linéaire indiquée; la différence consiste seulement dans la valeur absolue des constantes a et b qui change de façon insignifiante pour les différentes vitesses admises dans la couche limite.

Cette expression heureuse de la fonction F permet d'éviter une intégration numérique compliquée de l'équation (XI.48) qui est indispensable dans le cas de la détermination du facteur de forme avec F (f) donné sous la forme tabulée et réduit le problème à l'intégration de cette équation en quadratures.

§ 68. INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DU FACTEUR DE FORME ET CALCUL DES CARACTÉRISTIQUES DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE

En tenant compte de l'approximation (XI.50) de la fonction F l'équation (XI.48) peut être ramenée à une équation différentielle linéaire du 1-er ordre

$$\frac{df}{dx}=a\frac{v'}{v}+\left(\frac{v''}{v'}-b\frac{v'}{v}\right)f, \qquad \text{(XI.51)}$$

dont l'intégrale est

$$f=a\frac{v'}{v^b}\int v^{b-1}(x)\,dx+C\frac{v'}{v^b}.$$

Etant donné qu'au point critique avant, c'est-à-dire pour $x = 0$, la vitesse à la frontière extérieure de la couche limite $v = 0$, il résulte de la condition du caractère fini du facteur de forme en ce point que $C = 0$ et la solution de l'équation (XI.49) prend la forme définitive

$$f=a\frac{v'}{v^b}\int_0^x v^{b-1}(x)\,dx. \qquad \text{(XI.52)}$$

Pour la détermination de la valeur du facteur de forme au point critique avant ($x = 0$), récrivons l'équation (XI.47) sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta^{**2}}{\nu}\right)=\frac{F}{v}$$

ne contenant pas la dérivée seconde v''. De cette équation, commode pour l'intégration numérique, il suit qu'en tenant compte du caractère fini de la dérivée $\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta^{**2}}{\nu}\right)$ avec $x = 0$ la fonction F doit s'annuler. D'après le tableau 2 on voit que F s'annule dans l'intervalle entre les valeurs du facteur de forme f = 0,084-0,085.

Ayant déterminé d'après la formule (XI.52) la valeur de f, on peut calculer pour n'importe quelle abscisse x le long de la surface du corps l'épaisseur de la perte d'impulsion selon la formule

$$\delta^{**}=\sqrt{\frac{\nu f}{v'}}=\sqrt{\frac{\nu a}{v^b}\int_0^x v^{b-1}(x)\,dx}. \qquad \text{(XI.53)}$$

En connaissant les valeurs de f, on peut d'après le tableau 2 ou suivant le graphique qui lui correspond (fig. XI.9) déterminer $H(f)$ et $\zeta(f)$ pour n'importe quel point et ensuite d'après ces grandeurs trouver

$$\delta^* = H(f)\,\delta^{**}$$

et

$$\tau_0 = \frac{\mu v}{\delta^{**}}\,\zeta(f).$$

Le point, où $\tau_0 = 0$, représente le point de décollement de la couche limite et au-delà de ce point le calcul n'est plus effectué, car pour cette région l'équation (XI.47) n'est pas valable.

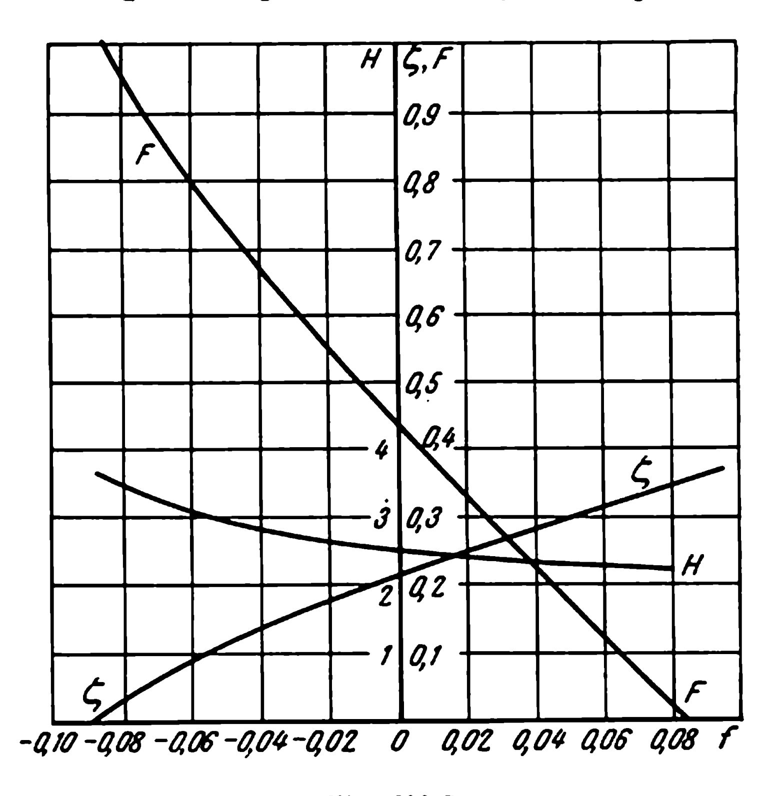


Fig. XI.9

Désignons par f_0 le facteur de forme pour lequel $\zeta = 0$, c'est-à-dire a lieu le décollement de la couche limite ; sa valeur numérique $f = -0{,}089$. Ceci montre que le point de décollement de la couche est situé dans la région où la dérivée v' possède le signe négatif, c'est-à-dire au-delà du point de la pression minimale.

La comparaison des calculs, effectuée par L. Loïtsianski, pour les différentes valeurs des constantes a et b et pour les différentes valeurs de $\zeta(f)$ avec une solution exacte, a montré que les meilleurs résultats quant à la position du point de décollement s'obtiennent si l'on prend $a = 0{,}44$, $b = 5{,}75$ et les valeurs de $\zeta(f)$ prises du tableau 2.

Pour le calcul de la couche limite laminaire le long de la surface d'un corps de révolution placé parallèlement à la vitesse à l'infini, on peut également utiliser la formulation paramétrique de la loi de la distribution des vitesses transversalement à la couche limite.

Si l'on part de l'hypothèse que la courbure transversale de la surface influe de façon insignifiante sur la loi de la distribution des vitesses dans la couche limite et que cette influence est de façon suffisante prise en compte par le multiplicateur r_0'/r_0 dans l'équation intégrale (XI.42) où $r_0(x)$ est le rayon du contour du corps de révolution, alors en vertu de (XI.42) pour le calcul du facteur de forme on peut obtenir l'équation différentielle

$$\frac{df}{dx}=\frac{v'}{v}F+\left(\frac{v''}{v'}-2\frac{r_0'}{r_0}\right)f, \qquad \text{(XI.54)}$$

qui diffère de l'équation (XI.48) seulement par le terme $-2\frac{r_0'}{r_0}f$. Sous l'hypothèse admise, la dépendance des fonctions ζ, H et F de $f=\frac{v'\delta^{**2}}{\nu}$ reste la même que dans le cas du problème plan avec les mêmes valeurs des constantes a et b.

En tenant compte de ce fait nous obtenons, après intégration de l'équation (XI.54), la formule suivante pour le calcul du facteur de forme :

$$f=\frac{av'}{v^b r_0^2}\int_0^x v^{b-1}(x)\,r_0^2(x)\,dx, \qquad \text{(XI.55)}$$

et δ^{**}, τ_0 et δ^* le long de la surface du corps de révolution s'obtiennent d'après les formules du problème plan (XI.53), (XI.46) et (XI.45).

Les méthodes simples de calcul approché de la couche limite laminaire plane en présence du gradient longitudinal de la pression ont été proposées par M. Chvetz et S. Targ. En utilisant la notion de la couche d'épaisseur finie et en éliminant au moyen de l'équation de continuité la vitesse transversale v_y, ces auteurs présentent l'équation de Prandtl sous la forme suivante

$$\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\int_0^y\frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy-v\frac{dv}{dx}. \qquad \text{(XI.56)}$$

Le deuxième membre de cette équation est remplacé par sa valeur approchée obtenue en substituant à la vitesse v_x son approximation polynomiale. Ensuite les deux membres de l'équation sont deux fois intégrés par rapport à y après observation des conditions aux limites ordinaires. La linéarisation des équations différentielles ordinaires obtenues par cette méthode conduit aux résultats qui coïncident avec la méthode linéarisée monoparamétrique exposée ci-dessus. La métho-

de de Targ-Chvetz est utilisée également dans les calculs des écoulements à filets turbulents, en particulier pour résoudre des problèmes sur les tronçons initial et principal d'un filet dans un sillage.

§ 69. PASSAGE DE L'ÉCOULEMENT LAMINAIRE À L'ÉCOULEMENT TURBULENT DANS LA COUCHE LIMITE

Dans le § 54 il a été indiqué que le passage du régime laminaire au régime turbulent de l'écoulement de fluide dans les tubes est conditionné par la valeur critique du nombre Re_{cr}, au-dessus de laquelle l'écoulement dans le tube devient instable par rapport aux faibles perturbations. Etant donné qu'ordinairement on n'arrive pas à éviter ces perturbations, les valeurs critiques du nombre de Reynolds Re_{cr} s'accompagnent d'un écoulement turbulent. La valeur critique du nombre Re_{cr} dans les tubes dépend de la forme de leur section transversale; la rugosité des tubes influe peu sur la valeur de Re_{cr}. Ces observations donnent lieu à supposer que dans le cas du problème extérieur également la stabilité d'écoulement à l'intérieur de la couche limite dépend du nombre Re de la couche limite, ainsi que de la forme de la surface du corps baigné par le fluide et de l'intensité des perturbations arrivant dans la couche limite.

L'influence de l'intensité des perturbations dans le cas du problème extérieur présente une grande importance, et dans les souffleries aérodynamiques pour les différentes valeurs de turbulence ε du courant fluide, les conditions de la turbulence de la couche limite des corps de forme identique sont différentes. En réduisant les perturbations extérieures au minimum, on peut retarder le passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent dans la couche limite jusqu'à de très grandes valeurs de Re.

En son temps, Reynolds a émis une hypothèse suivant laquelle la cause du passage de la forme laminaire à la forme turbulente réside dans l'instabilité de l'écoulement laminaire.

Actuellement les conditions sous lesquelles a lieu la perte de stabilité de l'écoulement laminaire dans la couche limite peuvent être étudiées théoriquement. A cet effet, il suffit d'étudier la stabilité du mouvement par rapport à de faibles perturbations locales du champ des vitesses, et par conséquent, des pressions aussi, l'apparition desquelles dans l'écoulement est toujours possible. Les recherches de la stabilité se réduisent à l'étude du comportement de faibles perturbations indiquées; si avec le temps elles s'amortissent, alors l'écoulement est stable par rapport à celles-ci; si leur valeur augmente avec le temps, il se produira alors la perte de stabilité du mouvement.

Examinons le cas d'un écoulement plan laminaire avec une chute de pression donnée le long de l'écoulement et une loi connue

de la distribution des vitesses. En se donnant les diverses chutes de pression et les épures respectives de la distribution des vitesses, on peut reproduire les conditions correspondant aux écoulements dans les différentes sections de la couche limite plane. Supposons l'axe des x dirigé le long de la paroi solide et l'axe des y perpendiculairement à celle-ci.

Ecrivons les équations de Navier-Stokes (VIII.12) et l'équation de continuité pour un écoulement plan non stationnaire de fluide incompressible

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right);\\ \frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right);\\ \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}&=0.\end{aligned}\right\} \quad \text{(XI.57)}$$

Limitons-nous à l'examen d'un cas simple où la composante de la vitesse du mouvement permanent non perturbé v_x dépend seulement de la coordonnée y, c'est-à-dire $v_{0x}=v_{0x}(y)$ et les deux autres composantes sont nulles $v_{0y}=v_{0x}=0$. Un tel écoulement a lieu précisément dans un canal ou un tube de section transversale constante à une distance suffisamment grande de la section d'entrée.

De façon approximative, on peut considérer l'écoulement dans la couche limite comme identique, étant donné que le mouvement de base dépend de la coordonnée longitudinale beaucoup moins que de celle transversale. Dans ce cas, on doit compter que la pression p de l'écoulement de base dépend également de la coordonnée longitudinale x, c'est-à-dire compter que $p_0=p_0(x, y)$. Ainsi, l'écoulement de base se détermine par les grandeurs suivantes:

$$v_{0x}(y);\quad v_{0y}=v_{0z}=0;\quad p_0(x, y). \quad \text{(XI.58)}$$

Superposons sur l'écoulement plan examiné un mouvement de perturbation à deux dimensions, qui dépend non seulement des coordonnées x et y mais aussi du temps t. En désignant les vitesses et les pressions dans cet écoulement par

$$v_{1x}(x, y, t);\quad v_{1y}(x, y, t);\quad p_1(x, y, t), \quad \text{(XI.59)}$$

nous obtiendrons les composantes de la vitesse et la pression du mouvement résultant

$$v_x=v_{0x}+v_{1x};\quad v_y=v_{1y};\quad v_z=0;\quad p=p_0+p_1. \quad \text{(XI.60)}$$

Le mouvement de base déterminé suivant l'hypothèse par les grandeurs (XI.58) est la solution des équations de Navier-Stokes. Le mouvement résultant avec les paramètres (XI.60) doit également satisfaire aux équations de Navier-Stokes. Le mouvement de pertur-

bation superposé, déterminé par les grandeurs (XI.59), sera supposé petit, de façon qu'on puisse négliger tous les membres quadratiques par rapport à ceux linéaires.

En substituant les valeurs de (XI.60) dans l'équation (XI.57), en rejetant les membres quadratiques des composantes de la vitesse du mouvement de perturbation et leurs dérivées et en tenant compte de ce que l'écoulement principal de par lui-même satisfait aux équations de Navier-Stokes, on peut écrire

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_{1x}}{\partial t}+v_{0x}\frac{\partial v_{1x}}{\partial x}+v_{1y}\frac{\partial v_{0x}}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x}+\nu\Delta v_{1x};\\ \frac{\partial v_{1y}}{\partial t}+v_{0x}\frac{\partial v_{1y}}{\partial x}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial y}+\nu\Delta v_{1y};\\ \frac{\partial v_{1x}}{\partial x}+\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad (XI.61)$$

Ainsi, nous avons trois équations pour déterminer trois grandeurs inconnues v_{1x}, v_{1y}, p_1. Des deux premières équations du système (XI.61) on peut exclure la pression p_1 et alors pour la détermination de v_{1x} et v_{1y} il n'en restera que deux équations (y compris l'équation de continuité).

En introduisant pour le mouvement de perturbation la fonction de courant $\psi_1(x, y, t)$, supposons que pour une oscillation particulière du mouvement de perturbation on puisse la représenter sous la forme

$$\psi_1(x, y, t)=\varphi^*(y)\,e^{i(\alpha x-\beta t)}, \qquad (XI.62)$$

où $\varphi^* = \varphi_r^* + i\varphi_i^*$ est l'amplitude complexe.

La fonction représentant tout mouvement de perturbation à deux dimensions peut être développée en série de Fourier et représentée sous la forme de perturbations séparées avec des fonctions de courant (XI.62). Dans l'égalité (XI.62) α est une grandeur réelle, liée à la longueur de l'onde de perturbation λ par le rapport $\lambda = 2\pi/\alpha$; β est une grandeur complexe qui peut être représentée sous la forme $\beta = \beta_r + i\beta_i$, où β_r est la fréquence circulaire d'une oscillation séparée et β_i coefficient permettant de juger de l'accroissement ou de l'amortissement des oscillations. Si $\beta_i < 0$, l'oscillation s'amortit et l'écoulement laminaire est stable; si $\beta_i > 0$, alors l'écoulement n'est pas stable.

Outre les valeurs α et β, il est avantageux d'introduire également leur rapport

$$c=\frac{\beta}{\alpha}=c_r+ic_i, \qquad (XI.63)$$

où c_r est la célérité de propagation des ondes dans la direction de l'axe des x (vitesse de phase) et c_i est la grandeur permettant de juger de l'amortissement ou de l'accroissement des oscillations. Ainsi, si

$c_i < 0$, il y a l'amortissement, si $c_i > 0$, il y a l'accroissement des oscillations.

L'amplitude φ^* du mouvement de perturbation est admise dépendante seulement de y, car l'écoulement de base dépend également seulement de y. De l'égalité (XI.62) nous trouvons pour les composantes de la vitesse du mouvement de perturbation les expressions suivantes:

$$v_{1x}=\frac{\partial\psi_1}{\partial y}=\varphi^{*\prime}(y)\,e^{i(\alpha x-\beta t)};\qquad\text{(XI.64)}$$

$$v_{1y}=-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=i\alpha\varphi^*(y)\,e^{i(\alpha x-\beta t)}.\qquad\text{(XI.65)}$$

En les substituant dans les équations (XI.61) et en éliminant la pression, nous obtiendrons pour la détermination de l'amplitude $\varphi^*(y)$ une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre

$$(v_{0x}-c)(\varphi^{*\prime\prime}-\alpha^2\varphi^*)-v_{0x}''\varphi^*=-\frac{i}{\alpha\,\mathrm{Re}}(\varphi^{*\prime\prime\prime\prime}-2\alpha^2\varphi^{*\prime\prime}+\alpha^4\varphi^*).\quad\text{(XI.66)}$$

Cette équation appelée équation différentielle du mouvement de perturbation ou équation d'Orr-Sommerfeld constitue le point de départ de la théorie linéaire de la stabilité de l'écoulement laminaire. Elle est ramenée à la forme sans dimensions et pour cette raison toutes les dimensions linéaires sont divisées par une grandeur caractéristique respectivement choisie, par exemple par l'épaisseur δ de la couche limite, et toutes les vitesses par la vitesse maximale v_0 de l'écoulement de base.

Les signes prime indiquent la dérivation par rapport à la coordonnée sans dimensions y/δ et le nombre $\mathrm{Re}=v_0\delta/\nu$ caractérise l'écoulement de base laminaire étudié. Les termes du premier membre de l'équation (XI.66) s'obtiennent à partir des termes inertiaux des équations du mouvement et les termes du deuxième membre des termes qui tiennent compte de la viscosité. La condition aux limites pour l'écoulement dans la couche limite consiste en la nullité des deux composantes de la vitesse du mouvement de perturbation sur la paroi ($y=0$) et à une grande distance de la paroi (fluide libre). Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}&\text{avec}\quad y=0\quad v_{1x}=v_{1y}=0,\quad\text{i.e.}\quad\varphi^*=0,\quad\varphi^{*\prime}=0;\\&\text{avec}\quad y=\infty\quad v_{1x}=v_{1y}=0,\quad\text{i.e.}\quad\varphi^*=0,\quad\varphi^{*\prime}=0.\end{aligned}\right\}\quad\text{(XI.67)}$$

L'étude de la stabilité du mouvement pour une fonction v_{0x} donnée, c'est-à-dire du champ des vitesses de l'écoulement laminaire, se réduit à l'étude des valeurs propres de cette équation. En particulier, il suffit de se limiter à l'étude de la question relative aux valeurs du paramètre α et du nombre $\mathrm{Re}^*=v_0\delta^*/\nu$ pour lesquelles l'équation donnée possède des solutions indépendantes différentes de zéro, à condition que $c_i=0$. Il est évident que cette condition détermine

la frontière de la zone de stabilité de l'écoulement laminaire correspondant, car dans ce cas le multiplicateur d'amplitude $\varphi^*(y)$ dans la fonction de courant n'augmente pas avec le temps. L'étude de l'équation de faibles perturbations (XI.66) se heurte à de grandes difficultés mathématiques et conduit à la représentation de ses solutions sous la forme de séries suivant le petit paramètre $1/\alpha\mathrm{Re}$ [25].

Le résultat de calcul à la stabilité d'un écoulement laminaire le long d'une plaque plane peut être représenté graphiquement en

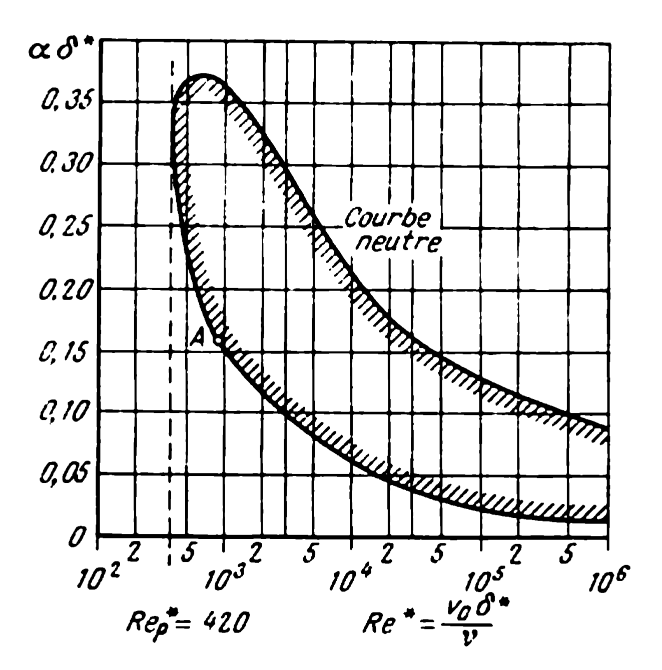


Fig. XI.10

réunissant par des courbes dans le plan des variables Re^* et $\alpha\delta^{**}$ tous les points auxquels correspondent les valeurs identiques de c_i. Un intérêt particulier revient à la courbe $c_i = 0$ (fig. XI.10) qui sépare la zone des valeurs stables de $\alpha\delta^{**}$ et Re^* de la zone de leurs valeurs instables et appelée pour cette raison courbe neutre. Sur cette courbe, le point le plus intéressant est le point du nombre minimal de Reynolds Re_p qui est situé sur la tangente parallèle à l'axe $\alpha\delta^{**}$. Aux valeurs les plus petites de Re, toutes les oscillations séparées s'amortissent et aux valeurs plus grandes, certaines oscillations au moins s'accroissent. Le plus petit nombre Re déterminé par la courbe neutre représente le nombre critique théorique Re_p de l'écoulement laminaire étudié ; il caractérise la perte de stabilité de l'écoulement donné.

Les points situés dans la zone intérieure, limitée par la courbe neutre, déterminent les états qui correspondent à des oscillations instables, et les points situés dans les zones en dehors de la courbe neutre, les états qui correspondent à des oscillations stables. Pour les très grands nombres Re, les deux branches de chaque courbe neutre

se rapprochent de façon illimitée de l'axe des abscisses, c'est-à-dire des valeurs nulles des ordonnées correspondantes.

Suivant les calculs de Tollmien relatifs aux profils de la vitesse de Blasius, le plus petit nombre de Reynolds pour lequel est encore possible une perturbation neutre est $\mathrm{Re}_p^* = \left(\frac{v_0\delta^*}{\nu}\right)_p = 420$. Le point sur la plaque en lequel s'obtient ce nombre de Reynolds est justement le point de la perte de stabilité de la couche limite.

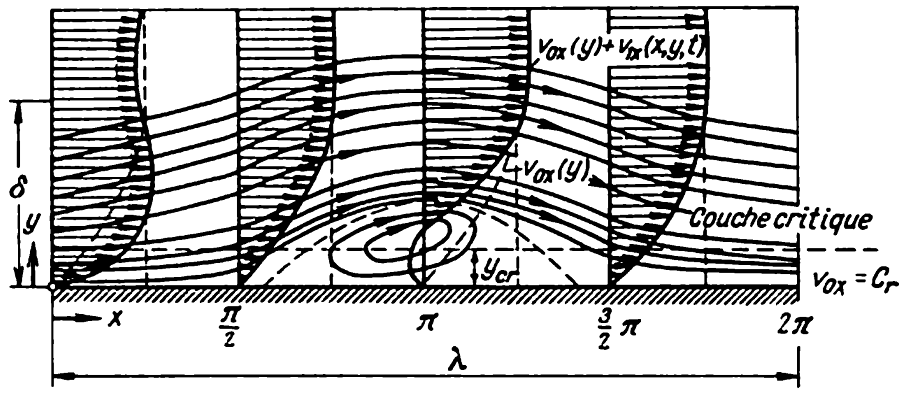


Fig. XI.11

Le caractère du mouvement du fluide pour les oscillations neutres correspondant au point A (fig. XI.10) est montré sur la fig. XI.11. Cette figure donne l'image des lignes de courant et de la distribution instantanée des vitesses sur le segment de l'axe des x égal à la longueur de l'onde de perturbation. Pour la comparaison, on a également indiqué par des lignes en pointillés les profils de la vitesse du mouvement non perturbé. Il est intéressant de noter, qu'avec $x = \pi/2$ sur le profil instantané des vitesses apparaît un point d'inflexion et ensuite entre $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \pi$ a lieu un décollement instantané de la couche limite.

Les résultats des calculs de la stabilité de la couche limite laminaire contournant une plaque, représentés graphiquement sur la fig. XI.10, ont été confirmés par les expériences de Schuhbauer et Skramstad. Dans ces expériences, les oscillations artificielles ont été créées au moyen d'un ruban métallique d'une épaisseur de 0,05 mm et de 2,5 mm de largeur, placé à une distance de 0,15 mm de la paroi. Les oscillations étaient excitées à l'aide du courant électrique alternatif et d'un champ magnétique. De cette manière on est parvenu à créer des perturbations bidimesionnelles d'une fréquence donnée prévue par la théorie. Par conséquent, il a été possible d'obtenir des oscillations croissantes, amorties et neutres. Les mesures étaient effectuées avec un anémomètre à fil chaud. Les résultats des mesures des oscillations neutres se sont avérés en bonne concordance avec la théorie.

Evidemment on ne peut pas espérer que le nombre théorique Re_p^* pour lequel a lieu la perte de la stabilité, obtenu au cours des essais sur la stabilité, corresponde au nombre critique Re déterminé expérimentalement pour lequel a lieu le passage de la forme laminaire de l'écoulement à la forme turbulente.

En effet, le nombre théorique Re_p^* obtenu au cours des essais sur la stabilité, par exemple de la couche limite sur la paroi, détermine sur la paroi le point tel au-delà duquel en aval de l'écoulement a lieu l'accroissement de certaines oscillations séparées. Cependant, il est évident qu'il doit passer un certain temps avant que l'accroissement de ces perturbations provoque la naissance de la turbulence. Avant que ce moment arrive, la perturbation pourra se propager en aval à une certaine distance. Par suite, on doit s'attendre à ce que le point de transition de la forme laminaire de l'écoulement à celle turbulente doit se trouver plus en aval de l'écoulement que le point correspondant à la limite de stabilité calculée théoriquement.

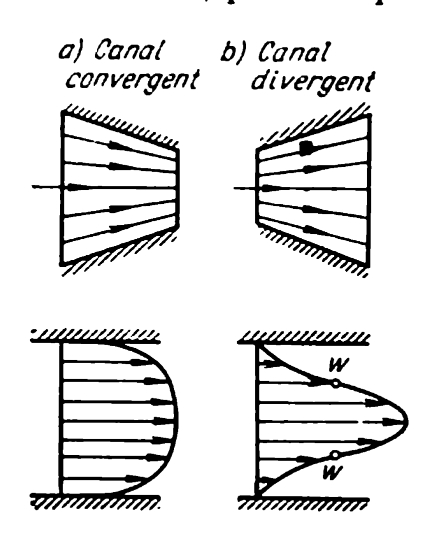


Fig. XI.12

Une conclusion très importante résultant de la théorie de la stabilité est celle qui consiste en ce que les profils de la vitesse qui possèdent le point d'inflexion sont instables.

L'existence du point d'inflexion sur les profils des vitesses est directement liée au gradient de la pression. Lors de l'écoulement dans un canal convergent (fig. XI.12,*a*) où le gradient de pression est négatif, le profil des vitesses s'obtient sans points d'inflexion. Au contraire, dans le cas de l'écoulement dans un canal divergent, où le gradient de pression est positif, le profil des vitesses est aigu et comporte des points d'inflexion w. La même différence quant à la forme du profil des vitesses s'observe également dans la couche limite laminaire sur un corps contourné par un fluide (fig. XI.5): dans la région de la chute de pression les profils de la vitesse n'ont pas de points d'inflexion et dans la région de l'augmentation de la pression, ils ont toujours un point d'inflexion. Par conséquent, la déduction sur le rôle du point d'inflexion permet de juger de l'influence du gradient de la pression sur la stabilité, à savoir: la chute de pression favorise la stabilisation et l'augmentation de la pression, l'instabilité.

Ainsi, lors de l'écoulement autour d'un corps, la couche limite dans la région de l'augmentation de la pression (écoulement ralenti) tend dans une plus grande mesure à devenir turbulente que celle qui se trouve dans la région de la chute de la pression (écoulement

accéléré). Il en résulte que dans l'écoulement autour d'un corps la position du point de pression minimale exerce une influence décisive sur la position du point de transition. En première approximation, on peut considérer que le point de transition est situé un peu plus loin en aval de l'écoulement que ne l'est le point de la pression minimale.

Ceci sert de base physique à l'établissement des projets de profils d'ailes laminaires. Dans le cas de tels profils, l'épaisseur maximale est reportée autant que possible vers le bord de fuite de l'aile; et donc le point de pression minimale se trouve également reporté vers l'arrière. Grâce à ce fait, la couche limite peut être maintenue laminaire sur une longueur sensiblement plus grande que dans le cas des profils ordinaires, ce qui conduit à la diminution de la résistance d'environ deux fois. Cependant, le déplacement du point de pression minimale loin vers l'arrière n'est possible que dans une gamme assez restreinte des angles d'attaque. On doit remarquer qu'avec $Re \approx 5 \cdot 10^7$ (calculés suivant la corde), l'effet de laminarisation « naturelle » envisagée disparaît, ce qui se trouve en concordance avec la théorie de la stabilité.

Un autre moyen de la laminarisation de la couche limite consiste en son aspiration partielle à travers une surface poreuse ou par des fentes disposées de manière appropriée. L'essence de ce moyen consiste en ceci: premièrement, par suite de l'aspiration, l'épaisseur de la couche limite diminue, ce qui fait à son tour diminuer sa tendance vers le passage à l'état turbulent. Deuxièmement, les profils des vitesses de la couche limite laminaire avec aspiration par rapport aux profils des vitesses sans aspiration ont une forme telle qui les fait plus stables aux perturbations extérieures, même pour une épaisseur identique de la couche limite.

Une question importante se pose sur la quantité de fluide qu'on doit aspirer. En augmentant cette quantité on peut rendre l'épaisseur de la couche limite aussi petite que l'on veut en diminuant par là le nombre Re pour la couche limite autant qu'il sera toujours inférieur à la limite de la stabilité. Cependant, à une augmentation trop grande de la quantité de fluide aspiré, une partie importante de la puissance, économisée grâce à la diminution de la résistance, sera dépensée pour une aspiration excessive (puissance de la pompe d'aspiration). Pour cette raison, il est très important de déterminer la quantité minimale de fluide qu'il est indispensable d'aspirer pour conserver la couche limite laminaire; cela déterminera simultanément la diminution maximale de la résistance, obtenue par l'aspiration. En effet, toute quantité plus grande de fluide aspiré assurera une couche limite plus fine et par conséquent, une plus grande contrainte tangentielle sur la paroi.

Les calculs ont montré qu'en écoulement autour d'une plaque plane le coefficient minimal de débit du fluide régulièrement aspiré

est

$$c_{Q_{\min}} = -\frac{v_{y0}}{v_\infty} = 0{,}00012,$$

où v_{0y} est la vitesse d'aspiration régulière (négative suivant le signe).

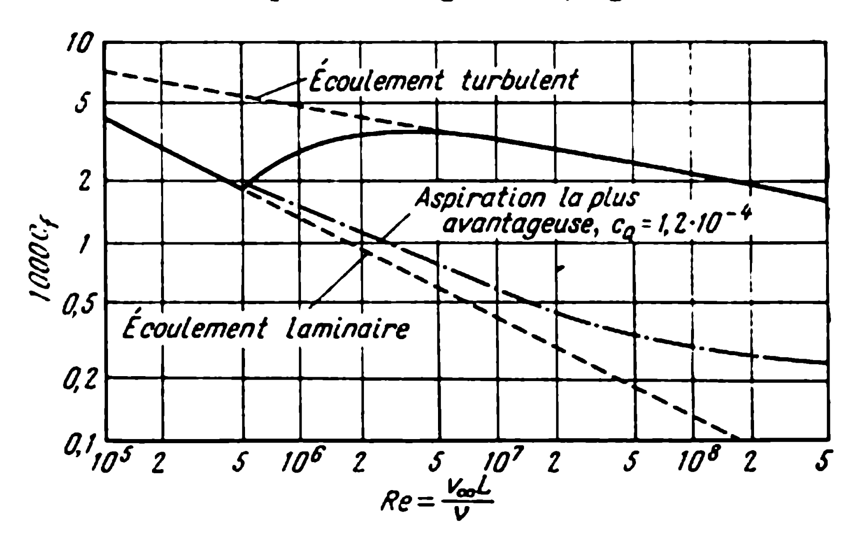


Fig. XI.13

Les résultats des calculs des coefficients de résistance au frottement de la plaque avec une telle aspiration la « plus avantageuse » sont montrés sur la fig. XI.13.

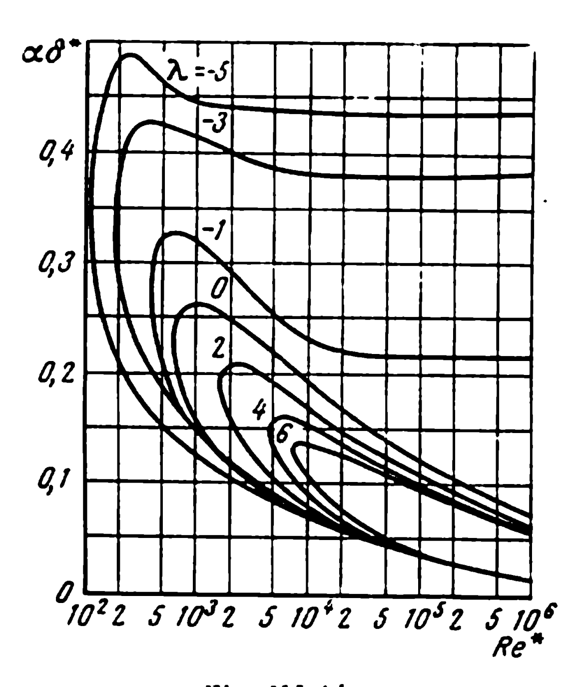


Fig. XI.14

Comme on le voit de la figure, avec $\mathrm{Re} > 5 \cdot 10^7$, la valeur de la diminution de la résistance due à l'aspiration atteint 80 % de la résistance avec une couche limite turbulente.

Si la loi de la distribution des vitesses dans la section transversale de la couche limite diffère de la loi de la distribution dans le cas d'une plaque plane, les courbes neutres déterminant les frontières des zones de stabilité changent de forme. Sur la fig. XI.14 est montrée une famille de courbes neutres pour les épures des vitesses avec différentes valeurs du facteur de forme $\lambda = v'\delta^2/\nu$; ici les valeurs de $\lambda > 0$ correspondent aux épures des vitesses dans la zone des chutes de pression négatives, tandis que $\lambda < 0$, aux tronçons de la couche limite avec une chute de pression positive, c'est-à-dire dans la par-

tie arrière. L'examen de ces courbes montre que la chute de pression longitudinale influe sensiblement sur les conditions de la stabilité du mouvement dans la couche limite. Dans la zone des chutes de pression négatives, la couche limite est beaucoup plus stable et les nombres Re_p^* sensiblement supérieurs que dans la région des chutes de pression positives. Dans la zone des chutes de pression positives, la région instable à l'intérieur de la courbe neutre est sensiblement plus grande que dans la zone des chutes de pression négatives.

La détermination des valeurs théoriques des nombres Re_p^{**} au moyen des diagrammes, analogues à ceux montrés sur la fig. XI.14, a permis de construire sur la fig. XI.15 la courbe de la dépendance $\mathrm{Re}_p^{**} = F_1(f)$, où $f = v'\delta^{**2}/\nu$ est le facteur de forme de la couche limite laminaire. D'après cette courbe, on peut déterminer sur le profil le point où commence la perte de la stabilité de la couche limite laminaire. Pour cela, il faut porter sur la fig. XI.15 la courbe $\mathrm{Re}^{**}(f)$ obtenue après le calcul de la couche limite laminaire pour une vitesse donnée d'écoulement autour du profil; le point de son intersection avec la courbe $\mathrm{Re}_p^{**}(f)$ détermine la valeur du facteur de forme f_p et par conséquent, l'abscisse x_p pour laquelle on peut s'attendre à la perte de la stabilité.

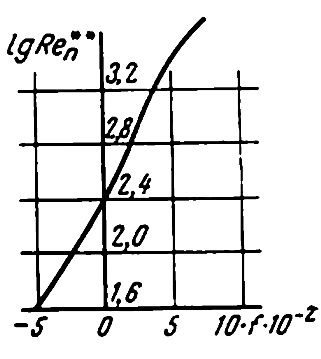


Fig. XI.15

Comme il a été indiqué plus haut, le point de transition est situé un peu plus bas en aval par rapport au point de stabilité.

Il faut s'attendre à ce que la distance qui sépare les points mentionnés sera plus grande dans la région de la diminution de pression que dans celle de l'augmentation de pression, où l'accroissement des perturbations instables s'effectue beaucoup plus activement.

La valeur du nombre critique Re_{cr}^{**} caractérisant l'abscisse x_t du point de transition à l'écoulement turbulent dans la couche limite dépend du degré de turbulence ε du fluide libre et peut être déterminée en fonction de celle-ci ainsi que du facteur de forme de la couche limite laminaire au moyen du graphique XI.16. Ce graphique est construit sur la base du dépouillement des données obtenues par Van Driest et Bloomer.

Pour la détermination de la position du point de transition à la couche limite turbulente, on doit porter sur cette figure la relation calculée de $\mathrm{Re}^{**}(f)$ pour la vitesse donnée en écoulement laminaire autour du profil. Si le degré de turbulence du fluide libre est connu, alors le point d'intersection de la courbe de $\mathrm{Re}^{**}(f)$ du profil donné

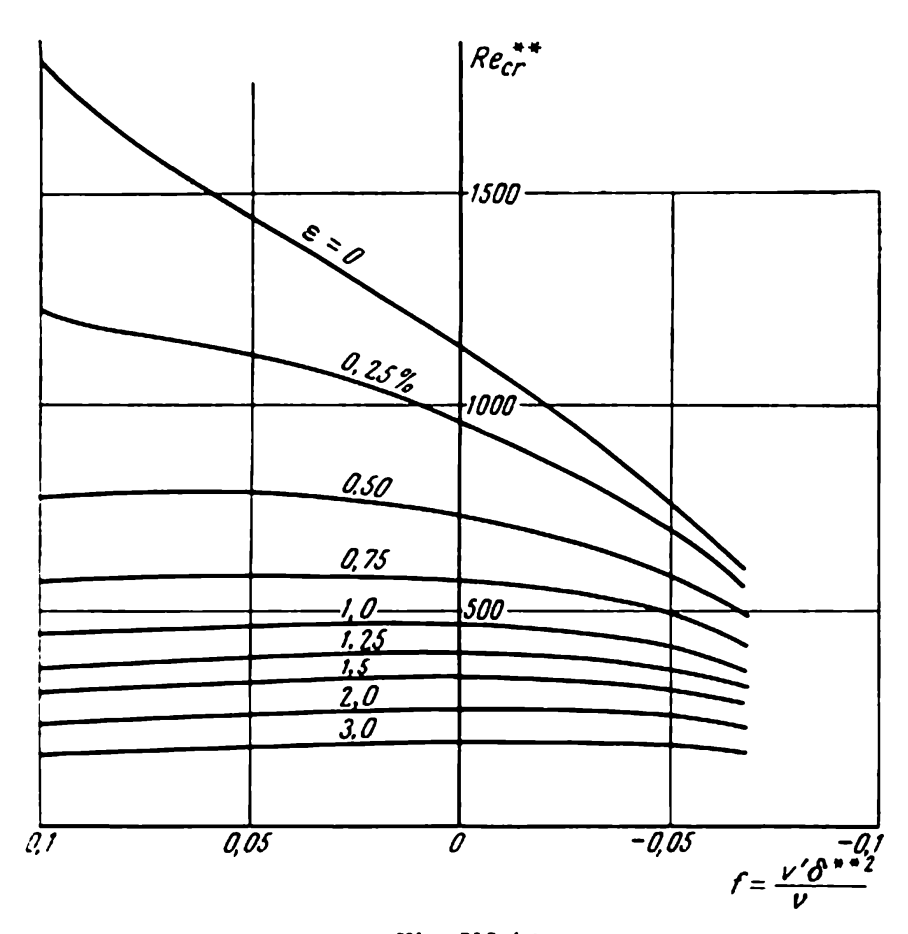


Fig. XI.16

avec la ligne correspondante ε = const permettra de déterminer la valeur du facteur de forme f_t et, par conséquent, l'abscisse x_t également du point de transition.

§ 70. COUCHE LIMITE TURBULENTE

L'étude et le calcul de la couche limite turbulente sont basés sur les représentations générales des propriétés de la couche limite énoncées au § 62. Suivant ces représentations et en cas de la couche limite turbulente, on peut considérer comme valable l'évaluation, donnée auparavant, du rôle des termes séparés figurant dans les équations du mouvement de fluide établies pour l'écoulement à l'intérieur de la couche limite. Cependant, il faut seulement tenir compte de ce que pour la couche limite turbulente on entend par vitesses et contraintes des forces hydrodynamiques leurs valeurs moyennes par rapport au temps. Dans ce cas, les forces intérieures hydrodynamiques comportent les valeurs totales des contraintes de viscosité et de turbulence.

En partant de ce fait, on peut compter que pour une couche limite turbulente plane seront valables les équations de Prandtl, si l'on y effectue l'opération de médiation des vitesses instantanées et des contraintes par rapport au temps. Après la médiation, nous aurons finalement

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y}\,; \\ \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI.68)}$$

où la grandeur $\bar{\tau}$ se détermine comme une somme de contraintes tangentielles newtoniennes et turbulentes

$$\bar{\tau} = \mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \rho \overline{v'_x v'_y}. \qquad \text{(XI.69)}$$

Dans la couche limite turbulente se conserve la propriété de la constance de la pression dans la section transversale donnée. Ceci permet de déterminer la chute de pression le long de la couche limite, qui fait partie de l'équation (XI.68), par le calcul de la pression le long de sa frontière extérieure.

L'emploi de ces équations, de même que lors de l'étude de la couche limite laminaire, est lié à de grandes difficultés. Elles sont dues à la nécessité de satisfaire aux conditions aux limites sur les parois solides lors de la détermination de la loi de la distribution des vitesses moyennes dans la couche limite et de l'admission des hypothèses supplémentaires qui auraient permis d'exprimer les contraintes tangentielles turbulentes par les vitesses moyennes de l'écoulement.

Les méthodes plus simples de calcul de la couche limite turbulente plane sont celles basées sur l'utilisation de la corrélation intégrale (XI.36)

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{v'}{v}\delta^{**}(2+H) = \frac{\tau_0}{\rho v^2}\,.$$

Pour le calcul des caractéristiques de la couche turbulente à l'aide de cette équation, il faut à l'avance connaître ou approximer la loi de la distribution des vitesses moyennes dans la couche limite. D'autre part, il faut établir une deuxième liaison supplémentaire qui lierait la contrainte tangentielle τ_0 à la frontière solide de l'écoulement aux caractéristiques de la couche limite. Cette liaison supplémentaire sera dite loi de la résistance; dans le cas de la couche limite laminaire elle se détermine par la formule de Newton.

Il n'a pas été possible jusqu'à présent d'établir théoriquement la forme exacte de la loi de la résistance pour la couche limite turbulente. Dans ce but on utilise largement les résultats des recherches expérimentales de la couche limite, ainsi que les différentes hypo-

thèses de simplification. Pour cette raison, les méthodes modernes de calcul de la couche limite turbulente sont semi-empiriques et leur précision dépend de l'authenticité des matériaux d'essais admis pour base lors de la détermination des lois de la distribution des vitesses et des résistances.

§ 71. COUCHE LIMITE TURBULENTE LE LONG D'UNE PLAQUE PLANE LISSE

Nous allons étudier la couche limite turbulente le long d'une plaque plane lisse en partant de l'hypothèse qu'elle est turbulente sur toute sa longueur, en commençant par son bord avant. En première approximation, pour une telle étude on peut utiliser la loi de la distribution des vitesses, établie pour un écoulement turbulent dans un tube lisse, en assimilant la vitesse sur l'axe du tube v_m à la vitesse v_∞ à la frontière extérieure de la couche limite, et le rayon du tube r_0 à l'épaisseur de la couche δ. Cette assimilation n'est pas stricte, car elle ne tient pas compte de la distribution quelque peu différente des contraintes tangentielles en travers de la couche limite, mais elle est quand même admissible en qualité de première approximation grossière.

Pour une plaque plane on devrait prendre pour loi de la distribution des vitesses, en omettant par la suite le symbole de la médiation, la formule logarithmique (X.35). Cependant, étant donné qu'elle détermine la liaison entre τ_0 et v_x sous une forme extrêmement compliquée, ce qui rend difficiles les calculs ultérieurs, on peut se limiter en première approximation à la formule de la puissance (X.46), moins générale, suivant laquelle

$$v_x = v_\infty \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}. \qquad \text{(XI.70)}$$

En se basant sur cette formule, on peut déterminer la liaison suivante entre les grandeurs δ, δ^* et δ^{**}:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) dy = \delta \frac{m}{m+1}; \qquad \text{(XI.71)}$$

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{v_x}{v_\infty}\left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) dy = \delta \frac{m}{(m+1)(2m+1)}, \qquad \text{(XI.72)}$$

où $m = 1/n$.

Pour déterminer la liaison manquante entre les vitesses et les contraintes tangentielles dans la couche limite d'une plaque plane, c'est-à-dire la loi de la résistance, écrivons la loi de la distribution des vitesses en travers de la sous-couche visqueuse en l'absence de

chute de pression longitudinale le long de la surface

$$v_x = \frac{v^{*2} y}{\nu}, \qquad \text{(XI.73)}$$

où $v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$.

Exigeons qu'à la frontière de la sous-couche visqueuse la loi de la puissance (XI.70) se conjugue avec la loi linéaire

$$\frac{v^{*2} y}{\nu} = v_\infty \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \text{ avec } y = \delta_l.$$

En tenant compte de ce qu'à la frontière extérieure de la sous-couche visqueuse suivant (X.39) $v^* \delta_l / \nu = \alpha_l$, où α_l est la constante, on peut écrire:

$$v^* = v_\infty \alpha_l^{m-1} \left(\frac{\nu}{v^* \delta}\right)^m$$

ou

$$v^{*2} = \alpha_l^{\frac{2(m-1)}{m+1}} v_\infty^{\frac{2}{m+1}} \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{2m}{m+1}}.$$

En confrontant ce résultat avec la formule générale de la contrainte de frottement, connue de la théorie de la similitude dynamique des écoulements,

$$\tau_0 = c_f \frac{\rho v_\infty^2}{2},$$

nous voyons que dans le cas donné

$$c_f = 2\alpha_l^{\frac{2(m-1)}{m+1}} \mathrm{Re}_\delta^{-\frac{2m}{m+1}},$$

c'est-à-dire

$$\tau_0 = \alpha_l^{\frac{2(m-1)}{m+1}} \left(\frac{v_\infty \delta}{\nu}\right)^{-\frac{2m}{m+1}} \rho v_\infty^2. \qquad \text{(XI.74)}$$

Cette formule définit la loi de la résistance qui correspond à la loi de la puissance de la distribution des vitesses dans la couche limite. Pour trouver l'épaisseur inconnue de la couche limite, utilisons la relation intégrale (XI.38). En y remplaçant, d'après la formule (XI.72) δ^{**} par δ, nous obtenons une équation différentielle suivante relative à l'épaisseur de la couche limite:

$$\frac{d\delta}{dx} = \alpha_l^{\frac{2(m-1)}{m+1}} \frac{(m+1)(2m+1)}{m} \left(\frac{v_\infty \delta}{\nu}\right)^{-\frac{2m}{m+1}}.$$

En intégrant cette équation, nous trouvons

$$\delta^{\frac{3m+1}{m+1}} = \alpha_l^{\frac{2(m-1)}{m+1}} \frac{(3m+1)(2m+1)}{m} \left(\frac{v_\infty}{\nu}\right)^{-\frac{2m}{m+1}} x + C,$$

la constante $C = 0$, car avec $x = 0$, $\delta = 0$. Finalement on peut écrire

$$\delta = a_0 \left(\frac{v_\infty}{\nu}\right)^{-\frac{2m}{3m+1}} x^{\frac{m+1}{3m+1}}, \qquad \text{(XI.75)}$$

où

$$a_0 = \alpha_1^{\frac{2(m-1)}{3m+1}} \left[\frac{(3m+1)(2m+1)}{m}\right]^{\frac{m+1}{3m+1}}.$$

Pour le calcul du coefficient de résistance au frottement, utilisons la relation (XI.40) et en tenant compte de (XI.72) et (XI.75), on peut écrire

$$C_f = \frac{2a_0 m}{(m+1)(2m+1)} \mathrm{Re}^{-\frac{2m}{3m+1}}, \qquad \text{(XI.76)}$$

où $\mathrm{Re} = vL/\nu$.

La constante a_0 et l'exposant m sont choisis d'après les résultats des expériences avec des plaques planes réalisées dans des bassins ou des souffleries aérodynamiques.

En s'appuyant sur les données expérimentales pour les grandes valeurs des nombres Re, Faulkner a obtenu les relations suivantes correspondant à la loi de la puissance de la distribution des vitesses pour l'exposant $m = 1/11$:

$$\tau_0 = 0{,}0131 \left(\frac{v_\infty \delta^{**}}{\nu}\right)^{-1/6} \frac{\rho v_\infty^2}{2}; \qquad \text{(XI.77)}$$

$$\delta^{**} = 0{,}015 \left(\frac{\nu}{v_\infty}\right)^{1/7} x^{6/7}; \qquad \text{(XI.78)}$$

$$C_f = 0{,}0307\, \mathrm{Re}^{-1/7}. \qquad \text{(XI.79)}$$

On peut obtenir des valeurs plus précises des caractéristiques de la couche limite le long d'une plaque plane en partant de la formule logarithmique (X.35) de la distribution des vitesses. Dans ce cas les calculs s'avèrent être plus compliqués et ne peuvent être effectués qu'approximativement. Prandtl et Schlichting, après les calculs fondés sur l'emploi de la formule logarithmique, ont proposé une formule d'interpolation pour la détermination du coefficient de résistance au frottement des plaques. Elle a trouvé son application dans la pratique des calculs de la résistance au frottement des navires et concorde bien avec les données expérimentales connues

$$C_f = \frac{0{,}455}{(\lg \mathrm{Re})^{2{,}58}}. \qquad \text{(XI.80)}$$

De nouvelles recherches sur le champ des vitesses dans la couche limite montrent que l'analogie entre l'écoulement dans la couche limite et l'écoulement dans le tube n'a pas lieu. Cette non-confor-

mité est surtout considérable dans la région extérieure de l'écoulement, c'est-à-dire au voisinage de la couche limite. Sur l'axe du tube, le mélange turbulent est généralement plus intense, tandis qu'à la frontière extérieure de la couche limite turbulente il est moins intense que dans sa zone intérieure.

La fig. XI.17 montre le graphique de la dépendance de la vitesse sans dimensions dans la couche limite turbulente v_x/v^* en fonction

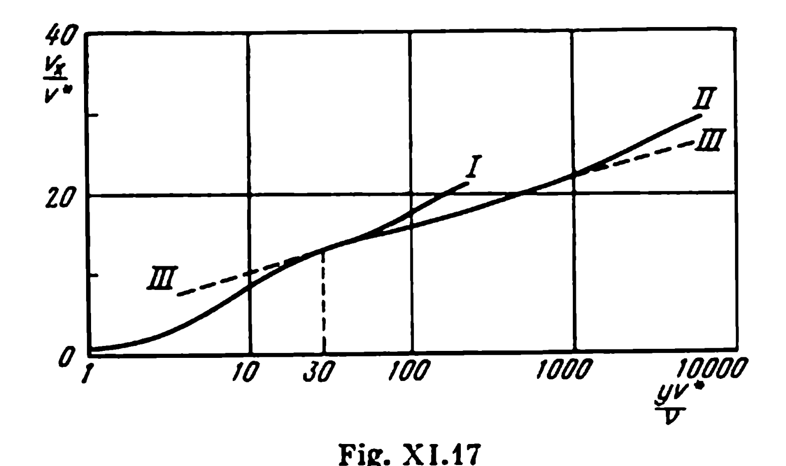


Fig. XI.17

du paramètre v^*y/ν, construit d'après les expériences pour les deux valeurs de Re local: $\mathrm{Re}_\delta = 5 \cdot 10^3$ (courbe *I*) et $\mathrm{Re}_\delta = 1{,}6 \cdot 10^5$ (courbe *II*).

Avec de faibles valeurs de ce paramètre, c'est-à-dire près de la paroi solide, la structure de l'écoulement est principalement déterminée par l'influence des forces de viscosité et avec $v^*y/\nu < 5$, l'épure de la vitesse correspond à la formule (X.34) qui représente une exponentielle en coordonnées logarithmiques utilisées sur la figure. Analogiquement aux écoulements dans les tubes, on peut considérer comme frontière extérieure de la zone d'influence de la viscosité la distance de la paroi pour laquelle $v^*y/\nu = 30$, et de plus, dans la zone $5 < v^*y/\nu < 30$ la loi de la distribution des vitesses se détermine par une dépendance compliquée proposée par Rotta (§ 55). La dépendance logarithmique du type (X.35)

$$\frac{v_x}{v^*} = A + B \lg \frac{v^*y}{\nu},$$

avec des valeurs constantes des coefficients A et B (droite *III*), se trouve être valable seulement dans une zone limitée de l'écoulement dont la longueur se détermine de la condition

$$\frac{30\nu}{v^*} < y < 0{,}15\delta.$$

En dehors de cette zone, jusqu'à la frontière extérieure de la couche limite, la distribution des vitesses diffère de celle logarithmi-

que en se rapprochant de la distribution des vitesses dans un fluide libre et peut être exprimée par la relation générale (X.36). Compte tenu de cette relation, Hama recommande la formule suivante

$$\frac{v_\infty - v_x}{v^*} = 9{,}6\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2.$$

Suivant les données de différents auteurs, les valeurs des constantes A et B sont quelque peu différentes pour le tronçon logarithmique du champ des vitesses. Ainsi, d'après Klauser, suivant les résultats moyens des expériences de différents auteurs $A = 4{,}9$ et $B = 5{,}6$, tandis que suivant les expériences de Nikuradse pour les tubes $A = 5{,}75$ et $B = 5{,}5$.

En partant des particularités indiquées de la loi de la distribution des vitesses, on doit calculer la grandeur δ^{**} dans la couche limite sous la forme d'une somme de trois termes; chacun de ces termes tient compte de la loi de la distribution des vitesses dans la zone correspondante de l'écoulement. Cependant, les calculs montrent que ces précisions de la loi de la distribution des vitesses influent peu sur les résultats définitifs de la détermination des forces de frottement et le coefficient de résistance au frottement de la plaque, calculé compte tenu de ces précisions, ne diffère presque pas des valeurs C_f déterminées par la formule (XI.80).

§ 72. CALCUL DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE PLANE AVEC UNE CHUTE DE PRESSION LONGITUDINALE

Les méthodes de calcul de la couche limite turbulente le long des surfaces lisses en présence d'une chute de pression longitudinale sont basées sur l'utilisation de l'équation intégrale avec une loi paramétrique de distribution des vitesses dans la couche limite. Les résultats de l'étude des vitesses dans les écoulements à l'intérieur de la couche limite avec des chutes de pression positive et négative le long de l'écoulement montrent que la chute de pression influe sensiblement sur le profil des vitesses. En écoulements accélérés, par rapport à un champ des vitesses sans chute de pression, on observe le profil des vitesses avec un plus grand, et dans les écoulements ralentis, aves un plus petit coefficient de remplissage. Ceci résulte de la figure XI.18, où sont comparés sous la forme sans dimensions les résultats des mesures correspondantes. Avec des chutes de pression positives importantes, l'épure de la vitesse au voisinage de la paroi peut prendre la forme d'une boucle qui correspond à la naissance

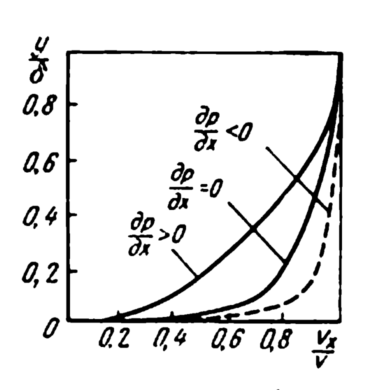


Fig. XI.18

d'un écoulement local inverse, c'est-à-dire au phénomène de décollement de la couche limite.

Examinons le caractère de la distribution des contraintes de frottement transversalement à la couche limite en présence du gradient de pression, sous l'hypothèse que ce dernier définit le caractère du profil des vitesses.

Pour ce faire, représentons, selon C. Fédiaevski, le profil des contraintes de frottement dans la couche limite par un polynôme dont les coefficients sont déterminés par les conditions ayant lieu sur la paroi et à la frontière extérieure de la couche limite

$$\frac{\tau}{\tau_0}=A_0+A_1\eta+A_2\eta^2+\ldots+A_n\eta^n, \qquad \text{(XI.81)}$$

où $\eta = y/\delta$.

Pour la détermination des coefficients $A_0, \ldots, A_n$ on part des conditions suivantes.

Il est évident que sur la paroi, c'est-à-dire avec $\eta = y/\delta = 0$, $\tau/\tau_0 = 1$; sur cette même paroi, suivant la première des équations (XI.68), $\partial\tau/\partial y = dp/dx$, et par conséquent

$$\frac{\partial\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)}{\partial\eta}=\frac{\delta}{\tau_0}\frac{dp}{dx}=A,$$

où $A = \dfrac{\delta\frac{dp}{dx}}{\tau_0}$ est le rapport de la force de pression à la force de frottement près de la paroi, agissant sur un élément de la couche limite.

A la frontière extérieure de la couche limite, c'est-à-dire avec $\eta = 1$, $\dfrac{\tau}{\tau_0} = 0$.

De façon analogue on peut obtenir la valeur de la dérivée

$$\frac{\partial^2\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)}{\partial\eta^2}=0 \text{ avec } \eta=0.$$

En se limitant dans l'expression (XI.81) à trois termes seulement, utilisons les trois premières conditions pour la détermination des coefficients A_0, A_1 et A_2:

$$A_0=1; \quad A_1=A=\frac{\delta}{\tau_0}\frac{dp}{dx}; \quad A_2=-(1+A).$$

Alors

$$\frac{\tau}{\tau_0}=1+A\eta-(1+A)\eta^2, \qquad \text{(XI.82)}$$

d'où l'on voit que la forme du profil de la contrainte tangentielle (ainsi que du profil des vitesses) se détermine par la grandeur A, qui est dite facteur de forme.

Le polynôme (XI.82) est valable pour l'approximation du profil de la contrainte tangentielle seulement pour des valeurs de A telles où $\tau/\tau_0 \geqslant 0$. La gamme des paramètres A admissibles est limitée par la valeur de ce paramètre telle que la dérivée de τ/τ_0 au point $\eta = 1$ change de signe, c'est-à-dire que l'angle entre la tangente à la courbe τ/τ_0 et l'axe η devient égal à zéro. D'où il suit que le paramètre A peut varier dans les limites de -2 jusqu'à ∞, c'est-à-dire que l'approximation (XI.82) est valable pour de faibles gradients négatifs et n'importe quels gradients positifs de la pression dans le fluide libre.

Il importe de remarquer que la distribution de la contrainte tangentielle transversalement à la couche, décrite par le polynôme (XI.82), se rapporte aussi bien à la couche laminaire qu'à la couche turbulente; elle est applicable en particulier aussi à la région de la sous-couche visqueuse.

Exprimons ensuite la contrainte de frottement τ au moyen de la loi (IX.20)

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2, \tag{XI.83}$$

qui établit la relation entre le frottement turbulent et le gradient de la vitesse moyenne. Suivant les données expérimentales de Nikuradse, utilisons pour la détermination de la longueur du mélange dans (XI.83) la formule (XI.26), en y remplaçant r_0 par l'épaisseur δ de la couche limite

$$\frac{l}{\delta} = 0{,}14 - 0{,}08\,(1-\eta)^2 - 0{,}06\,(1-\eta)^4. \tag{XI.84}$$

C. Fédiaevski a montré que la formule (XI.84) avec une certaine erreur peut s'employer également en présence du gradient de la pression dans le fluide libre. Si l'on connaît la distribution de la contrainte tangentielle τ en travers de la couche limite, alors de la formule (XI.83), en passant à la variable η et en intégrant, on peut obtenir le profil de la vitesse dans le noyau turbulent de la couche limite

$$\frac{v_x}{v^*} = \int \frac{\delta}{l} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}\, d\eta + C, \tag{XI.85}$$

où τ_0 est la contrainte tangentielle sur la paroi; C la constante qui s'obtient de la condition limite.

En substituant les polynômes (XI.82) et (XI.84) dans la formule (XI.85) et en déterminant la constante d'intégration C à partir de la condition $v_x = v$ avec $\eta = 1$, nous obtenons la formule du profil de la vitesse dans la partie turbulente de la couche limite

$$\frac{v - v_x}{v^*} = \int\limits_{\eta}^{1} \frac{\sqrt{1 + A\eta - (1+A)\,\eta^2}}{0{,}14 - 0{,}08\,(1-\eta)^2 - 0{,}06\,(1-\eta)^4}\, d\eta. \tag{XI.86}$$

La grandeur $\psi^* = (v - v_x)/v^*$, correspondant à la relation générale (X.36) et dite défaut de vitesse, est fonction d'un seul paramètre A.

En même temps la vitesse relative

$$\frac{v_x}{v} = 1 - \frac{v^*}{v}\psi^* \tag{XI.87}$$

est fonction de deux paramètres A et v^*/v. On en déduit que toutes les caractéristiques intégrales de la couche limite, pour le calcul desquelles on utilise les profils de la vitesse, sont également fonctions de deux paramètres. En cas des valeurs finies de A, la fonction ψ^* et par conséquent le profil de la vitesse ont une singularité logarithmique avec $\eta = 0$.

Envisageons le comportement de la fonction ψ^* au voisinage du point de décollement, où $v^* \to 0$ et $A \to \infty$. Notons qu'avec $v^* \to 0$ le produit $\left(\frac{v^*}{v}\right)^2 A = \frac{\tau_0}{\rho v^2}\frac{\delta}{\tau_0}\frac{dp}{dx}$ tend vers une valeur finie, égale à $\delta/\rho v^2\, dp/dx$.

En évaluant les termes sous le radical dans l'égalité (XI.86), nous trouvons qu'au voisinage du point de décollement le profil de la vitesse dans la couche limite turbulente s'exprime par la formule

$$\frac{v_x}{v} = 1 - p^* \int_\eta^1 \frac{\sqrt{\eta - \eta^2}}{\frac{l}{\delta}}\, d\eta, \tag{XI.88}$$

où $p^* = \frac{1}{v}\sqrt{\frac{\delta}{\rho}\frac{dp}{dx}}$.

D'où il résulte qu'au voisinage du point de décollement, où $\tau_0 \to 0$ et $A \to \infty$, le profil de la vitesse est déterminé par un seul paramètre $p^{*2} = \frac{\delta}{\rho v^2}\frac{dp}{dx}$.

Au voisinage immédiat de la paroi solide, les pulsations turbulentes s'amortissent et il se forme une sous-couche visqueuse. Trouvons la distribution de la vitesse suivant son épaisseur. A une faible distance de la paroi, la contrainte de frottement peut être représentée sous la forme d'une série

$$\tau = \tau_0 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}\right)_0 \frac{y^2}{2} + \dots$$

Comme il a été noté, avec $\eta = 0$, c'est-à-dire $y = 0$,

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{dp}{dx}; \qquad \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0.$$

De ce fait, en se limitant à trois membres de la série, nous trouvons

$$\tau = \tau_0 + \frac{dp}{dx} y.$$

Dans la sous-couche visqueuse la contrainte de frottement est liée au gradient transversal de la vitesse par la formule de Newton

$$\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

En la substituant dans l'expression de τ, après intégration et transformations simples, il vient

$$\mu v_x = \tau_0 y + \frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2}$$

ou sous la forme sans dimensions

$$\frac{v_x}{v^*} = R_1\eta + \frac{1}{2}AR_1\eta^2, \qquad \text{(XI.89)}$$

où $R_1 = v^*\delta/\nu$.

Le profil de la vitesse dans la sous-couche visqueuse (XI.89) doit se transformer en profil turbulent de la vitesse (XI.87) quand le nombre de Reynolds, calculé d'après la vitesse locale $v_{x\text{l}}$ et la distance à partir de la paroi δ_l, atteint une certaine valeur critique α_l^2

$$\frac{v_{x\text{l}}\delta_\text{l}}{\nu} = R_1^2\left(\eta_\text{l}^2 + \frac{A}{2}\eta_\text{l}^3\right) = \alpha_\text{l}^2, \qquad \text{(XI.90)}$$

où $\eta_\text{l} = \delta_\text{l}/\delta$, α_l est une constante dont la valeur, trouvée par la comparaison des profils théoriques et expérimentaux de la vitesse dans la partie voisine du noyau turbulent, s'est révélée égale à 10. Si l'on se limite aux termes de l'ordre η^2, alors de l'égalité (XI.90) on peut obtenir la relation pour la détermination de l'épaisseur de la sous-couche visqueuse, analogue à (X.39),

$$\eta_\text{l} = \frac{\alpha_\text{l}}{R_1} \quad \text{ou} \quad \frac{\delta_\text{l} v^*}{\nu} = \alpha_\text{l}.$$

De l'égalité (XI.90) il résulte qu'au point de décollement, où $R_1 \to 0$, l'épaisseur sans dimensions de la sous-couche visqueuse est égale à la grandeur finie

$$\eta_\text{l} = \sqrt[3]{\frac{2\alpha_\text{l}^2}{\text{Re}_\delta^2 p^{*2}}},$$

où $\text{Re}_\delta = v\delta/\nu$.

Sur la frontière de la sous-couche visqueuse le profil de la vitesse doit être continu, c'est-à-dire la grandeur de la vitesse, trouvée d'après les formules (XI.87) et (XI.89), doit être identique. Cette condition permettra de déterminer la liaison entre la contrainte tangentielle sur la paroi et l'épaisseur de la couche limite, c'est-à-dire la loi de la résistance

$$\frac{v}{v^*} = R_1\eta_\text{l}\left(1 + \frac{A}{2}\eta_\text{l}\right) + \psi^*.$$

En substituant dans cette égalité à $R_1\eta_1$ la grandeur tirée de la relation (XI.90), représentons la loi de la résistance sous la forme

$$\frac{v}{v^*}=\frac{1}{\alpha_1\sqrt{1+\frac{A}{2}\eta_1+\psi^*}}. \qquad \text{(XI.91)}$$

La plus grande difficulté dans le calcul des caractéristiques de l'écoulement dans la couche limite consiste à déterminer l'intégrale qui figure au deuxième membre de l'égalité (XI.86). Pour chaque valeur de la limite inférieure variable de η le calcul de cette intégrale s'effectuait sur un ordinateur. Les grandeurs trouvées de ψ^* ont été ensuite utilisées pour le calcul des caractéristiques intégrales de la couche limite suivant les relations

$$\frac{\delta^*}{\delta}=\int_0^1\left(1-\frac{v_x}{v}\right)d\eta=\frac{v^*}{v}I_1; \qquad \text{(XI.92)}$$

$$\frac{\delta^{**}}{\delta}=\int_0^1\frac{v_x}{v}\left(1-\frac{v_x}{v}\right)d\eta=\frac{v^*}{v}I_1-\left(\frac{v^*}{v}\right)^2 I_2, \qquad \text{(XI.93)}$$

où $I_1=\int_0^1\psi^* d\eta;\ I_2=\int_0^1\psi^{*2}d\eta.$

Dans ces formules, pour l'intégration sur le tronçon $0<\eta\leqslant\eta_1$ il est indispensable d'utiliser les profils de la vitesse de la sous-couche visqueuse, et sur le tronçon $\eta_1\leqslant\eta\leqslant 1$, les profils turbulents de la vitesse. Finalement, les intégrales I_1 et I_2 prennent la forme

$$I_1=\int_{\eta_1}^1\psi^* d\eta+\Phi_1(A,\ \eta_1);\qquad I_2=\int_{\eta_1}^1\psi^{*2}d\eta+\Phi_2(A,\ \eta_1),$$

où

$$\Phi_1=\eta_1\left[\psi^*(A,\ \eta_1)+\alpha_1\sqrt{1+\frac{A}{2}\eta_1}\right]-\frac{\alpha_1\eta_1}{2\sqrt{1+\frac{A}{2}\eta_1}}\left(1+\frac{A}{3}\eta_1\right);$$

$$\Phi_2=\eta_1\left[\left(\psi+\alpha\sqrt{1+\frac{A}{2}\eta_1}\right)^2-2\alpha_1\left(\psi+\alpha_1\sqrt{1+\frac{A}{2}\eta_1}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1+\frac{A}{3}\eta_1}{2\sqrt{1+\frac{A}{2}\eta_1}}+\frac{\alpha_1^2}{1+\frac{A}{2}\eta_1}\left(\frac{1}{3}+\frac{A}{4}\eta_1+\frac{A^2}{20}\eta_1^2\right)\right].$$

En vertu des formules (XI.92) et (XI.93), on peut exprimer le paramètre $H = \delta^*/\delta^{**}$ par v^*/v et les intégrales I_1 et I_2

$$H = \frac{1}{1 - \frac{I_1}{I_2}\frac{v^*}{v}}. \tag{XI.94}$$

En tenant compte de ce que le nombre Re** peut être représenté sous la forme $\mathrm{Re}^{**} = \frac{\delta^{**}v}{\nu} = \frac{\delta^{**}}{\delta}\frac{\delta v^*}{\nu}\frac{v}{v^*}$ et en utilisant les formules obtenues ci-dessus pour $\frac{\delta^{**}}{\delta}$ et $R_1 = \frac{\delta v^*}{\nu}$, nous trouvons la liaison entre Re** et l'épaisseur sans dimensions de la sous-couche visqueuse η_1

$$\mathrm{Re}^{**} = \frac{\alpha_1\left(I_1 - \frac{v^*}{v} I_2\right)}{\eta_1\sqrt{1 + \frac{A}{2}\eta_1}}. \tag{XI.95}$$

L'examen des formules de calcul établies ci-dessus permet d'avoir une idée nette de l'ordre de calcul de toutes les caractéristiques intégrales.

En se donnant une série de valeurs relatives à l'épaisseur de la sous-couche visqueuse, on peut calculer d'après les formules (XI.91)-(XI.94) pour chaque valeur fixée du paramètre les caractéristiques de la couche limite $c_f = 2\left(\frac{v^*}{v}\right)^2$; H; $H^* = \frac{\delta^*}{\delta}$; $H^{**} = \frac{\delta^{**}}{\delta}$, et par la formule (XI.95), trouver les nombres de Reynolds Re** correspondant à ces résultats.

De plus, on a calculé la grandeur nécessaire à la résolution de l'équation intégrale

$$fc_f = -2A\left(\frac{v^*}{v}\right)^3\left(I_1 - \frac{v^*}{v} I_2\right), \tag{XI.96}$$

où $f = \frac{2\delta^{**}}{c_{f_0}}\frac{v'}{v}$, c_{f_0} est le coefficient de frottement local de la plaque plane, correspondant aux mêmes valeurs de δ^{**} et de v que c_f.

Elucidons la mesure dans laquelle les profils de la vitesse et la loi de la résistance concordent avec les données des expériences.

La fig. XI.19 donne la comparaison des profils du défaut de vitesse pour la couche limite sur des plaques lisse et rugueuse (*a*) et pour les couches limites dites équilibrées (*b*). Dans les deux cas les résultats du calcul concordent parfaitement avec les données expérimentales.

Comme il ressort de la fig. XI.20,*a*, les profils théoriques de la vitesse $\frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{v}\left(H, \frac{y}{\delta^{**}}\right)$ se confondent pratiquement avec la famil-

le de profils généralisée empirique. Même dans la section de la couche limite qui précède immédiatement le point de décollement où

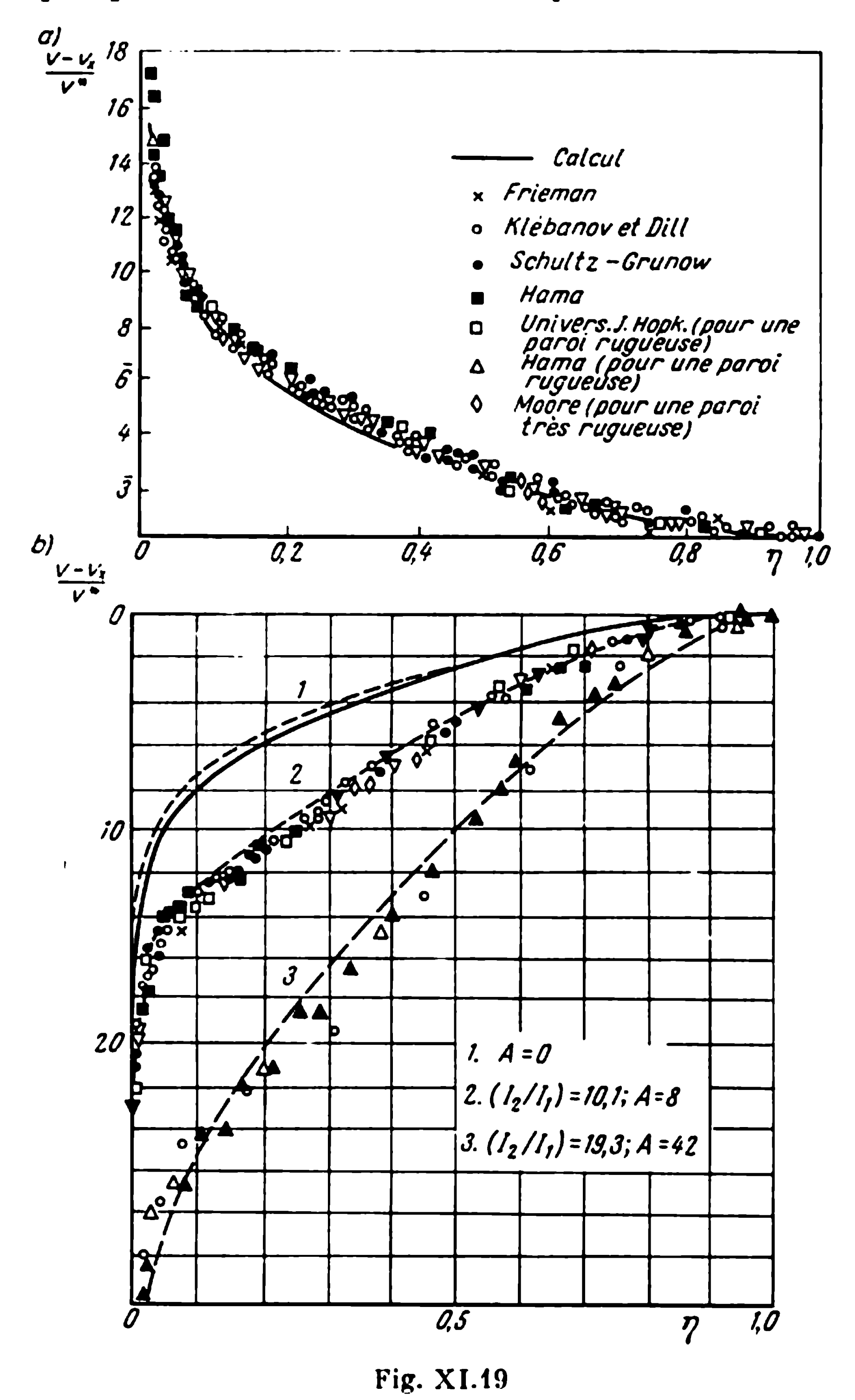


Fig. XI.19

$A = 4000$ (fig. XI.20,*b*), le calcul montre de façon suffisamment claire la distribution réelle de la vitesse $v_x/v = f(\eta)$.

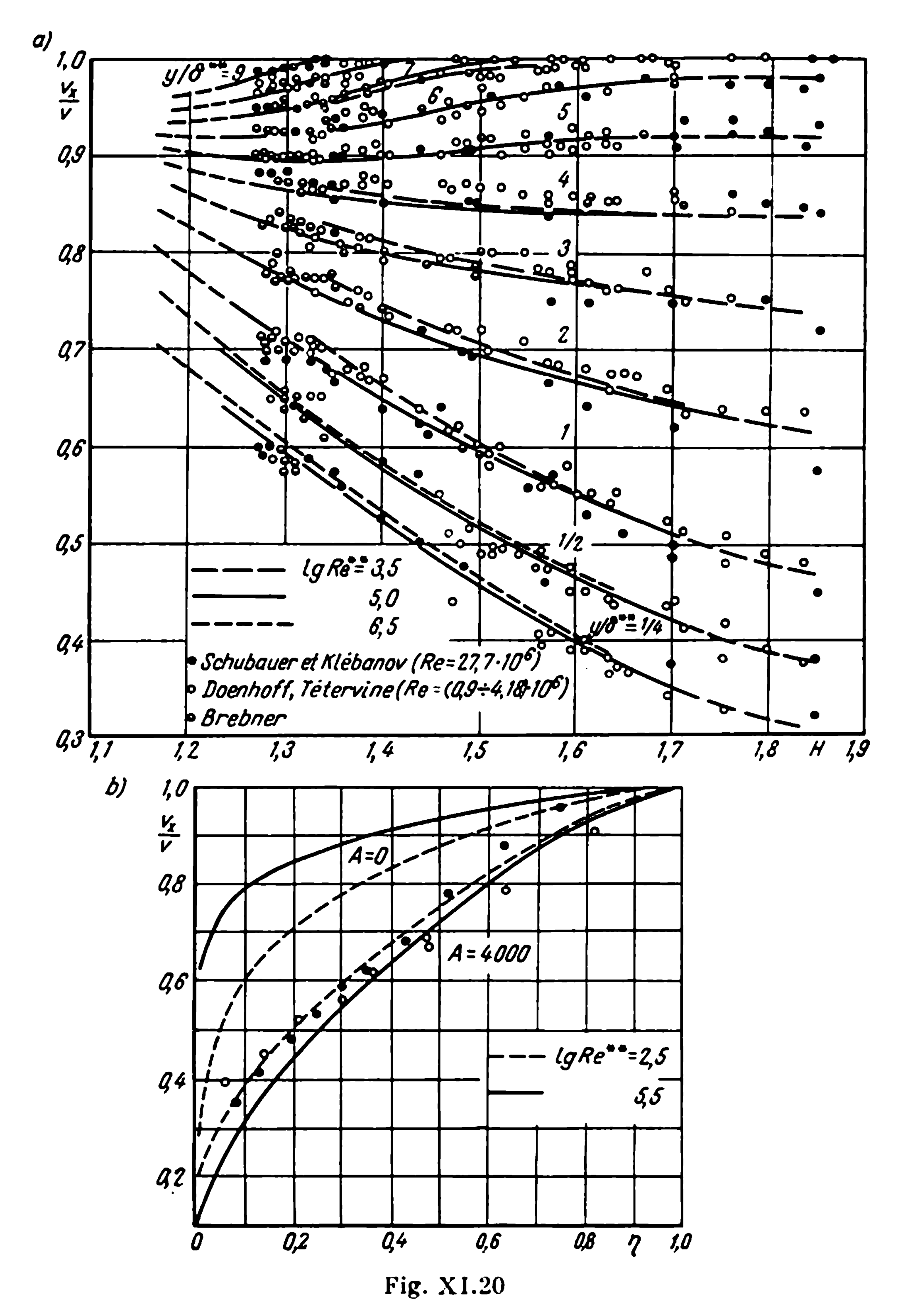


Fig. XI.20

Une comparaison analogue pour la loi de la résistance est donnée sur la fig. XI.21. On voit d'après cette figure qu'en écoulement sans gradient la meilleure concordance entre les relations calculée et

expérimentale de c_f de Re** s'obtient pour la même valeur de la constante empirique $\alpha_l \approx 10$ qui a été trouvée d'après la comparaison des profils de la vitesse. Avec des gradients de pression positifs, les coefficients de frottement calculés c_f sont également assez proches de ceux expérimentaux.

De cette façon, les résultats du calcul reflètent suffisamment bien les relations qui existent entre les caractéristiques locales de la

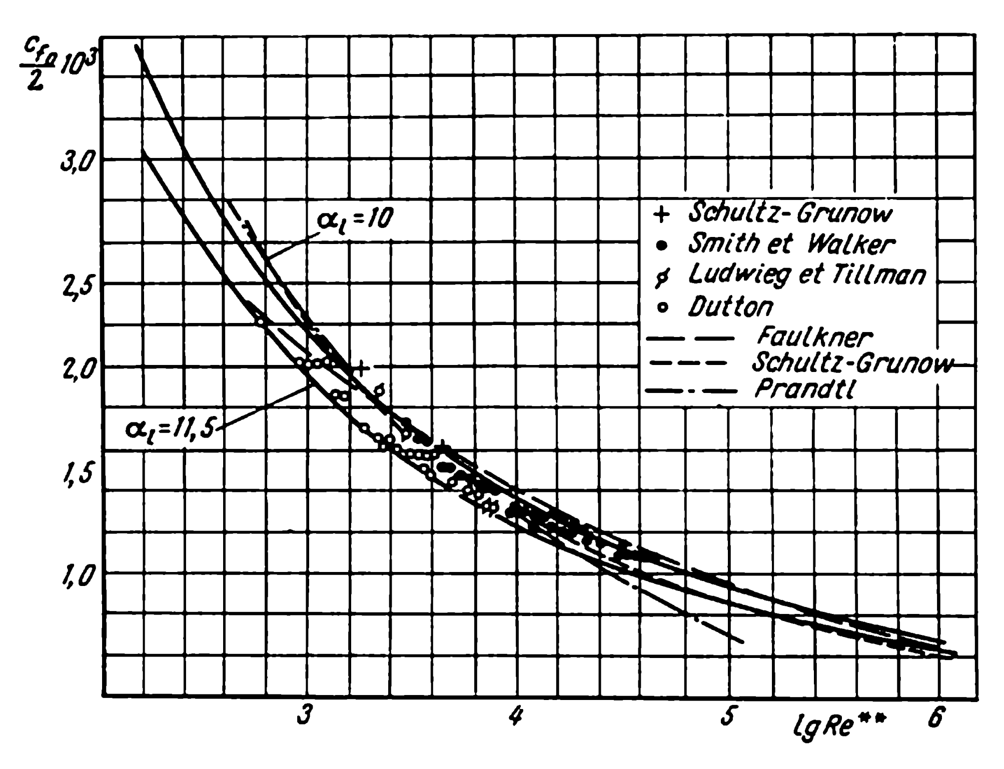


Fig. XI.21

couche limite turbulente. Par suite, il est avantageux d'utiliser les données obtenues pour la détermination du paramètre $H = \delta^*/\delta^{**}$ et du coefficient de frottement local c_f dans l'équation intégrale des impulsions (XI.36)

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}+\frac{v'}{v}\delta^{**}(2+H)=\frac{c_f}{2}.$$

Les graphiques des grandeurs c_f/c_{f_0} et $H = \delta^*/\delta^{**}$ sont montrés sur la fig. XI.22. Ici c_{f_0} est le coefficient de frottement local d'une plaque plane correspondant aux mêmes valeurs de l'épaisseur de la perte d'impulsions δ^{**} et de la vitesse v que c_f, $f = \frac{2\delta^{**}}{c_{f_0}}\frac{v'}{v}$ est le facteur de forme.

En calculant sur l'ordinateur des caractéristiques de la couche limite turbulente, il est avantageux de présenter les relations montrées sur la fig. XI.22 sous la forme analytique. Compte tenu de ce

fait, on a choisi les formules d'interpolation décrivant ces graphiques dans la gamme des nombres ξ = lg Re** de 2,2 jusqu'à 6,5

$$\begin{aligned} \frac{c_f}{c_{f_0}} &= 1 + a_1 f + a_2 (e^{a_3 f} - 1), \\ H &= H_0 (1 - a_4 f) - 0{,}019 f e^f \xi, \end{aligned} \qquad \text{(XI.97)}$$

où

$$c_{f_0} = 2c \, \mathrm{Re}^{**-0{,}17}$$

$$c = 0.001 \, [6{,}55 - 0{,}0685 (\xi - 4{,}4) + 0{,}2506 (\xi - 4{,}4)^2],$$

$$a_1 = 0{,}2814 - 0{,}036\xi + 36\xi^{-4{,}5},$$

$$a_2 = 0{,}1185\xi - 0{,}262,$$

$$a_3 = 0{,}585 - 0{,}125\xi + 20{,}4\xi^{-1{,}75},$$

$$a_4 = 0{,}28 - 0{,}034\xi + (0{,}1\xi)^9,$$

$$H_0 = 1{,}251 - 0{,}0131\xi + 5{,}35\xi^{-2{,}85},$$

$$\xi = \lg \mathrm{Re}^{**}, \quad \mathrm{Re}^{**} = \frac{\delta^{**} v}{\nu}, \quad f = \frac{2\,\mathrm{Re}^{**}}{c_{f_0}} \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\bar{v}'}{\bar{v}^2},$$

$$\mathrm{Re} = \frac{v_\infty L}{\nu}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_\infty}, \quad \bar{v}' = \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}.$$

Comme la vitesse du fluide libre v est une fonction donnée de la coordonnée longitudinale, les formules (XI.97) permettent d'exprimer le paramètre H et le coefficient de frottement local c_f en fonction de l'épaisseur de la perte d'impulsion δ^{**} ou du nombre de Reynolds Re** correspondant. En substituant, au lieu de H et de c_f, dans l'équation intégrale des impulsions leur expression en fonction de δ^{**} d'après les formules (XI.97), nous obtiendrons une équation différentielle ordinaire pour la détermination de l'épaisseur de la perte d'impulsion. Si l'épaisseur de la perte d'impulsion est définie dans la section initiale $\delta_0^{**} = \delta_0 (x_0)$ on peut alors intégrer cette expression par une des méthodes numériques, déterminer la distribution de l'épaisseur de la perte d'impulsion le long du corps $\delta^{**} = \delta^{**} (x)$ et ensuite calculer les autres caractéristiques de la couche limite : les valeurs du paramètre H, les coefficients de frottement local c_f, la coordonnée du décollement de l'écoulement de la surface du corps lors des chutes de pression positives, correspondant à une valeur $c_f = 0$, etc. Il est commode d'effectuer de tels calculs sur des ordinateurs en utilisant les programmes standard d'intégration des équations différentielles ordinaires.

Pour exécuter les calculs préalables de la couche limite turbulente, il est désirable d'avoir une solution approchée de l'équation intégrale sous la forme d'une quadrature. Compte tenu de ce fait,

transformons l'équation (XI.36) en exprimant l'épaisseur de la perte d'impulsion δ^{**} en fonction du facteur de forme f.

En se servant de la formule du facteur de forme f, transformons l'expression de la dérivée en fonction de l'épaisseur de la perte d'impulsion

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}=\frac{d}{dx}\left(f\frac{v}{v'}\frac{c_{f_0}}{2}\right)=\frac{c_{f_0}}{2}\frac{d}{dx}\left(f\frac{v}{v'}\right)+f\frac{v}{v'}\frac{d}{dx}\left(\frac{c_{f_0}}{2}\right). \quad \text{(XI.98)}$$

Comme le coefficient de frottement local c_{f_0} en cas d'écoulement sans gradient n'est fonction que de Re^{**}, le dernier terme au deuxième membre de cette égalité peut être écrit d'une autre façon

$$f\frac{v}{v'}\frac{d}{dx}\left(\frac{c_{f_0}}{2}\right)=f\frac{v}{v'}\frac{d}{d\,\mathrm{Re}^{**}}\left(\frac{c_{f_0}}{2}\right)\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{dx}=$$
$$=f\frac{v}{v'}\frac{d}{d\,\mathrm{Re}^{**}}\left(\frac{c_{f_0}}{2}\right)\left(\frac{v}{\nu}\frac{d\delta^{**}}{dx}+\delta^{**}\frac{v'}{\nu}\right).$$

En substituant ce résultat dans (XI.98), nous obtenons après des transformations simples

$$\frac{2}{c_{f_0}}(1+m)\frac{d\delta^{**}}{dx}=\frac{d}{dx}\left(f\frac{v}{v'}\right)-fm, \quad \text{(XI.99)}$$

où

$$m=-\frac{d\ln\left(\frac{c_{f_0}}{2}\right)}{d\ln \mathrm{Re}^{**}}.$$

D'autre part, de l'équation intégrale il suit que

$$\frac{2}{c_{f_0}}\frac{d\delta^{**}}{dx}=\frac{c_f}{c_{f_0}}-f(2+H).$$

En multipliant les premier et deuxième membres de cette dernière égalité par $(1 + m)$ et en retranchant membre à membre le résultat obtenu de la relation (XI.99), nous trouvons

$$\frac{d}{dx}\left(f\frac{v}{v'}\right)=(1+m)\frac{c_f}{c_{f_0}}-[1+(1+m)(1+H)]f$$

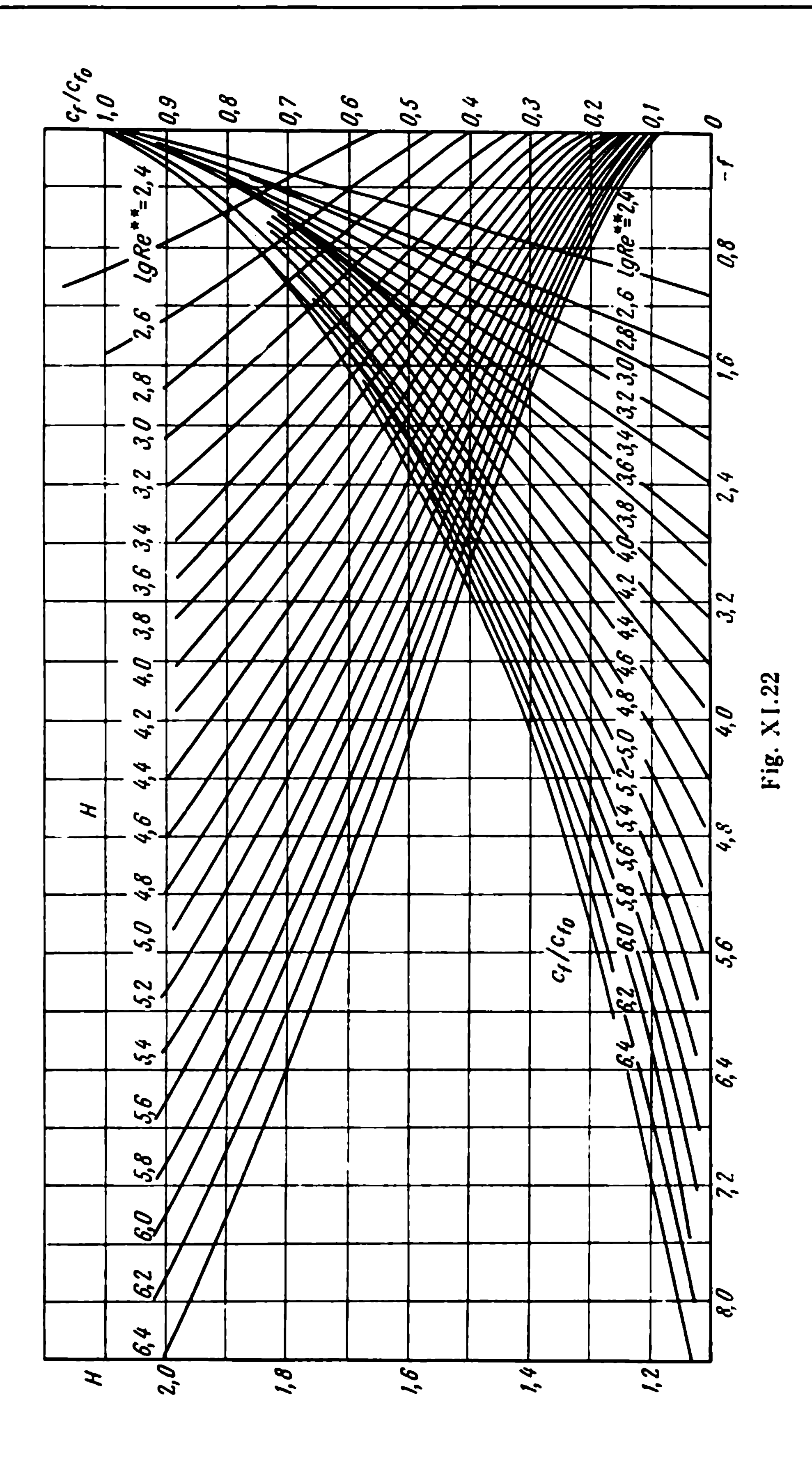
ou

$$\frac{df}{dx}=\frac{v'}{v}F+\frac{v''}{v'}f, \quad \text{(XI.100)}$$

où

$$F(f,\ \mathrm{Re}^{**})=(1+m)\frac{c_f}{c_{f_0}}-[2+(1+m)(1+H)]f.$$

Ainsi, l'équation du facteur de forme f s'est réduite à une forme rappelant l'équation correspondante pour la couche limite laminaire (XI.48). Pourtant la fonction F, figurant au deuxième membre



c_f/c_{f0}
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
$-f$
0,8
1,6
2,4
3,2
4,0
4,8
5,6
6,4
7,2
8,0
H
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
lgRe**=2,4
2,6
2,8
3,0
3,2
3,4
3,6
3,8
4,0
4,2
4,4
4,6
4,8
5,0
5,2
5,4
5,6
5,8
6,0
6,2
6,4
lgRe**=2,4
2,6
2,8
3,0
3,2
3,4
3,6
3,8
4,0
4,2
4,4
4,6
4,8
5,0
5,2
5,4
5,6
5,8
6,0
6,2
6,4
c_f/c_{f0}
H

Fig. XI.22

de l'équation (XI.100), dépend non seulement du facteur de forme mais aussi du nombre Re**.

Etudions les possibilités de la linéarisation de cette fonction.

Les graphiques des grandeurs c_f/c_{f_0} et H figurant au deuxième membre de l'équation (XI.100) sont représentés sur la fig. XI.22.

La loi de la résistance pour la couche limite turbulente sur une plaque ne se réduit pas, strictement parlant, à une fonction puissance c_{f_0} de Re**. Cependant, sur certains intervalles de variation de Re** on peut approximer la courbe (XI.21) par des lignes droites et obtenir des formules puissances approchées liant c_{f_0} et Re**. Ainsi, en admettant une erreur ne dépassant pas 2 %, on peut considérer que

avec

$$\lg \mathrm{Re}^{**}=2{,}2-4{,}0 \quad \frac{c_{f_0}}{2}=0{,}01033\,\mathrm{Re}^{**-0{,}222}; \qquad \text{(XI.101)}$$

avec

$$\lg \mathrm{Re}^{**}=3{,}0-5{,}5 \quad \frac{c_{f_0}}{2}=0{,}0073\,\mathrm{Re}^{**-0{,}179}; \qquad \text{(XI.102)}$$

avec

$$\lg \mathrm{Re}^{**}=4{,}0-6{,}5 \quad \frac{c_{f_0}}{2}=0{,}00521\,\mathrm{Re}^{**-0{,}148}. \qquad \text{(XI.103)}$$

On doit noter que l'approximation obtenue pour lg Re** = 3,0 à 5,5 est proche de la formule de Faulkner (XI.77).

Suivant les résultats, représentés sur la fig. XI.22, on a construit la dépendance (fig. XI.23) du rapport F/F_0 ($F_0 = 1 + m = F_{f=0}$) du facteur de forme f.

Avant tout, il faut faire attention à ce que les courbes qui correspondent aux diverses valeurs de Re** diffèrent très peu entre elles. Seulement dans la zone qui précède le point de décollement on observe une certaine différence entre les valeurs de F/F_0 pour différents nombres Re**, atteignant 3 à 4 %. Avec une précision suffisante dans la pratique, on peut considérer que le rapport F/F_0 ne dépend pas de Re** et n'est fonction que du facteur de forme f.

Ensuite, sur la fig. XI.23 on voit que la fonction F/F_0 est représentée par une courbe coulante qui pour des valeurs pas trop élevées du facteur de forme $|f| \leqslant 2$ dévie peu de la ligne droite. Seulement pour de grands, en valeurs absolues, facteurs de forme f, son inclinaison augmente quelque peu. Avec une précision admissible, la courbe F/F_0 peut être approximée par deux segments de ligne droite, montrés sur la fig. XI.23

$$F=F_0(a+bf), \qquad \text{(XI.104)}$$

où $a = 1$; $b = 4$ avec $|f| \leqslant 2$; $a = 0$; $b = 4{,}57$ avec $|f| > 1{,}5$.

La dépendance de la fonction F_0 de lg Re** est montrée sur la fig. XI.23. Il résulte de cette dépendance qu'avec la variation de Re** de plus de mille fois F_0 ne change que d'environ 10 %. Pour cette raison, dans les calculs pratiques le paramètre F_0 peut être admis constant, dépendant de la valeur initiale du nombre Re**.

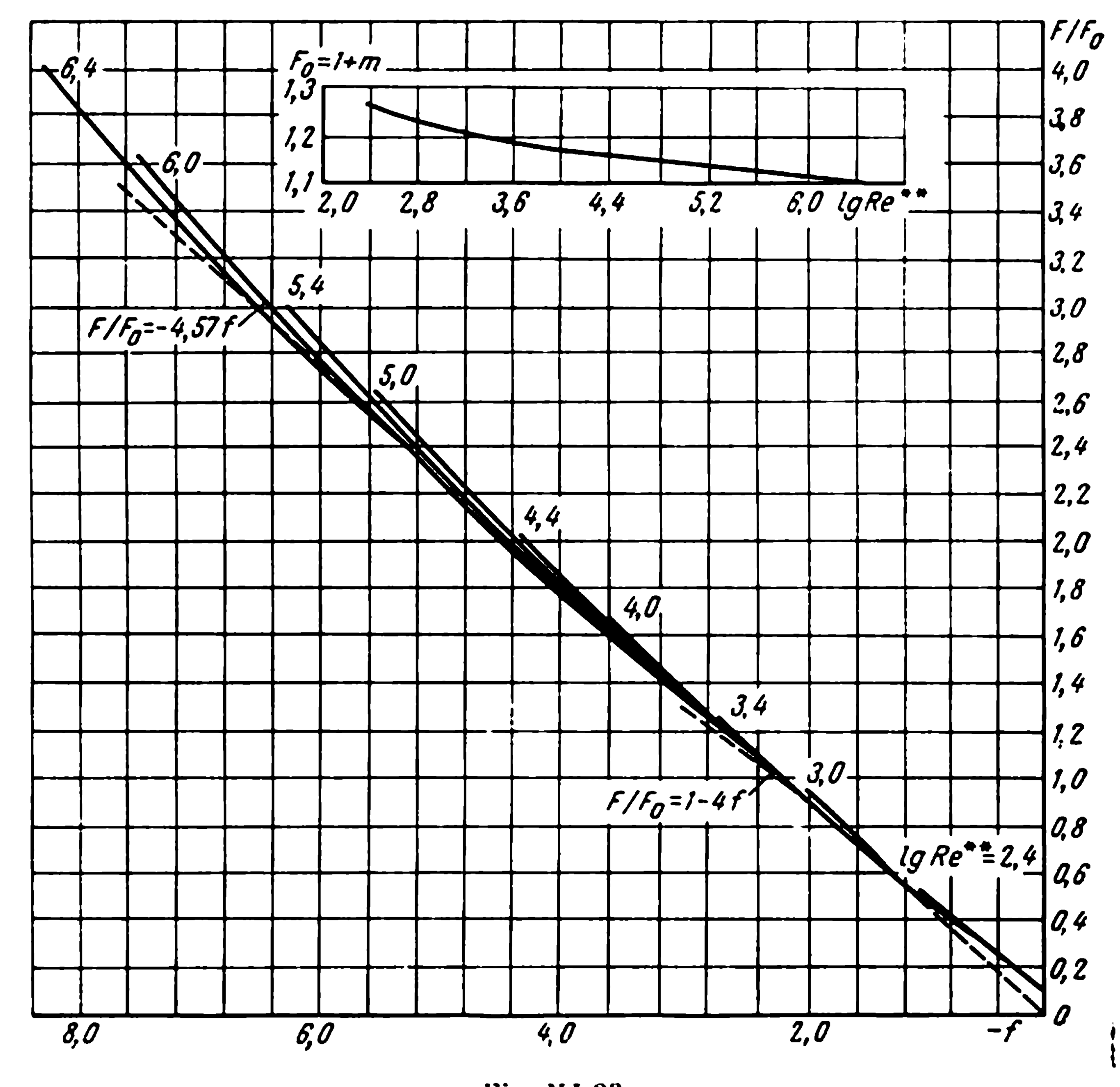


Fig. XI.23

En substituant l'approximation linéaire (XI.104) dans l'équation (XI.100), nous obtenons

$$f(x)=\frac{v'}{v^{bF_0}}\left[C+aF_0\int v^{bF_0-1}(x)\,dx\right]. \qquad \text{(XI.105)}$$

Si la couche limite turbulente commence à partir du bord avant du profil, alors la constante arbitraire $C = 0$ et la solution, après

passage aux variables sans dimensions, prend la forme

$$f(x)=\frac{aF_0\bar{v}'}{\bar{v}^{bF_0}}\int_0^{\bar{x}}\bar{v}^{bF_0-1}(\bar{x})\,d\bar{x}. \qquad \text{(XI.106)}$$

où $\bar{v}=\frac{v}{v_\infty}$; $\bar{x}=\frac{x}{L}$; $\bar{v}'=\frac{d\bar{v}}{d\bar{x}}$; v_∞ est la vitesse à l'infini.

Le point critique est un point singulier de l'équation. La valeur du facteur de forme en ce point peut être trouvée, comme d'habitude, d'après la condition du caractère fini de la dérivée df/dx

$$f(0)=\frac{a}{b}=0{,}25.$$

Si le calcul de la couche limite turbulente commence à partir du point de transition d'abscisse x_t en lequel les valeurs de la vitesse v_t, de sa dérivée v_t' et du facteur de forme f_t sont connues, la relation (XI.105) pourra être transformée sous la forme suivante

$$f(x)=\frac{\bar{v}'}{\bar{v}^{bF_0}}\left[\frac{\bar{v}^{bF_0}}{\bar{v}'}f+aF_0\int_{\bar{x}_t}^{\bar{x}}\bar{v}^{bF_0-1}(\bar{x})\,d\bar{x}\right]. \qquad \text{(XI.107)}$$

Si dans cette formule on remplace le facteur de forme f par son expression (XI.97) et on substitue au coefficient de frottement c_{f_0} ses relations trouvées (XI.101)-(XI.103), on peut obtenir la formule pour le calcul du nombre de Reynolds Re**. Ainsi, pour une gamme de variation lg Re** = 2,2 à 4,0, en adoptant $F_0 = 1{,}222$, on trouve avec $|f| \leqslant 2$

$$\mathrm{Re}^{**}=\frac{1}{\bar{v}^{2,365}}\left[v_t^{2,89}\,\mathrm{Re}_t^{1,222}+0{,}01263\,\mathrm{Re}\int_{\bar{x}_t}^{\bar{x}}\bar{v}^{3,89}(\bar{x})\,d\bar{x}\right]^{0,818} \qquad \text{(XI.108)}$$

avec $|f| \geqslant 1{,}5$

$$\mathrm{Re}^{**}=\left(\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}}\right)^{2,95}\mathrm{Re}_1^{**}. \qquad \text{(XI.109)}$$

où v_1 et Re_1^{**} sont les valeurs de la vitesse et du nombre de Reynolds au point du profil à partir duquel commence le calcul suivant la formule (XI.109).

On commence le calcul d'après la première formule (XI.108). Suivant les nombres Re** on détermine les valeurs du facteur de forme f. Dans ce cas l'expression (XI.97) du facteur de forme peut être écrite sous la forme

$$f=-96{,}7\,\mathrm{Re}^{**1,222}Q. \qquad \text{(XI.110)}$$

où $Q=-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\bar{v}'}{\bar{v}^2}$.

Dans la seconde gamme lg Re** = 3 à 5,5, en posant $F_0 = 1{,}179$, nous aurons

avec $|f| \leqslant 2$

$$\mathrm{Re}^{**} = \frac{1}{\bar{v}^{2,31}} \left[\bar{v}_t^{2,72} R_t^{**1,179} + 0{,}00861\, \mathrm{Re} \int_{\bar{x}_t}^{\bar{x}} \bar{v}^{3,72}(\bar{x})\, d\bar{x} \right]^{0,848}; \quad \text{(XI.111)}$$

avec $|f| \geqslant 1{,}5$

$$\mathrm{Re}^{**} = \left(\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}} \right)^{2,875} \mathrm{Re}_1^{**} \quad \text{(XI.112)}$$

et

$$f = -137\, \mathrm{Re}^{**1,179} Q. \quad \text{(XI.113)}$$

Pour la troisième gamme lg Re** = 4 à 6,5, les formules analogues auront la forme:

avec $|f| \leqslant 2$

$$\mathrm{Re}^{**} = \frac{1}{\bar{v}^{2,26}} \left[\bar{v}_t^{2,59}\, \mathrm{Re}_t^{**1,148} + 0{,}00598\, \mathrm{Re} \int_{\bar{x}_t}^{\bar{x}} \bar{v}^{3,59}(\bar{x})\, d\bar{x} \right]^{0,871};$$

(XI.114)

avec $|f| \geqslant 1{,}5$

$$\mathrm{Re}^{**} = \left(\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}} \right)^{2,83} \mathrm{Re}_1^{**} \quad \text{(XI.115)}$$

et

$$f = -192\, \mathrm{Re}^{**1,148} Q. \quad \text{(XI.116)}$$

Si l'on doit trouver les coefficients de frottement c_f ou le paramètre H, il faut déterminer la variation de f d'après x et relever ensuite les valeurs requises sur les graphiques correspondants de la fig. XI.22.

Outre la méthode énoncée, il existe d'autres méthodes de calcul de la couche limite turbulente. Les méthodes basées sur l'utilisation des équations empiriques du coefficient de frottement local et du rapport de l'épaisseur de refoulement δ^* à l'épaisseur de la perte d'impulsion δ^{**} ont trouvé une grande extension. Il existe également des méthodes basées sur l'hypothèse de l'existence d'une certaine analogie entre les couches laminaire et turbulente [15]. Toutefois, les méthodes basées sur les théories semi-empiriques de la turbulence se généralisent facilement, par exemple pour le cas d'un mouvement de translation varié, d'un écoulement autour des corps de révolution, etc.

En particulier, en explorant la couche limite non stationnaire d'une plaque en mouvement uniformément accéléré, A. Guinevski et C. Fédiaevski ont mis en évidence un paramètre combiné

$$\frac{\rho v_\infty^3}{\mu \frac{dv_\infty}{dt}},$$

où v_∞ est la vitesse de déplacement de la plaque.

Ce paramètre caractérise le rapport des forces de frottement supplémentaires, dues à la non-stationnarité de l'écoulement, aux forces d'inertie. Les points expérimentaux correspondant aux coefficients de la force de frottement supplémentaire ΔC_f et construits suivant ce paramètre se situent bien sur une courbe unique.

§ 73. ÉCOULEMENT AUTOUR DES SURFACES RUGUEUSES

La rugosité de la surface contournée par un courant de fluide visqueux peut exercer une influence notable sur les caractéristiques de la couche limite et, en particulier, sur la résistance.

En tenant compte de la diversité des formes de rugosité, il est indispensable d'effectuer leur classification.

On peut classer toutes les rugosités en unitaires et régulières. Parmi les premières on distingue celles qui apparaissent à la suite de la formation sur la surface d'une cavité ou d'une aspérité. Aux rugosités régulières se rapportent avant tout celles dans les dimensions desquelles (hauteur des aspérités, leur écart) il existe un certain système, par exemple la rugosité due aux rivets disposés dans un certain ordre. Aux rugosités régulières on peut rapporter également celles dues à la peinture irrégulière de la surface, car la hauteur des aspérités et leur écart peuvent être considérés en moyenne comme égaux sur toute la surface. Les rugosités de ce type sont dites statistiquement régulières. Pour les calculs, on peut les considérer comme des rugosités régulières aux dimensions égales aux dimensions correspondantes moyennes.

De plus, les rugosités régulières doivent être subdivisées en locales et générales.

Par les rugosités locales on entend des aspérités séparées telles qui, tout en augmentant la résistance de la surface au prix de leur propre résistance, influent relativement peu sur le frottement du fluide contre la partie lisse de la surface et sur la résistance des autres aspérités. Ainsi, la résistance de la surface d'un tel type de la rugosité peut être déterminée comme la somme de la résistance de la partie lisse de la surface et de la résistance des aspérités. La résistance de la partie lisse peut être calculée en tenant compte du changement

intervenu dans la structure de la couche limite dû à l'influence des aspérités.

Par la rugosité générale nous entendrons une telle rugosité dans laquelle la résistance des aspérités dépasse tellement la résistance de la partie lisse que l'on puisse négliger cette dernière, en considérant toute la résistance due à la résistance des aspérités.

Pour simplifier, nous nous bornerons à l'examen de l'influence de la rugosité sur la résistance des plaques.

La hauteur des aspérités de la rugosité générale, leur forme et leur écart dépendent notablement du caractère de traitement mécanique

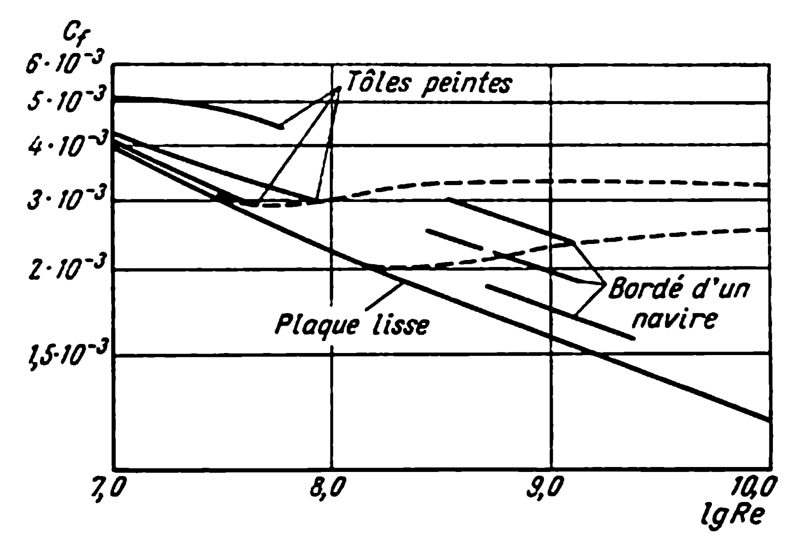


Fig. XI.24

de la surface et surtout de la nature et du mode de la peinture. Le traitement des profilogrammes relevés sur des surfaces peintes, y compris les tôles des coques des navires, montre que par son caractère la rugosité technique ordinaire se rapproche des micro-ondulations. La majorité des études théoriques et expérimentales sur l'écoulement autour des surfaces rugueuses ont été effectuées conformément à ce que l'on appelle rugosité granuleuse régulière, créée par une distribution régulière des grains de sable homogènes sur une surface. Les expériences montrent que le caractère de l'influence sur les résistances de la rugosité granuleuse et de la rugosité technique est différent. Cela est confirmé par la fig. XI.24 où sont comparées les données des expériences relatives à l'influence de différentes peintures sur la résistance des tôles de la coque d'un navire avec les courbes de la résistance des plaques, construites dans l'hypothèse de la rugosité granuleuse.

Pour calculer l'influence de la rugosité générale sur la résistance des plaques, on peut faire appel, comme dans le cas de l'écoulement autour d'une plaque lisse, aux résultats de l'étude des écoulements

dans des tubes rugueux, c'est-à-dire à l'analogie entre les problèmes intérieur et extérieur. Cependant, notons que cette analogie n'est valable que pour une section donnée, c'est-à-dire c'est comme si aux sections différentes sur la longueur de la couche limite correspondaient des tubes de différents diamètres à rugosité relative différente. Par conséquent, le long de la couche limite divers régimes d'écoulement autour des aspérités peuvent avoir lieu, et ceci suivant le rapport entre l'épaisseur de la sous-couche visqueuse et la hauteur moyenne des aspérités k_a, ce qui complique beaucoup le calcul.

Etant donné qu'au voisinage du bord avant de la plaque la couche limite est relativement mince et, par conséquent, la sous-couche visqueuse aussi, les aspérités disposées dans la partie avant influent plus sur la résistance que celles disposées dans la partie arrière. La hauteur admissible $k_{a\,ad}$ des aspérités de la rugosité granuleuse générale pour laquelle elles sont contournées suivant le premier régime et n'augmentent pas la résistance de la surface rugueuse par rapport à celle lisse se détermine, par analogie aux tubes, approximativement d'après la condition $\frac{v^* k_{a\,ad}}{\nu} \leqslant 5$, la grandeur $k_{a\,ad}$ augmentant au fur et à mesure de l'éloignement de l'extrémité avant de la plaque.

Pour le calcul de la couche limite le long d'une plaque à rugosité générale, on peut utiliser l'équation intégrale (XI.36), où par τ_0 on entend la résistance totale du tronçon de la surface rugueuse rapportée à l'unité de surface, qui en cas d'un petit écart entre les aspérités peut être calculée par la formule

$$\tau_0 = nR_a,$$

où n est le nombre d'aspérités par unité de surface de la plaque, R_a la résistance des aspérités isolées compte tenu de leur influence réciproque.

Le plus simple est le cas où l'on peut compter que sur toute l'étendue de la plaque les aspérités sont contournées par le fluide avec décollement et leur propre coefficient de résistance ne dépend pas du nombre Re, comme cela a été observé en troisième régime d'écoulement autour d'elles dans les tubes. Pour le cas en question V. Droblenkov a proposé une relation puissance simple pour τ_0, c'est-à-dire la loi de la résistance de la surface rugueuse

$$\tau_0 = 0{,}0031 \left(\frac{\delta^{**}}{k_a}\right)^{-1/6} \rho v_\infty^2.$$

En partant de cette relation et de l'équation (XI.38), nous trouvons que le long de la plaque plane

$$\delta^{**} = 0{,}008x \left(\frac{x}{k_a}\right)^{-1/7}$$

et en vertu de la formule (XI.40)

$$C_f = 0{,}0162\left(\frac{L}{k_a}\right)^{-1/7}, \qquad \text{(XI.117)}$$

où L est la longueur de la plaque.

En utilisant les matériaux des essais de Nikuradse sur les tubes à surface rugueuse et en tenant compte de l'analogie entre les problèmes intérieur et extérieur, Prandtl et Schlichting ont effectué les calculs des coefficients de résistance de frottement des plaques planes rugueuses, dont certains résultats sous la forme de courbes en pointillés sont montrés sur la fig. XI.24. A chaque courbe correspond une valeur constante de la rugosité relative $\frac{L}{k_a}$. Comme il résulte de la figure, chaque plaque peut être considérée comme hydrodynamiquement lisse jusqu'aux certaines valeurs du nombre Re, suivant la rugosité relative.

Sur les secteurs où la couche limite est laminaire, la rugosité générale n'influe ni sur la résistance de frottement, ni sur les caractéristiques de la couche limite. Les valeurs du coefficient de résistance sur les tronçons horizontaux des courbes en pointillé de la fig. XI.24 correspondent bien aux données obtenues d'après la formule (XI.117). Pour évaluer l'influence exercée sur la résistance d'une rugosité technique, ayant la forme de micro-ondulations, les résultats obtenus au cours des essais sur les plaques à rugosité granuleuse ne sont pas appliquables. On ne peut les utiliser que partiellement en régimes d'écoulement tels où le coefficient de résistance ne dépend plus des nombres Re. A cet effet on peut se servir d'une rugosité équivalente, en entendant par cette dernière une certaine hauteur relative des aspérités de la rugosité granuleuse qui assure la même valeur de la résistance que la rugosité technique donnée.

Jusqu'à présent il n'existe pas de théories suffisamment générales qui auraient permis d'évaluer l'influence de la rugosité sur la résistance. Une des tentatives d'évaluation de ce type a été faite par Yoshida et Sasayama qui partent de l'hypothèse que la présence de la rugosité générale influe sur la grandeur l figurant dans la formule (XI.83) des contraintes turbulentes. Cette hypothèse signifie que la rugosité influe sur les processus de mélange turbulent au voisinage de la paroi en faisant varier le champ des vitesses.

V. Mikhaïlov [4] a élaboré une méthode semi-empirique de calcul de la résistance des microrugosités dues à la peinture de la surface de la coque des navires. Les courbes du coefficient C_f en fonction de lg Re, obtenues par lui, sont par leur caractère plus proches des courbes pour les tôles peintes et le bordé d'un navire (fig. XI.24) que des courbes de Prandtl-Schlichting.

La rugosité locale est ordinairement caractérisée par le fait que ses aspérités dépassent sensiblement l'épaisseur de la sous-couche

visqueuse et leur nombre général est beaucoup inférieur au nombre d'aspérités de la rugosité générale. La résistance supplémentaire de la surface due à la rugosité locale peut être divisée en deux types: 1) la résistance propre ΔR des aspérités de la rugosité locale; 2) la partie de la résistance de frottement de la surface provoquée par l'influence de la rugosité locale sur les caractéristiques de la couche limite.

Le premier type de résistance supplémentaire peut être calculé comme la somme des résistances des aspérités isolées de la rugosité locale

$$\Delta R_x = \sum_{i=1}^{m} R_{ai}.$$

Pour la détermination de la valeur R_a on peut utiliser l'hypothèse de C. Fédiaevski sur l'écoulement plan autour des aspérités isolées. Suivant cette hypothèse, la résistance de l'aspérité peut être calculée comme la limite de la somme des résistances de ses sections horizontales, c'est-à-dire

$$R_a = \int_0^{k_a} C_x b \frac{\rho v_x^2}{2} dy,$$

où $C_x(y)$ est le coefficient de résistance de la section horizontale élémentaire de l'aspérité; $b(y)$ la loi de la variation de la largeur de l'aspérité suivant la hauteur.

La grandeur C_x dépendant de la forme du profil de l'aspérité dans le plan et de l'influence réciproque des aspérités peut être déterminée d'après les essais de l'étude de l'écoulement autour d'une combinaison d'aspérités.

La valeur de v_x en première approximation peut être calculée, par exemple, au moyen de la loi de la puissance ou logarithmique de la distribution des vitesses dans la couche limite des plaques.

Pour calculer une partie de la résistance de frottement de la surface des plaques due à la variation des caractéristiques de la couche limite, nous tenons compte de ce que l'influence de la rugosité locale dans un écoulement plan est équivalente à un accroissement local supplémentaire de l'épaisseur de la perte d'impulsion déterminée par la formule

$$\Delta\delta^{**} = \frac{R_a}{\rho v^2}.$$

Par suite de l'augmentation de δ^{**}, les contraintes tangentielles de frottement dans la région située à l'arrière de la rugosité locale seront inférieures que dans le cas d'une plaque lisse; leur grandeur peut être calculée par la formule ordinaire (XI.77) en y remplaçant δ^{**} derrière la rugosité locale par la grandeur $\delta^{**} + \Delta\delta^{**}$.

L'étude approfondie de l'écoulement autour des aspérités de la rugosité locale a montré la justesse des conclusions théoriques énoncées et a permis de déterminer les valeurs des coefficients C_x pour différents types d'aspérités [4].

On doit noter que les cavités locales de petites dimensions créent également des pertes de charge singulières et dans ce sens elles sont analogues à de petites aspérités; on peut trouver leurs coefficients de résistance en utilisant la théorie des filets plans turbulents.

A un type spécial de rugosité se rapporte l'ondulation de la surface provoquée, par exemple, par la soudure des tôles du bordé des navires, influant également sur les caractéristiques hydromécaniques de la surface. Si l'ondulation est en pente douce et par sa configuration se rapproche des sinusoïdes, le contournement par les vagues s'effectue sans décollement; si les hauteurs des vagues sont relativement grandes et à leur sommet il y a un bord aigu, des décollements locaux de la couche limite sont possibles en cas d'écoulement des vagues séparées. La redistribution de la pression amène l'apparition de la résistance supplémentaire de la surface ondulée. De plus, l'ondulation peut provoquer un décollement prématuré de la couche limite près du profil ou d'un autre corps contourné par le fluide.

§ 74. RÉSISTANCE VISQUEUSE DES CORPS

En mouvement d'un corps dans un fluide visqueux, immergé profondément sous la surface libre, la force de résistance totale se compose de la projection sur la direction du mouvement de la résultante des contraintes tangentielles (résistance de frottement et projection de la résultante des pressions) de la résistance de forme; leur somme constitue la résistance visqueuse du corps.

Les particularités de changement de la résistance visqueuse des corps avec l'augmentation de leur vitesse de déplacement dépendent en grande partie des phénomènes ayant lieu dans la couche limite. La connaissance de ces phénomènes permet d'expliquer et dans un certain nombre de cas de prévoir les particularités de la variation de la résistance.

Du point de vue des particularités de la variation des coefficients de la résistance C_x en fonction du nombre Re et, par conséquent, des particularités de l'écoulement, tous les corps se divisent conventionnellement en corps profilés et corps non profilés. Cependant il faut noter qu'une telle division ne caractérise pas la qualité absolue du corps. Ainsi, un disque plan mince placé en travers de l'écoulement représente l'exemple d'un corps non profilé et ce même disque placé le long de l'écoulement est l'exemple d'un corps profilé. Ceci témoigne de ce que la résistance visqueuse du corps, pour une vitesse donnée

constante de son mouvement, dépend de façon considérable de l'orientation du corps par rapport à la vitesse à l'infini.

Pour les corps profilés, il est caractéristique que la part de la résistance de forme dans la valeur totale de leur résistance est relativement faible. Ceci permet de conclure que l'influence de la couche limite sur le fluide libre potentiel pour les corps profilés est petite et la structure du fluide libre potentiel dans le cas donné diffère très peu de celle qui existe en cas de l'écoulement autour d'un corps d'un fluide parfait, lorsque suivant le paradoxe d'Euler-d'Alembert la résistance de forme est nulle.

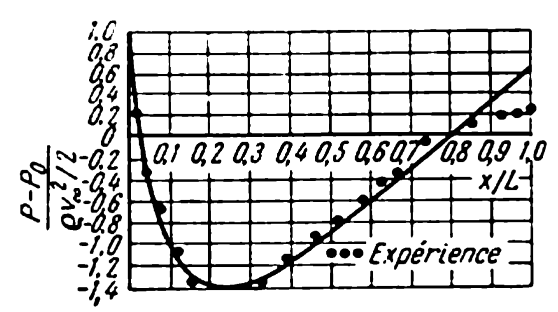


Fig. XI.25

Les résultats des mesures du champ de la vitesse à l'intérieur de la couche limite des corps allongés montrent que l'écoulement autour de ces corps s'effectue sans interruption sur toute l'étendue de leur surface. Il est vrai que parfois au voisinage du bord arrière de tels corps on observe un décollement rampant qui consiste en ce que la couche limite n'est pas écartée de la surface du corps par l'écoulement inverse et ne déforme pas sensiblement l'image de son contournement.

L'existence de la résistance de forme pour cette catégorie de corps a pour origine l'influence de la couche limite sur le champ des vitesses et des pressions du fluide libre potentiel. Cette influence se manifeste par ce que la couche limite fait dévier les lignes de courant par rapport à leur direction dans un fluide non visqueux, de la valeur de l'épaisseur de refoulement δ^*. La déviation des lignes de courant dans la direction transversale est cinématiquement équivalente à l'apparition dans l'écoulement de vitesses transversales supplémentaires, dont la valeur augmente au fur et à mesure qu'on se rapproche du bord arrière du corps. Finalement, les pressions dans la région de la frontière extérieure de la couche limite de la partie arrière du corps, suivant l'équation de Bernoulli, ne peuvent atteindre la valeur correspondante à la pression en mouvement du corps dans un fluide non visqueux. Ceci résulte de la figure XI.25, où sont comparés les résultats des mesures de la pression le long du profil, calculés suivant la théorie des écoulements potentiels. Dans la partie arrière du corps, on observe une baisse de pression qui perturbe l'équilibre des composantes horizontales des forces de pression ayant lieu dans un fluide non visqueux et amène à l'apparition de la résistance de forme.

Le schéma énoncé permet de supposer qu'en régime permanent d'écoulement à l'intérieur de la couche limite la diminution de la

valeur δ^* avec la croissance de la vitesse, liée à la diminution de l'épaisseur de la couche limite, doit entraîner une diminution progressive du coefficient de résistance de forme des corps profilés avec l'augmentation de Re; cette propriété est corroborée par les données des expériences. En même temps, on peut supposer que la résistance de forme des corps profilés dépend du régime de l'écoulement à l'intérieur de la couche limite, car la valeur du rapport δ^*/δ des couches limites laminaire et turbulente est différente et, par conséquent, la perturbation de l'écoulement extérieur est différente aussi, ce qui est également corroboré par les expériences.

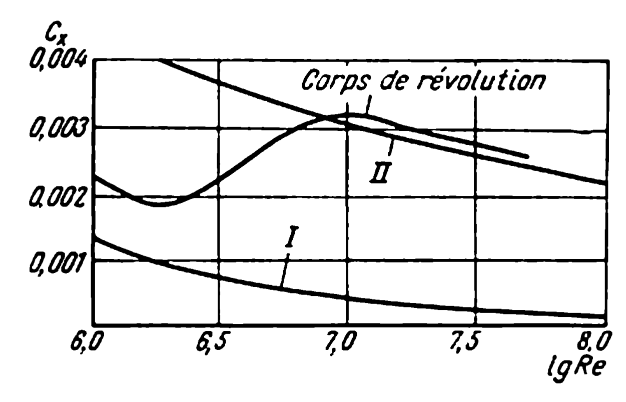


Fig. XI.26

La dépendance de la résistance de forme des corps profilés de la structure de la couche limite et la faible valeur absolue de leur résistance de forme déterminent la dépendance des particularités de la variation de la résistance visqueuse de ces corps des particularités de la variation de la résistance de frottement. La fig. XI.26 montre la courbe de la variation du coefficient de résistance d'un corps allongé; sur la même figure sont tracées les courbes des coefficients de résistance de frottement de l'écoulement laminaire (*I*) et turbulent (*II*) autour des plaques planes lisses. Cette figure témoigne de la correspondance des particularités de la variation de la résistance de frottement et de la résistance visqueuse au passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent à l'intérieur de la couche limite. Une régularité analogue est observée également en écoulement autour des corps allongés, sur lesquels par suite de la croissance de la couche limite, provoquée par la rugosité de la résistance de forme, la résistance visqueuse également est plus grande que dans les corps lisses.

Les corps non profilés ont une particularité telle que l'écoulement d'un fluide autour d'eux s'accompagne d'un décollement de la couche limite, et cela de façon que derrière le point de décollement la couche limite est détachée de la surface en créant ainsi une zone de décollement dans laquelle se forment de grands tourbillons marginaux

composant une allée tourbillonnaire en cas de corps cylindriques et des boucles tourbillonnaires compliquées derrière les corps solides. Les corps non profilés peuvent être classés en corps à point de décollement fixe et à point de décollement mobile. Le point fixe de décollement de la couche limite sont les arêtes aiguës et les angles, la position du point de décollement ne dépendant pas de la vitesse d'écoulement du corps; parmi ces corps on peut noter par exemple des plaques planes normales à la vitesse v_∞. Pour les corps à point de décollement mobile, la position de ce point dépend du régime d'écoulement du fluide dans la couche limite. Le point de décollement se trouve dans la région de la chute de pression positive, dans la couche limite laminaire, par rapport à la couche turbulente, il est disposé plus près du minimum de l'épure de pression sur la surface du corps. La variation du régime d'écoulement dans la couche limite de tels corps entraîne un déplacement brusque de la ligne de décollement de la couche limite et, par conséquent, une variation brusque de la valeur de leur résistance.

Le phénomène de la variation brusque de la résistance est appelé crise de la résistance des corps non profilés et le nombre de Reynolds qui lui correspond nombre critique $\mathrm{Re_{cr}}$. Comme un exemple d'un corps à point de décollement mobile on peut citer une sphère et un cylindre circulaire se déplaçant perpendiculairement à la génératrice. Dans la valeur totale de la résistance des corps non profilés, la résistance de forme joue le rôle principal et constitue par exemple pour le cylindre circulaire jusqu'à 98 % de la valeur totale de la résistance visqueuse. Compte tenu de ce fait, les particularités de la variation de la résistance visqueuse de tels corps se déterminent par les particularités de la variation de leur résistance de forme. Le rôle de la perturbation du fluide libre, provoquée par l'influence de la couche limite jusqu'au point de décollement, dans la création de la résistance de forme de ces corps n'est pas grand. L'origine principale de l'apparition de leur résistance de forme consiste en ce que la structure de l'écoulement derrière le point de décollement de la couche limite varie radicalement par rapport à l'écoulement par un fluide non visqueux. Il est évident cependant que la valeur de la résistance de forme dépend de la largeur de la zone de décollement, c'est-à-dire de la distance séparant les points de décollement de la couche limite. Pour les corps à point de décollement fixe, la largeur de l'allée tourbillonnaire ne varie pas et leur coefficient de résistance ne dépend pratiquement pas des nombres Re.

Pour les corps à point de décollement mobile, le coefficient de résistance diminue brusquement lorsque l'écoulement laminaire est remplacé par un écoulement turbulent dans la couche limite. Cela est conditionné par un déplacement brusque du point de décollement vers la partie arrière et la réduction de la largeur de la zone de décollement derrière le corps.

L'augmentation de la résistance de frottement qui a lieu dans ce cas n'influe pas sur le phénomène décrit, car son rôle dans la valeur totale de la résistance est dans le cas donné insignifiant. Les particularités de la variation de la résistance énoncées sont représentées sur la fig. XI.27 où est montrée la dépendance $C_x = f$ (Re), obtenue par essai sur un modèle.

Avec des nombres de Reynolds inférieurs et supérieurs au nombre critique, le coefficient de résistance du cylindre en écoulement avec décollement ne dépend pratiquement pas du nombre Re.

Ceci s'explique par la constance de la position des points de décollement de la couche limite laminaire et par une variation insignifiante, avec la croissance de la vitesse, de la position des points de décollement de la couche limite turbulente sur sa surface.

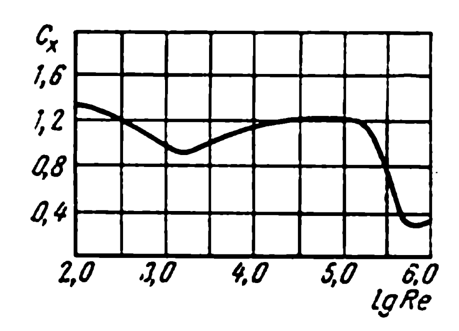


Fig. XI.27

Comme il a été indiqué ci-dessus, pour les corps non profilés la crise de la résistance sera d'autant plus intense que la région turbulente se rétrécira plus fortement derrière le corps à l'augmentation du nombre Re. Pour cette raison, la crise la plus forte est la plus probable sur un corps tel sur lequel le décollement de la couche limite laminaire s'effectue dans sa section du maître couple, et le décollement de la couche turbulente, autant que possible sur le bord arrière.

A titre d'exemple d'un tel corps on peut citer le cylindre avec le profil montré sur la fig. XI.28. Sur cette même figure sont montrées les courbes de distribution du coefficient de pression sur ce profil, obtenues par C. Fédiaevski et T. Nastukova avec des nombres de Reynolds inférieurs et supérieurs à une valeur critique.

Comme il ressort de ces courbes, pour une vitesse de l'écoulement $v \leqslant 20$ m/s dans la région du maître couple a lieu le décollement de la couche limite laminaire, derrière laquelle s'établit une dépression à peu près constante. Avec l'accroissement de la vitesse d'écoulement, la couche limite laminaire détachée devient turbulente, ce qui provoque le déplacement du point de décollement en aval vers la partie arrière du profil. Pour cette raison, les courbes de distribution de la pression pour des vitesses d'écoulement $v \geqslant 30$ m/s diffèrent fortement de celles pour $v \leqslant 20$ m/s, ce qui atteste d'un écoulement sans décollement autour du profil pratiquement jusqu'au bord arrière.

Le calcul de la résistance visqueuse d'un corps profilé est possible si l'on connaît les résultats du calcul ou des mesures du champ des vitesses et des pressions dans le sillage derrière le corps. A cet effet,

il faut appliquer la loi de la quantité de mouvement à un volume de fluide enveloppant le corps.

Considérons le cas de l'écoulement autour d'un corps immobile, loin de la surface libre du fluide, conformément à un problème plan, comme il est montré sur la figure XI.29. Dans la région du sillage hydrodynamique les vitesses derrière le corps sont inférieures aux vitesses devant le corps.

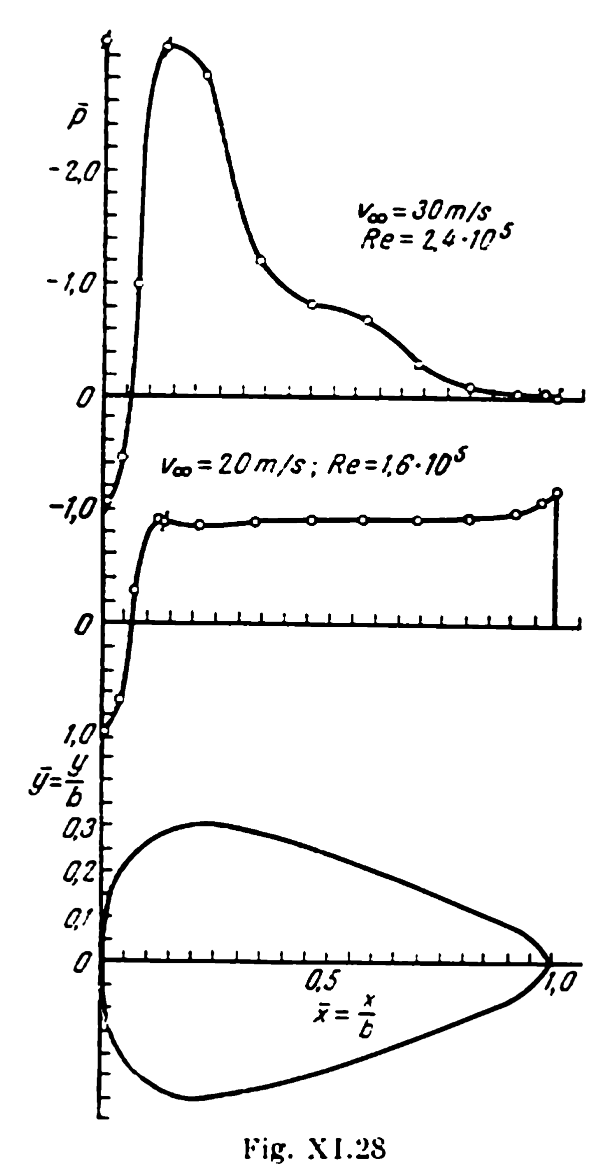


Fig. XI.28

Soit un contour baigné par un courant dont la vitesse à l'infini est v_∞ et la pression statique p_0 (section DD). Nous disposons la section AA à une telle distance derrière le corps que la pression statique puisse s'équilibrer et devenir égale à p_0. Alors la résistance visqueuse R_x du contour peut être calculée comme la différence des écoulements de la quantité de mouvement du fluide dans les sections DD et AA

$$R_x = \int_S \rho v_x (v_\infty - v_x)\, dS, \tag{XI.118}$$

où S est la surface de la section AA.

Désignons la vitesse dans la section BB, où s'effectuent les mesures, par v_{x_1} et la pression statique dans cette section par p_1. Alors en utilisant la condition de la constance du débit dans un tube de courant élémentaire, on peut écrire

$$\rho v_x\, dS = \rho v_{x_1}\, dS_1. \tag{XI.119}$$

D'autre part, en admettant qu'entre les sections BB et AA il n'y ait pas de pertes, nous obtenons d'après le théorème de Bernoulli

$$P_1 = p_1 + \frac{\rho v_{x_1}^2}{2} = p_0 + \frac{\rho v_x^2}{2},$$

où P_1 est la charge totale dans la section BB.

Désignons la charge totale de l'écoulement non tourbillonnaire par P_0, alors

$$\left.\begin{aligned} v_x^2 &= \frac{2}{\rho}(P_1 - p_0); \\ v_{x_1}^2 &= \frac{2}{\rho}(P_1 - p_1); \\ v_\infty^2 &= \frac{2}{\rho}(P_0 - p_0). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI.120)}$$

En utilisant la relation (XI.119), nous trouvons

$$R_x = \int_S \rho v_x (v_\infty - v_x)\, dS = \int_{S_1} \rho v_{x_1} (v_\infty - v_x)\, dS_1.$$

En substituant dans cette formule la valeur des vitesses suivant

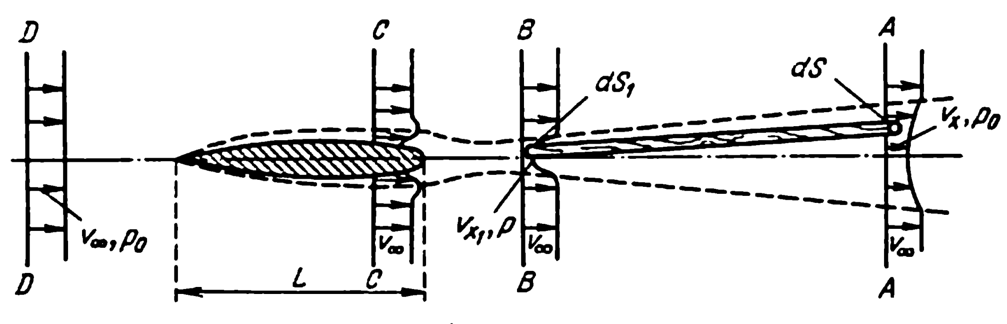


Fig. XI.29

les expressions (XI.120), nous obtenons la formule de Jones pour la détermination de la résistance visqueuse

$$R_x = \int_{S_1} \rho \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_1 - p_1)} \left[\sqrt{\frac{2}{\rho}(P_0 - p_0)} - \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_1 - p_0)} \right] dS_1.$$

En réduisant la force à la forme du coefficient de la résistance visqueuse sans dimensions, nous obtenons

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{\rho v^2}{2} L} = \frac{2}{L} \int_{S_1} \sqrt{\frac{P_1 - p_1}{P_0 - p_0}} \left(1 - \sqrt{\frac{P_1 - p_0}{P_0 - p_0}}\right) dS_1,$$

où L est la longueur du corps.

Toutes les grandeurs des charges totales et des pressions statiques p figurant dans cette formule sont mesurées par des tubes de Pitot et par des tubes de pression statique. Cette formule, employée surtout pour les études d'essais, permet de déterminer la résistance avec un degré de précision suffisant. Des formules analogues peuvent être obtenues aussi pour le cas d'écoulement autour des corps de révolution.

Les méthodes théoriques modernes de calcul de la résistance de frottement et de forme des corps profilés sont basées sur l'hypothèse qu'ils sont contournés sans décollement. Pour données de départ, on utilise les résultats du calcul préliminaire de la couche limite, effectué en première approximation d'après l'épure de la distribution des pressions le long de la surface du corps, cette épure étant calculée par les méthodes de la théorie de l'écoulement potentiel autour d'un corps d'un fluide non visqueux.

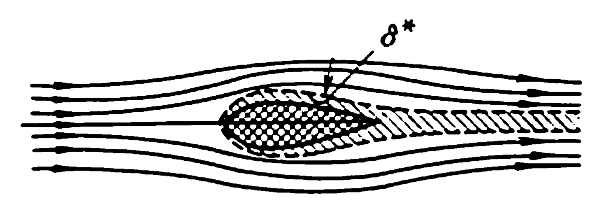


Fig. XI.30

Parmi les modes de calcul de la résistance des corps allongés, établis jusqu'à présent, le plus strict est celui qui a été proposé par L. Loïtsianski.

La position de départ est celle suivant laquelle la distribution de la pression en écoulement d'un fluide visqueux autour d'un corps allongé se confond avec la distribution de la pression en écoulement potentiel autour d'un demi-corps formé par l'augmentation de la surface du corps et de la ligne nulle de courant dans le sillage de la valeur de l'épaisseur de refoulement δ^*.

En première approximation l'épaisseur δ^* se calcule d'après l'épure théorique de la distribution de la pression.

En même temps on détermine en première approximation également la résistance de frottement comme résultante des contraintes tangentielles τ_0 sur la direction du mouvement du corps. Ensuite on reprend le calcul de la distribution de la pression au moyen de la résolution du problème sur l'écoulement potentiel autour d'un demi-corps montré sur la fig. XI.30.

En tenant compte des propriétés de la couche limite, on peut transposer sans déformation les pressions de la surface du demi-corps suivant une normale sur la surface du corps. Finalement, on peut calculer la résistance de forme du corps en intégrant l'épure précisée obtenue de la distribution de la pression et en projetant simultanément les forces des pressions sur la direction du mouvement. Par la suite on peut calculer la couche limite en seconde approximation, en tenant compte de la nouvelle distribution de la pression et préciser les valeurs des contraintes tangentielles.

Ce mode de calcul permet d'obtenir séparément les valeurs de la résistance de frottement et de la résistance de forme, ce qui est commode en réalisant toute sorte de recherches relatives aux composantes de la résistance des corps.

On doit remarquer que ce mode de calcul est très laborieux et exige de plus, l'application des méthodes d'approximation vu les difficultés liées à la conversion de l'épaisseur δ^* à l'infini sur le bord arrière en calculant la couche limite en première approximation.

On peut calculer de façon approchée la résistance visqueuse des corps allongés, en partant de la formule (XI.118). Bien que cette formule soit obtenue conformément à un problème plan, on peut l'utiliser sous cette même forme aussi pour le cas de l'écoulement autour d'un corps de révolution, si par dS on entend un élément de surface du sillage dans la section éloignée à l'infini derrière le corps.

Remarquons à ce propos que le sillage hydrodynamique derrière un corps profilé ne contient pas de tourbillons marginaux et par ses propriétés est analogue à la couche limite turbulente. Par conséquent, il vérifie l'équation intégrale de la couche limite (XI.36). si dans cette équation on pose $\tau_0 = 0$, ce qui est parfaitement juste, car sur l'axe du sillage il y a le minimum de l'épure des vitesses. En partant des hypothèses mentionnées, l'équation intégrale le long du sillage peut être écrite sous la forme

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}+\frac{v'}{v}\delta^{**}(2+H)=0.$$

On peut la considérer comme l'équation relative à la grandeur δ^* dans la zone située à l'arrière du corps

$$\frac{1}{\delta^{**}}\frac{d\delta^{**}}{dx}=-2\frac{v'}{v}-H\frac{v'}{v},$$

où v est la vitesse de l'écoulement sur la frontière extérieure du sillage. En l'intégrant à partir du bord arrière, où $x = x_b$ jusqu'à $x = \infty$ le long de l'écoulement, nous trouvons

$$\ln \delta^{**}\Big|_{x_b}^{\infty} = -\ln v^2\Big|_{x_b}^{\infty} - \int_{x_b}^{\infty} H\frac{v'}{v}\,dx.$$

En calculant la dernière intégrale dans cette formule suivant le théorème sur la moyenne, nous obtenons la relation suivante:

$$\int_{x}^{\infty} H\frac{v'}{v}\,dx = H_{\text{moy}}\ln\left(\frac{v_\infty}{v_b}\right).$$

Finalement, nous avons

$$\frac{\delta^{**}_{\infty}}{\delta^{**}}=\left(\frac{v_b}{v_\infty}\right)^{2+H_{\text{moy}}}. \qquad \text{(XI.121)}$$

En cas d'un problème plan pour un corps cylindrique, de longueur L, le coefficient de la résistance visqueuse, en tenant compte

de (XI.117), s'obtient de la relation

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} L 1} = \frac{2}{L} \int_S \frac{v_x}{v_\infty}\left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) dy,$$

l'intégrale se calculant dans ce cas suivant la section de filet S loin en aval du corps. Etant donné que l'intégrale qui figure au deuxième membre de cette expression représente une valeur totale de l'épaisseur de la perte d'impulsion dans le sillage hydrodynamique à l'infini en aval du corps, cette formule pourra s'écrire sous la forme suivante

$$C_x = \frac{2}{L}\,\delta_\infty^{**}. \tag{XI.122}$$

De façon analogue, en admettant en cas d'un corps de révolution $dS = 2\pi y\, dy$ et en introduisant la surface de la section maximale $\omega_{☌}$ du corps, on peut écrire

$$C_x = \frac{4\pi}{\omega_{☌}} \int_S \frac{v_x}{v_\infty}\left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) y\, dy = \frac{2\Delta_\infty^{**}}{\omega_{☌}}.$$

où

$$\Delta_\infty^{**} = 2\pi \int_S \frac{v_x}{v_\infty}\left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) y\, dy$$

représente la surface de la perte d'impulsion.

Les formules obtenues pour le calcul des coefficients C_x des profils et des corps de révolution sont tout à fait exactes, mais pour leur utilisation, il faut connaître les grandeurs δ_∞^{**} et Δ_∞^{**} qui ne peuvent être calculées qu'approximativement.

Leur emploi pratique peut être assuré en utilisant la relation approchée (XI.121) entre l'épaisseur de la perte d'impulsion à l'infini en aval du corps δ_∞^{**} et sur le bord arrière du corps δ_b^{**} établie par Squire et Young.

Après substitution de la valeur δ_∞^{**} tirée de cette formule dans (XI.212), nous obtenons

$$C_x = \frac{2}{L}\,\delta_b^{**}\left(\frac{v_b}{v_\infty}\right)^{2+H_{moy}}. \tag{XI.123}$$

Pour le calcul de la grandeur inconnue H_{moy}, servons-nous d'une simple hypothèse sur la distribution linéaire de H le long de la veine fluide derrière le corps. On peut alors écrire l'égalité approchée suivante

$$H_{moy} = \frac{H_b + H_\infty}{2}.$$

En utilisant pratiquement l'approximation adoptée de la grandeur H_{moy}, il est indispensable de tenir compte de ce qu'avec $x \to \infty$

la valeur $H_\infty \to 1$. Alors

$$H_{\text{moy}} = 0,5 + \frac{H_b}{2}.$$

La valeur de H_b sur le bord arrière du corps peut être calculée en écoulement sans décollement d'après les méthodes connues de la théorie de la couche limite. En définitive, pour le calcul de la résistance visqueuse en cas d'un problème plan, nous obtenons la formule approchée suivante

$$C_x = \frac{2\delta_b^{**}}{L}\left(\frac{v_b}{v_\infty}\right)^{2,5+0,5H_b}. \qquad \text{(XI.124)}$$

En utilisant ces formules dans le calcul de la résistance avec de grands nombres Re, quand la couche limite est turbulente, on peut poser dans le cas de corps avec une faible chute de pression longitudinale, $H_b \approx 1,4$. Nous obtenons dans ce cas la relation approchée suivante pour le calcul du coefficient de la résistance visqueuse

$$C_x = \frac{2}{L}\delta^{**}\left(\frac{v_b}{v_\infty}\right)^{3,2}. \qquad \text{(XI.125)}$$

Le dépouillement des résultats des expériences montre que la valeur de $v_b/v_\infty = 1,0 \div 0,78$ et pour les épaisseurs ordinaires des profils on peut prendre $v_b/v_\infty \approx 0,9$.

Si au moyen de la formule (XI.125) on trouve le rapport du coefficient de résistance de l'aile au coefficient de résistance de frottement d'une plaque équivalente, nous aurons

$$\frac{C_x}{C_{f.pl}} = \frac{\delta_b^{**}}{\delta_{pl}^{**}}\left(\frac{v_b}{v_\infty}\right)^{3,2}.$$

Dans les cas où l'épaisseur de la perte d'impulsion s'exprime en quadratures, par exemple lorsqu'on utilise les formules (XI.111) ou (XI.114), le rapport $\delta_b^{**}/\delta_{pl}^{**}$ ne dépend pas du nombre de Reynolds et est (pour une valeur donnée de la coordonnée du point de transition x_p) la fonction de la loi de la distribution des vitesses le long de la frontière extérieure de la couche limite. Ceci permet d'admettre de façon approchée que la résistance visqueuse des corps allongés peut être calculée d'après la formule

$$C_x = C_{f.pl}\eta,$$

où $C_{f.pl}$ est le coefficient de la résistance de frottement d'une plaque lisse équivalente, c'est-à-dire qui se déplace avec le même nombre de Reynolds; η est le multiplicateur sans dimensions qui dépend de la forme du corps, de son orientation par rapport à la vitesse à l'infini et à l'étendue du tronçon laminaire de la couche limite; sa valeur dépasse l'unité. La propriété de la résistance des corps allongés baignés sans décollement de la couche limite, exprimée par cette

formule et corroborée par les expériences, a servi de base à la construction des graphiques des coefficients η des profils d'ailes et des corps de révolution [4].

Le coefficient η tient compte de l'influence de la courbure de la surface sur la valeur des contraintes tangentielles, ainsi que de la résistance de forme du corps. Ainsi, on peut approximativement admettre que le coefficient de résistance de forme, proportionnel à la grandeur $(\eta - 1)\ C_{f.pl}$ diminue avec l'accroissement du nombre de Reynolds d'un corps allongé affinement au coefficient de résistance de frottement d'une plaque lisse équivalente. Cette propriété peut être utilisée lors de la transposition au prototype des résultats établis sur les modèles.

§ 75. ÉCOULEMENTS À FILETS TURBULENTS

La théorie des écoulements à filets turbulents qui étudie les phénomènes de l'échange turbulent dans les écoulements libres, c'est-à-dire en l'absence de frontières solides, a une grande importance pratique, étant donné que ces phénomènes sont à la base des processus de travail de nombreux dispositifs techniques.

Avec des nombres Re suffisamment grands, les contraintes tangentielles turbulentes dans les filets turbulents sont importantes par rapport aux contraintes visqueuses, à la suite de quoi l'action directe de la viscosité du fluide sur un écoulement moyen est négligeable. Aussi les mouvements examinés dans ce qui suit se trouvent-ils indépendants des nombres de Reynolds, c'est-à-dire automodelés. De plus, la notion d'automodelage comprend l'hypothèse que toutes les sections transversales dans un écoulement à filets ont affinement des profils de la vitesse semblables, c'est-à-dire que leur coïncidence peut être obtenue par le choix des échelles appropriées pour la vitesse et la largeur.

Examinons la formule des contraintes tangentielles. Exprimons la contrainte du frottement turbulent à l'aide de la formule de Prandtl (IX.21)

$$\tau = \rho l^2 \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

dans laquelle le symbole de la dérivée totale est remplacé par le symbole de la dérivée partielle, étant donné que le long du filet, c'est-à-dire à la variation de l'abscisse x, le champ des vitesses change.

Comme il a été indiqué au § 55, pour le filet libre on peut adopter d'après (IX.25) $l/\delta = \beta$. D'autre part, retenons que l'épure des vitesses dans la section transversale du filet libre est proche de la ligne droite. L'exception est faite pour les petites régions situées au voisinage de la frontière extérieure du filet, où la vitesse est v_δ et au voisinage de l'axe du filet avec v_{xm} (fig. XI.31). Alors on peut

poser approximativement

$$\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]=\frac{v_{xm}-v_\delta}{\delta}.$$

En substituant cette relation dans la formule de τ, nous obtenons

$$\tau=\rho\varkappa\delta\,(v_{xm}-v_\delta)\frac{\partial v_x}{\partial y}=A\,\frac{\partial v_x}{\partial y}, \qquad \text{(XI.126)}$$

où $A=\rho\varkappa\delta\,(v_{xm}-v_\delta)$, et $\varkappa$ est le coefficient de proportionnalité déterminé de façon expérimentale.

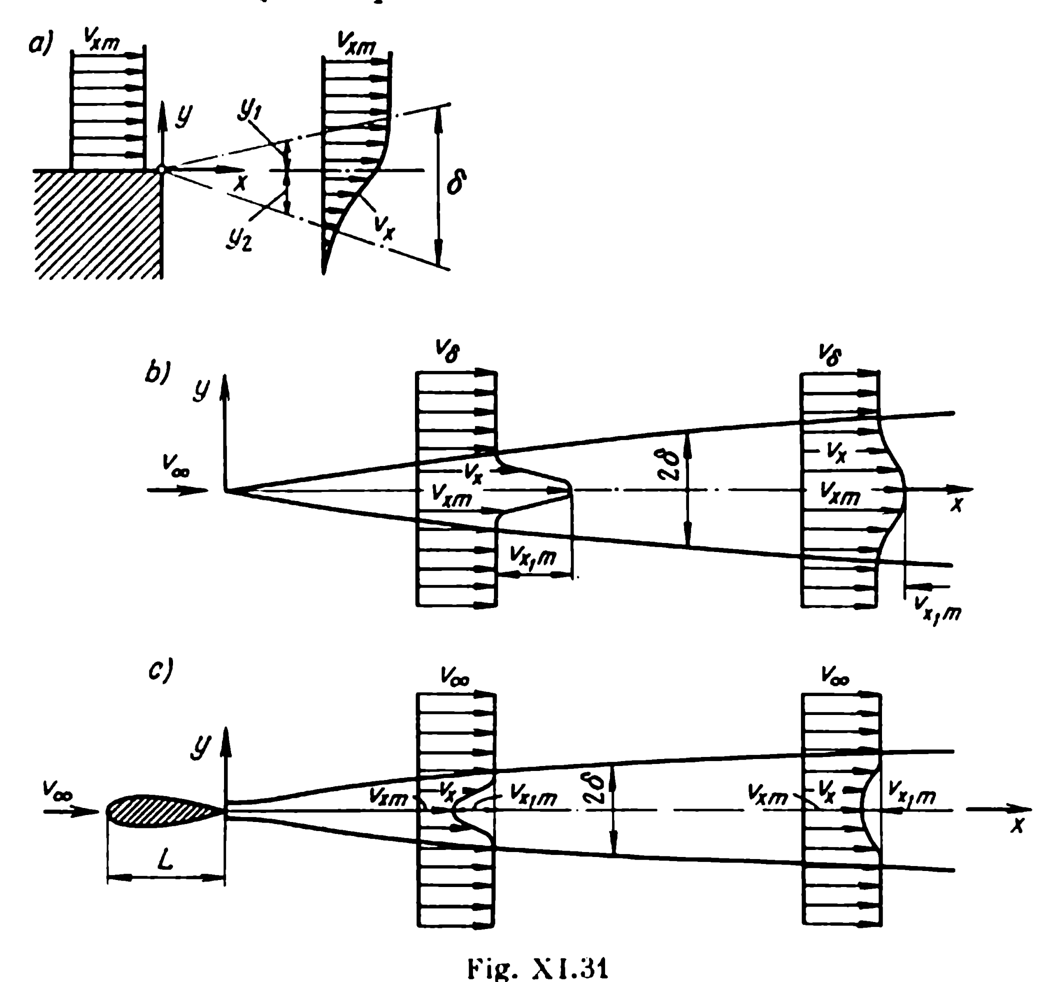


Fig. XI.31

Par conséquent, dans la section donnée, transversale au filet turbulent libre, le coefficient A de la viscosité turbulente peut être considéré comme constant. Ceci constitue la différence entre le mouvement dans un filet turbulent libre et le mouvement dans une conduite plane ou dans une couche limite (voir § 50).

L'hypothèse sur la constance du coefficient A dans le sillage hydrodynamique loin en aval du corps a été faite pour la première fois par B. Troubtchikov, qui a admis la grandeur A comme constante, ne dépendant ni de la coordonnée y, ni de la coordonnée x.

La formule (XI.126), dans laquelle la grandeur A dépend seulement de la coordonnée x, a été proposée par Prandtl.

Avant de commencer à résoudre des problèmes concrets, examinons les lois de l'accroissement de la largeur de la zone de mélange et les lois de la diminution de la vitesse sur l'axe du filet ou de vitesse d'écoulement dans le sillage hydrodynamique suivant la coordonnée longitudinale x.

Actuellement on peut considérer comme parfaitement démontrée l'hypothèse suivante: la dérivée convective de la largeur δ de la zone de mélange est proportionnelle dans le temps à la fluctuation de la vitesse transversale $\sqrt{\overline{v_y'^2}}$, c'est-à-dire on peut écrire que

$$\frac{D\delta}{Dt} = v_x \frac{\partial \delta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \delta}{\partial y} \sim \sqrt{\overline{v_y'^2}} \sim l \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Comme la valeur moyenne de la grandeur $\partial v_x/\partial y$ sur la moitié de la largeur du filet est proportionnelle à v_{xm}/δ, alors suivant (XI.25)

$$\frac{D\delta}{Dt} \sim \beta v_{xm}. \qquad \text{(XI.127)}$$

Considérons le tronçon initial d'un filet plan (fig. XI.31,*a*). Etant donné que pour tous les filets libres nous admettons $\partial\delta/\partial y = 0$, la dérivée

$$\frac{D\delta}{Dt} \sim v_{xm} \frac{d\delta}{dx}. \qquad \text{(XI.128)}$$

De la comparaison des relations (XI.127) et (XI.128) il suit que

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = (\text{facteur numérique})\ \beta = \text{const},$$

d'où

$$\delta = (\text{facteur numérique})\ x + C. \qquad \text{(XI.129)}$$

Au choix convenable de l'origine des coordonnées, on peut poser la constante C nulle.

La même dépendance pour les filets plan et symétrique à l'axe a lieu à des distances importantes de la buse. Pour déterminer la relation entre la vitesse v_{xm} sur l'axe du filet et la coordonnée x (fig. XI.31,*b*), tenons compte de ce que, la pression dans le filet étant constante, la composante longitudinale de l'écoulement de la quantité de mouvement I sur toute l'étendue de la section transversale S du filet ne doit pas dépendre de la coordonnée x. Par conséquent,

$$I = \rho \int_S v_x^2\, dS = \text{const}.$$

En particulier, pour un filet plan cette condition prend la forme:

$$I_1 = (\text{facteur numérique})\ \rho v_{xm}^2 \delta,$$

d'où

$$v_{xm} = (\text{facteur numérique}) \sqrt{\frac{I_1}{\rho}} \frac{1}{\sqrt{\delta}}.$$

Après remplacement de δ par sa valeur suivant (XI.129), nous obtenons

$$v_{xm} = (\text{facteur numérique}) \sqrt{\frac{I_1}{\rho}} \frac{1}{x^{1/2}}. \qquad \text{(XI.130)}$$

Pour un filet symétrique à l'axe la condition de constance de la quantité de mouvement s'écrit ainsi:

$$I = (\text{facteur numérique})\ \rho v_{xm}^2 \delta^2,$$

d'où

$$v_{xm} = (\text{facteur numérique}) \sqrt{\frac{I}{\rho}} \frac{1}{\delta}.$$

Après remplacement de δ par sa valeur suivant (XI.129), nous aurons

$$v_{xm} = (\text{facteur numérique}) \sqrt{\frac{I}{\rho}} \frac{1}{x}. \qquad \text{(XI.131)}$$

Pour un sillage plan ou symétrique à l'axe en aval du corps, la valeur moyenne de $\partial v_x/\partial y$ sur la moitié de la largeur du sillage est proportionnelle à v_{x_1m}, c'est-à-dire à la profondeur du creux formé par le profil des vitesses dans le sillage (fig. XI.31,*c*). La formule (XI.127) prend alors la forme

$$\frac{D\delta}{Dt} = \beta v_{x_1m},$$

et la formule (XI.128)

$$\frac{D\delta}{Dt} = v_\infty \frac{d\delta}{dx},$$

où v_∞ est la vitesse à l'infini.

En égalisant les deux expressions de $D\delta/Dt$, nous aurons

$$v_\infty \frac{d\delta}{dx} \sim \beta v_{x_1m},$$

d'où

$$\frac{d\delta}{dx} \sim \beta \frac{v_{x_1m}}{v_\infty}. \qquad \text{(XI.132)}$$

Etant donné que dans le sillage en aval du corps le flux de la quantité de mouvement est directement lié à la résistance du corps,

nous ferons appel à l'expression (XI.118) et écrivons

$$I = R_x = \int_S \rho v_x (v_\infty - v_x)\, S.$$

A une grande distance en aval du corps, où $v = v_\infty$, la vitesse $v_{x_1} = v_\infty - v_x$ est petite devant v_∞ et pour cette raison on peut y admettre

$$v_x (v_\infty - v_x) = (v_\infty - v_{x_1})\, v_{x_1} \approx v_\infty v_{x_1}.$$

De cette façon, on peut considérer que pour un sillage plan et symétrique à l'axe

$$I = R_x \approx \rho v_\infty \int_S v_{x_1}\, dS. \qquad \text{(XI.133)}$$

La résistance d'un corps cylindrique, de diamètre d, rapportée à l'unité de son envergure, en vertu de la formule générale de la similitude est

$$R_x = C_x \frac{\rho v_\infty^2}{2}\, d1,$$

et suivant la formule (XI.133), elle est proportionnelle à $\rho v_\infty v_{x_1 m} \delta$.

En égalisant ces valeurs de la résistance, nous trouvons

$$\frac{v_{x_1 m}}{v_\infty} \sim \frac{C_x d}{2\delta}. \qquad \text{(XI.134)}$$

En introduisant la valeur donnée $v_{x_1 m}/v_\infty$ dans la relation (XI.132), nous obtiendrons l'équation différentielle pour la détermination de la largeur du sillage

$$2\delta \frac{d\delta}{dx} \sim \beta C_x d,$$

après l'intégration de laquelle nous trouvons

$$\delta \sim (\beta C_x d)^{1/2}\, x^{1/2}. \qquad \text{(XI.135)}$$

Enfin, en substituant cette valeur δ dans (XI.134), nous obtenons la loi de la variation de la profondeur du creux formé par le profil de la vitesse

$$\frac{v_{x_1 m}}{v_\infty} \sim \left(\frac{C_x d}{\beta}\right)^{1/2} \frac{1}{x^{1/2}}. \qquad \text{(XI.136)}$$

Pour un sillage symétrique à l'axe, la résistance d'un corps avec une surface de la section transversale $\omega_{\boxtimes}$

$$R_x = C_x \frac{\rho v_\infty^2}{2}\, \omega_{\boxtimes},$$

et exprimée par la quantité de mouvement dans le sillage, elle est d'après (XI.133) proportionnelle à

$$\rho v_\infty v_{x_1m}\delta^2.$$

En égalisant ces valeurs de la résistance, nous aurons

$$\frac{v_{x_1m}}{v_\infty} \sim \frac{C_x\omega_{\otimes}}{\delta^2} \qquad \text{(XI.137)}$$

En introduisant cette valeur $\frac{v_{x_1m}}{v_\infty}$ dans la relation (XI.132), on peut écrire l'équation différentielle pour la détermination du rayon du sillage

$$\delta^2 \frac{d\delta}{dx} \sim \beta C_x\omega_{\otimes},$$

après l'intégration de laquelle nous obtenons

$$\delta \sim (\beta C_x\omega_{\otimes})^{1/3}\, x^{1/3}. \qquad \text{(XI.138)}$$

Enfin, en substituant la valeur donnée δ dans (XI.137), nous obtenons la loi de la variation de la profondeur du creux formé par le profil de la vitesse

$$\frac{v_{x_1m}}{v_0} \sim \left(\frac{C_x\omega_{\otimes}}{\beta^2}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}. \qquad \text{(XI.139)}$$

Les fonctions puissances obtenues de la largeur de la zone de mélange et de la vitesse sur l'axe de l'abscisse x sont généralisées dans le tableau 3.

Tableau 3

Zone du mélange turbulent	Largeur δ	Vitesses v_{xm} ou v_{x_1m}
Tronçon initial du filet	x	x
Filet plan	x	$x^{-1/2}$
Filet symétrique à l'axe	x	x^{-1}
Sillage plan	$x^{1/2}$	$x^{-1/2}$
Sillage symétrique à l'axe	$x^{1/3}$	$x^{-2/3}$

Il est intéressant de noter que les relations obtenues sont valables pour un filet symétrique à l'axe et un sillage plan aussi en mouvement laminaire, car les produits δv_{xm} ou δv_{x_1m}, qui font partie de la formule (XI.126), ne dépendent pas de la coordonnée x et donc le coefficient A est constant dans tout l'écoulement.

Examinons maintenant d'une façon plus détaillée le problème du tronçon initial d'un filet, et cette fois sur un exemple plus général que sur la fig. XI.31,*a*.

Supposons qu'au point $x = 0$ deux écoulements parallèles aux vitesses constantes v_{δ_1} et v_{δ_2} entrent en contact où $v_{\delta_1} > v_{\delta_2}$ (fig. XI.32). En aval de l'écoulement il se forme une zone de mélange de deux écoulements semi-infinis, dont la largeur augmente proportionnellement à la distance x.

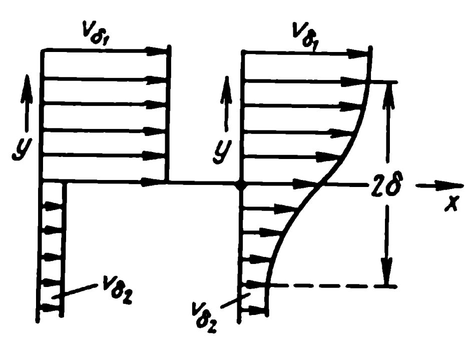


Fig. XI.32

Pour des contraintes tangentielles turbulentes, nous utilisons la formule (XI.126) en y posant $\delta = cx$, $v_{xm} = v_{\delta_1}$ et $v_\delta = v_{\delta_2}$. Alors le coefficient de la viscosité turbulente est

$$A = \varkappa cx\,(v_{\delta_1} - v_{\delta_2}).$$

Pour la résolution du problème du tronçon initial d'un filet plan, nous utiliserons les équations pour la couche limite plane turbulente (XI.68). Alors, en supprimant les signes de la médiation, en remplaçant $\tau_t = A\,\frac{\partial v_x}{\partial y}$ et en tenant compte de ce que la pression p le long du filet est constante, on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} &= A\,\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,;\\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI.140)}$$

Comme les profils de la vitesse sont semblables, les composantes de la vitesse v_x et v_y sont les fonctions du rapport $\frac{y}{x}$. Introduisons une nouvelle variable indépendante $\xi = \frac{\sigma y}{x}$ et la fonction de courant

$$\psi = xvf(\xi),$$

où

$$v = \frac{v_{\delta_1} + v_{\delta_2}}{2}.$$

Maintenant les composantes de la vitesse et leurs dérivées peuvent être exprimées par $f(\xi)$ et ses dérivées par rapport à ξ, après quoi au lieu d'une équation différentielle en dérivées partielles (XI.140), nous obtenons une équation différentielle ordinaire

$$f''' - 2\sigma f f'' = 0, \qquad \text{(XI.141)}$$

où

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2\varkappa c\lambda}} \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \frac{v_{\delta_1} - v_{\delta_2}}{v_{\delta_1} + v_{\delta_2}}.$$

Elle se confond avec l'équation différentielle (XI.17) de l'écoulement longitudinal autour d'une plaque plane, mais les conditions aux limites sont autres, à savoir

$$\sigma f'(\xi)=1\pm\lambda_1 \text{ pour } \xi=\pm\infty.$$

Hœrtler a montré que la résolution de l'équation (XI.141) donne en première approximation la distribution des vitesses longitudi-

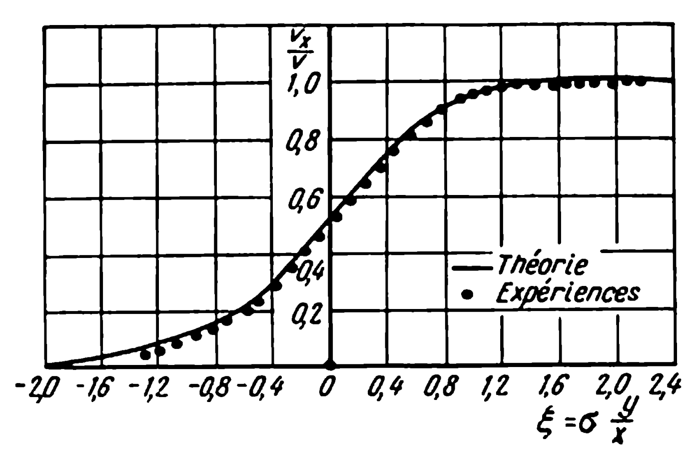


Fig. XI.33

nales sous la forme de l'intégrale des erreurs, c'est-à-dire

$$\frac{v_x}{v}=\left(1+\lambda_1\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi}e^{-z^2}dz\right). \qquad \text{(XI.142)}$$

La fig. XI.33 donne une comparaison de la solution théorique avec les résultats des expériences de Reichardt. La coïncidence est assez bonne, si l'on prend la constante expérimentale σ égale à 13,5.

En passant à nouveau au cas particulier du tronçon initial d'un filet ($v=\frac{v_{\delta_1}}{2}=\frac{v_{xm}}{2}$; $\lambda_1=1$) qui présente de l'intérêt pour le calcul des conduites d'écoulement sur les navires, remarquons que les frontières de la région de mélange du filet avec le fluide qui l'environne (fig. XI.31,*a*) sont

$$\frac{y_1}{x}=0{,}083\,;$$

$$\frac{y_2}{x}=-0{,}173.$$

Par conséquent la largeur de la zone de mélange est

$$\delta=(y_1-y_2)=0{,}256x.$$

Pour résoudre à partir des positions uniques les différents problèmes des écoulements à filets turbulents y compris tels dont la réso-

lution ne peut être ramenée à une équation différentielle ordinaire, une méthode de calcul simple et universelle est indispensable.

Une telle méthode est proposée par A. Guinevski. L'essence de cette méthode consiste dans la représentation de la loi de la distribution de la contrainte tangentielle dans le filet ou dans le sillage sous la forme d'un polynôme dont les coefficients sont déterminés d'après les conditions aux limites sur l'axe du filet et sur ses bords au moyen des équations différentielles du mouvement. Le profil de la contrainte tangentielle ainsi obtenu n'est pas lié à des admissions quelconques sur le mécanisme de la turbulence. L'expression de la loi de la distribution de la contrainte tangentielle conjointement avec une telle ou autre formule du frottement turbulent permet de fermer le problème et de déterminer le profil de la vitesse dans le filet ou dans le sillage. Cette méthode est analogue aux méthodes correspondantes de calcul de la couche limite turbulente sur une frontière solide curviligne (voir § 72).

Dans les problèmes de la turbulence libre, les profils de la vitesse et, par conséquent, les lois de la distribution de la contrainte tangentielle sont sensiblement moins variés que dans le cas de la couche limite sur une frontière solide en présence d'un gradient de pression longitudinal. Par suite, la représentation du profil de la contrainte tangentielle sous la forme d'un polynôme assez simple donne un résultat satisfaisant.

Représentons la loi de la distribution de la contrainte tangentielle dans la section transversale du filet sous la forme d'un polynôme

$$\tau = \sum_{n=0}^{n} B_n y^n, \tag{XI.143}$$

dont les coefficients B_n seront déterminés à partir des conditions aux limites sur l'axe du filet avec $y = 0$ et sur sa frontière extérieure avec $y = \delta$ (fig. XI.31,*b*)

$$\left.\begin{aligned} &\tau = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho v_{xm} \frac{dv_{xm}}{dx} \quad \text{pour} \quad y = 0\,; \\ &\tau = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \delta, \end{aligned}\right\} \tag{XI.144}$$

où v_{xm} est la vitesse sur l'axe du filet.

La première condition $\tau = 0$ avec $y = 0$ est obtenue en partant des considérations de symétrie, la seconde condition $\frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho v_{xm} v'_{xm}$ avec $y = 0$ de la première équation du système (XI.140) puisque sur l'axe du filet la vitesse transversale est nulle.

La substitution de (XI.144) dans (XI.143) donne

$$\tau = \rho v_{xm} v'_{xm} \delta \eta (1 - \eta)^2, \tag{XI.145}$$

où $\eta = \frac{y}{\sigma}$.

Examinons le tronçon principal du filet plan turbulent, quand la vitesse moyenne d'écoulement de la buse v_∞ est soit inférieure soit supérieure à la vitesse v_δ du sillage, dans lequel débouche l'écoulement (voir fig. XI.31,*b*). Comme on le voit de la fig. XI.31,*c*, le premier des cas indiqués correspond simultanément à l'écoulement dans le sillage tourbillonnaire à l'arrière d'un corps.

Pour déterminer le profil de la vitesse, nous allons utiliser l'expression du frottement (XI.126). En égalisant (XI.126) et (XI.145) nous obtenons l'expression

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{v_{xm} v'_{xm}}{\varkappa v_{x_1 m}} \eta (1-\eta)^2.$$

et après l'intégration nous avons

$$v_x - v_{xm} = \frac{\delta v_{xm} v'_{xm}}{12 \varkappa v_{x_1 m}} (6\eta^2 - 8\eta^3 + 3\eta^4);$$

$$v_\delta - v_{xm} = \frac{\delta v_{xm} v'_{xm}}{12 \varkappa v_{x_1 m}}. \qquad \text{(XI.146)}$$

De ces deux dernières expressions, nous obtenons

$$\overline{\Delta v}_x = \frac{v_x - v_\delta}{v_{xm} - v_\delta} = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4. \qquad \text{(XI.147)}$$

On en déduit qu'à la valeur $\overline{\Delta v}_x = 0{,}5$ correspond la valeur $\eta_{0.5} = 0{,}385$ et, par conséquent, $y_{0.5} = 0{,}385\ \delta$.

La figure XI.34 représente une courbe calculée d'après la formule (XI.147) en comparaison avec les données expérimentales sur les filets plans et symétriques à l'axe dans un sillage et sur les sillages plans et symétriques à l'axe. Comme on le voit, le profil théorique des vitesses concorde bien avec les nombreuses données expérimentales. Ceci permet d'admettre que le profil sans dimensions du défaut ou de l'excès de la composante longitudinale de la vitesse est en première approximation universel pour une large gamme d'écoulements.

A titre d'exemple de la résolution ultérieure du problème nous allons examiner le cas le plus simple d'un filet plan débouchant dans un fluide au repos ($v_\delta = 0$, $v_{x_1 m} = v_{xm}$).

Suivant (XI.146), on peut écrire que

$$dx = -\frac{\delta}{12\varkappa} \frac{dv_{xm}}{v_{xm}}. \qquad \text{(XI.148)}$$

En nous basant sur la constance du flux de la quantité de mouvement *I* dans la section transversale du filet, nous obtenons la dépen-

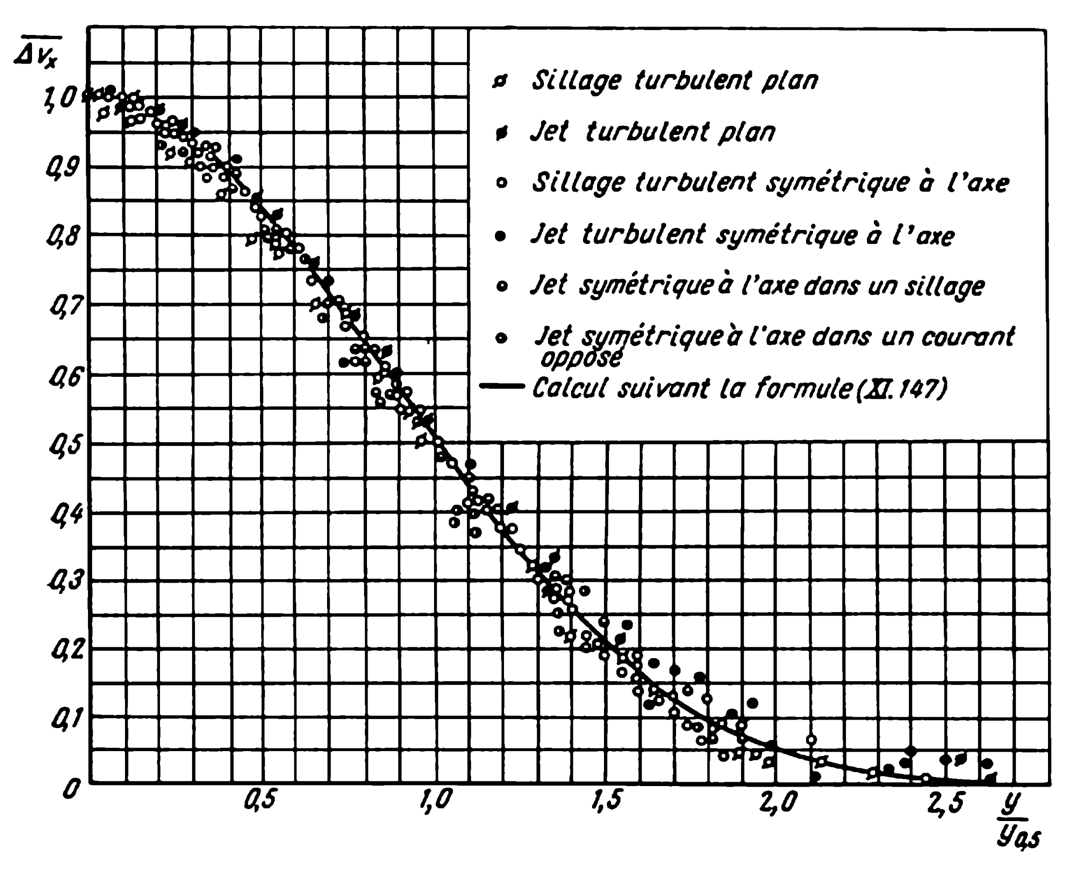


Fig. XI.34

dance entre la largeur du filet δ et la vitesse v_{xm}

$$I = 2\rho \int_0^{\delta} v_x^2 \, dy = 2\rho v_{xm}^2 \delta \int_0^1 \left(\frac{v_x}{v_{xm}} \right)^2 d\eta =$$

$$= 2\rho v_{xm}^2 \delta \int_0^1 (1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4) \, d\eta = \frac{4}{7} \rho v_{xm}^2 \delta,$$

d'où

$$\delta = \frac{7I}{4\rho v_{xm}^2}.$$

En substituant ce résultat dans (XI.148) après intégration nous aurons

$$v_{xm}^2 = \frac{7I}{96\rho \varkappa x}; \quad \delta = 24\varkappa x; \quad y_{0.5} = 9{,}25\varkappa x.$$

Ces formules permettent d'effectuer le calcul des caractéristiques du filet plan.

CHAPITRE XII

THÉORIE DE L'AILE

§ 76. CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES ET HYDRODYNAMIQUES DES AILES

En constructions navales, en aéronautique, en constructions mécaniques et en beaucoup d'autres branches de la technique, on utilise la force portante hydrodynamique qui apparaît en mouvement des corps ou en écoulement d'un fluide autour des corps immobiles. Pour créer la force de sustentation, on utilise des corps nommés des ailes. En constructions navales, les ailes sont employées pour les pales des hélices de bateau, les gouvernails, les bateaux à ailes portantes, etc. Dans certaines conditions, par exemple lors d'un mouvement circulaire, le corps d'un navire ordinaire peut être considéré comme une aile créant une force sustentatrice hydrodynamique. Pour produire une force sustentatrice hydrodynamique, on donne aux ailes une forme spéciale qui favorise en même temps la diminution de la résistance au mouvement.

A l'étude de l'aile, on introduit un certain nombre de caractéristiques géométriques décrivant sa forme. La forme d'une aile plane dans le plan peut être rectangulaire, trapézoïdale, etc. (fig. XII.1). L'aile est caractérisée par la surface S de sa projection dans le plan qui s'appelle surface de l'aile. Cette surface est considérée caractéristique. Outre les ailes planes, on emploie parfois des ailes en V, en X, circulaires, hélicoïdales et d'autres formes.

La longueur de l'aile dans la direction perpendiculaire à la vitesse v_∞ s'appelle envergure de l'aile l.

Si l'on trace un plan perpendiculaire à l'envergure de l'aile, dans son intersection avec l'aile on obtiendra le profil de l'aile. La forme du profil de l'aile le long de son envergure peut être constante ou variable. On utilise différents profils d'ailes, suivant les caractéristiques hydrodynamiques requises. En constructions navales on utilise par exemple des profils segmentés *1* (fig. XII.1) qui ont les bords d'attaque et de fuite aigus et les profils d'aviation *2*, *3* avec le bord d'attaque arrondi et le bord de fuite aigu. Dans les travaux de recherche, on considère souvent des profils schématisés sous la forme de plaques planes ou courbes (arcs).

Le segment de droite réunissant deux points extrêmes du profil est dit corde b (fig. XII.2). L'envergure de l'aile est caractérisée

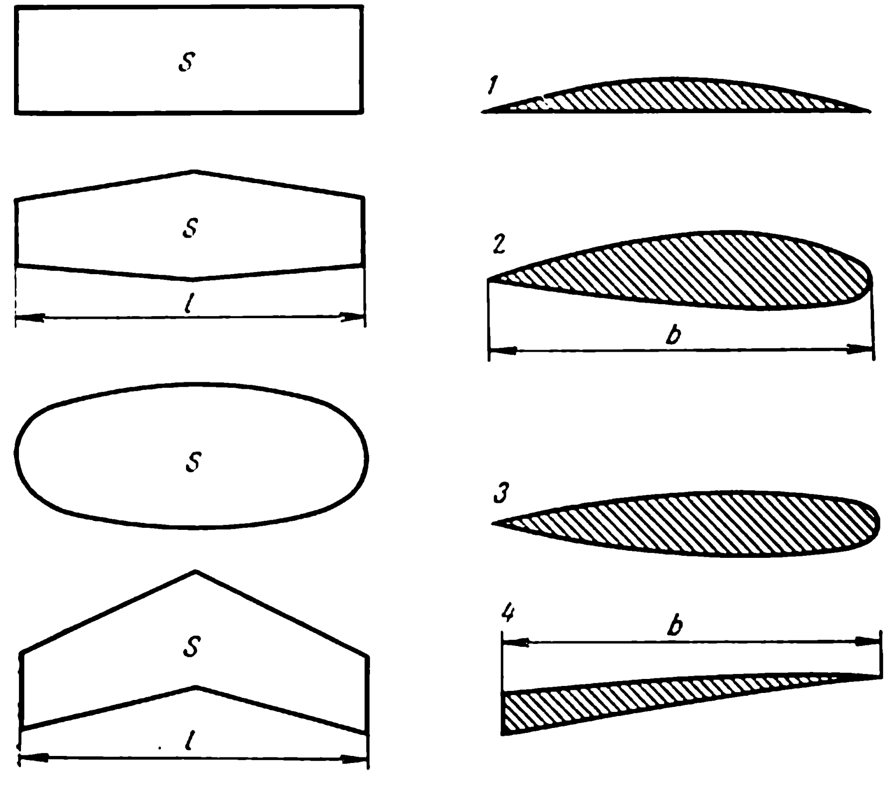


Fig. XII.1

par son allongement relatif λ. La valeur de l'allongement relatif de l'aile plane est

$$\lambda=\frac{l^2}{S}. \qquad \text{(XII.1)}$$

Dans une aile rectangulaire dans le plan, ayant une corde b

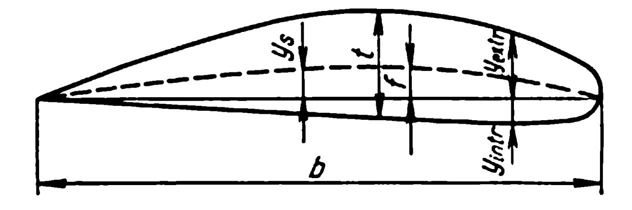


Fig. XII.2

constante pour tous les profils, $S = bl$; dans ce cas

$$\lambda=\frac{l}{b}$$

Suivant la valeur de λ on distingue des ailes d'envergure finie et petite (ordinairement $\lambda < 2$).

Dans les recherches théoriques, on considère également des ailes d'envergure infinie avec $\lambda = \infty$. Pour l'étude des caractéristiques hydrodynamiques de telles ailes, on peut se limiter à l'écoulement autour de leur profil, c'est-à-dire à examiner les caractéristiques de l'écoulement plan autour du profil de l'aile.

Le profil de l'aile est généralement donné sous la forme des ordonnées y_e et y_i comptées à partir de la corde jusqu'à l'extrados et l'intrados du profil. Pour certains profils, surtout pour ceux qui sont utilisés dans les recherches théoriques, la forme du profil peut être donnée par une équation.

L'aspect du profil dépend de la forme de sa ligne moyenne (squelette), dont les ordonnées y_s peuvent être calculées d'après la relation

$$y_s = \frac{y_e + y_i}{2}.$$

Les profils dont la ligne moyenne a une double courbure sont dits profils en S. La ligne moyenne des profils symétriques est droite et se confond avec la corde. La flèche maximale f de la ligne moyenne caractérise la cambrure du profil et est décrite par une courbure relative de la ligne moyenne $\overline{f} = f/b$. Pour les profils ordinaires $\overline{f}$ = 0-0,02.

L'épaisseur maximale du profil est $t = (y_e + y_i)_{max}$. Comme caractéristique géométrique du profil on considère son épaisseur relative $\overline{t} = t/b$ qui s'exprime en pour cent de la corde et varie ordinairement dans les limites de 0-25%. Les profils dont l'épaisseur relative ne dépasse pas 10 % sont dits parfois minces; leurs caractéristiques hydrodynamiques peuvent être théoriquement calculées par des méthodes plus simples par rapport aux profils épais. Les caractéristiques hydrodynamiques de l'aile dépendent de la position de l'épaisseur maximale et de la flèche maximale de la ligne moyenne suivant la corde et de la forme du profil. Actuellement il existe une série de profils à paramètres géométriques variables. En utilisant ces profils on peut en choisir tel qui répondra aux exigences requises (profils ЦАГИ, NACA, profils laminarisés, profils supercavitants *4* (fig. XII.1), etc.).

Pour l'étude de l'écoulement d'un fluide autour des ailes, on utilise souvent le système droit de coordonnées aérodynamiques x, y, z liées à l'aile, dans lequel l'axe des z est dirigé suivant l'envergure de l'aile. Nous admettons que ce système prend son origine o au point avant de la corde, c'est-à-dire sur le bord d'attaque du profil, et que l'axe des x est dirigé suivant la vitesse à l'infini v_∞ qui contourne l'aile à l'infini (fig. XII.3). Outre ce système, on emploie également un autre système x_1, y_1, z_1 des coordonnées liées, dont l'origine et l'axe des z_1 coïncident avec le précédent et l'axe des x_1 est dirigé suivant la corde du profil. L'angle α formé par la corde du profil et la vitesse à l'infini et, par conséquent, par les axes x et x_1 s'appelle angle d'incidence du profil; pour un mouvement non

transformé, c'est l'angle formé par la direction du mouvement de l'aile et la corde du profil.

L'aile, le long de l'envergure de laquelle les angles d'incidence de tous ses profils sont identiques, s'appelle non vrillée. Sur les ailes vrillées les angles d'attaque des éléments de l'aile varient le

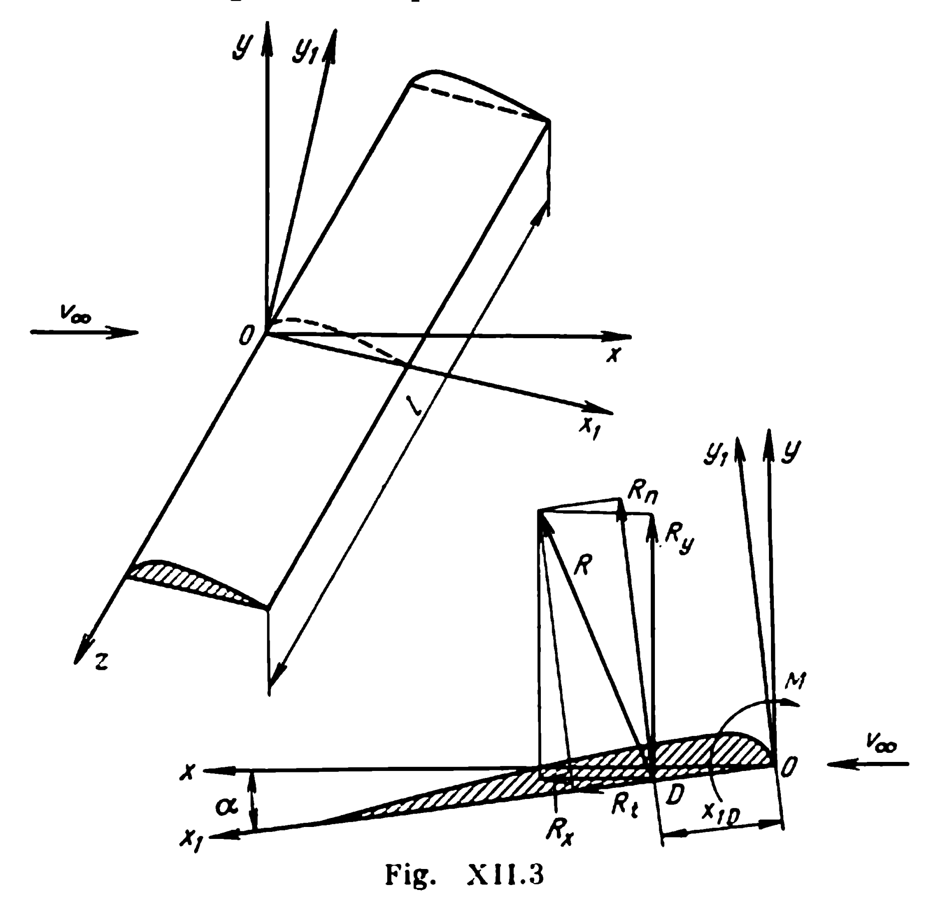


Fig. XII.3

long de son envergure. Le vrillement peut être conditionné aussi bien par la forme de l'aile que par les particularités d'écoulement autour de cette aile.

La réaction hydrodynamique R, apparaissant sur le profil de l'aile, peut être examinée dans n'importe quel système de coordonnées introduit ci-dessus. Dans le système aérodynamique des axes xoy les composantes de cette réaction sont R_x, force de résistance, et R_y, force sustentatrice. Conformément aux formules générales des forces hydrodynamiques établies dans la théorie de la similitude, la force portante et la force de la résistance (traînée) peuvent être représentées sous la forme

$$\left.\begin{aligned} R_x &= C_x \frac{\rho v_\infty^2}{2} S ; \\ R_y &= C_y \frac{\rho v_\infty^2}{2} S , \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII.2)}$$

où S est la surface de l'aile en plan, v_∞ vitesse de déplacement ou vitesse d'écoulement autour de l'aile.

Les coefficients sans dimensions C_x et C_y s'appellent respectivement coefficient de traînée et coefficient de portance de l'aile.

La force R peut être représentée sous la forme de la somme des composantes normale R_n et tangentielle R_t dans le système de coordonnées x_1, o, y_1; pour ces composantes sont valables les formules

$$R_n = C_n \frac{\rho v_\infty^2}{2} S; \qquad \text{(XII.3)}$$

$$R_t = C_t \frac{\rho v_\infty^2}{2} S. \qquad \text{(XII.4)}$$

D'après la fig. XII.3, il est facile d'établir la liaison entre les composantes R_x, R_y et R_t, R_n

$$R_t = R_x \cos\alpha - R_y \sin\alpha; \qquad \text{(XII.5)}$$

$$R_n = R_x \sin\alpha + R_y \cos\alpha. \qquad \text{(XII.6)}$$

Des relations analogues existent entre les coefficients de ces forces

$$C_t = C_x \cos\alpha - C_y \sin\alpha; \qquad \text{(XII.7)}$$

$$C_n = C_x \sin\alpha + C_y \cos\alpha. \qquad \text{(XII.8)}$$

Avec de faibles angles d'incidence, quand on peut admettre que $\sin\alpha \approx \alpha$ et $\cos\alpha \approx 1$, on utilise des relations simplifiées

$$C_t = C_x - C_y\alpha; \qquad \text{(XII.9)}$$

$$C_n = C_y. \qquad \text{(XII.10)}$$

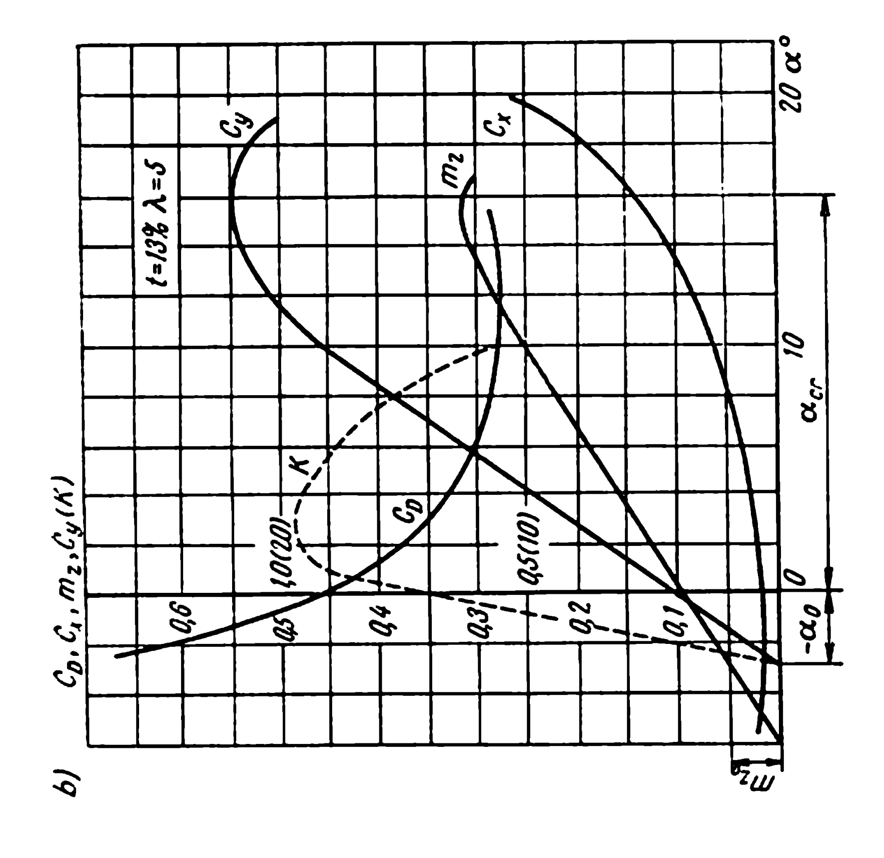
On tient compte cependant que C_x est ordinairement petite et on néglige donc le produit $C_x\alpha$.

Pour évaluer l'efficacité hydrodynamique des ailes, on fait appel à la notion de la qualité hydrodynamique K, que l'on détermine comme le rapport de la portance à la traînée pour l'angle d'incidence donné de l'aile

$$K = \frac{R_y}{R_x} = \frac{C_y}{C_x}. \qquad \text{(XII.11)}$$

La réaction hydrodynamique R est ordinairement déplacée le long de la ligne de son action et on la considère comme étant appliquée au point d'intersection de cette ligne avec la corde du profil de l'aile. Ce point D s'appelle centre de poussée du profil. Sa position est caractérisée par l'abscisse x_{1D}. Le rapport sans dimensions

$$C_D = \frac{x_{1D}}{b} \qquad \text{(XII.12)}$$


b)
$C_D, C_x, m_z, C_y (K)$
t=13% λ=5
C_y
m_z
C_x
K
C_D
1,0(20)
0,5(10)
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
20 α°
10
0
$-\alpha_0$
α_{cr}

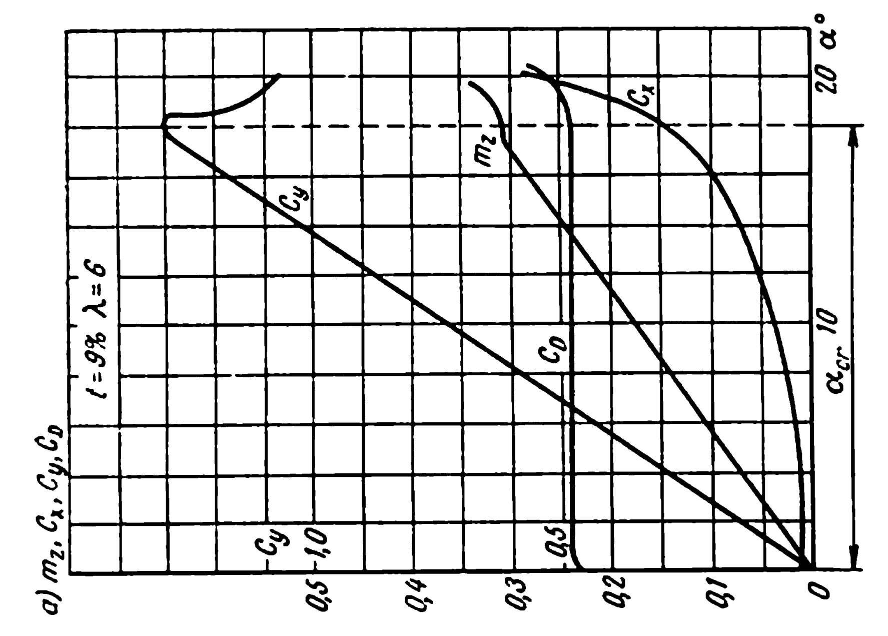

a) m_z, C_x, C_y, C_D
t=9% λ=6
C_y
m_z
C_x
C_D
C_y-1,0
0,5
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
20 α°
10
α_{cr}

Fig. XII.4

est dit coefficient du centre de poussée de l'aile. En admettant la force R appliquée au centre de poussée, on peut déterminer son moment M par rapport à l'axe des z, c'est-à-dire par rapport au bord d'attaque du profil

$$M = R_n x_{1D}. \quad \text{(XII.13)}$$

Pour le moment hydrodynamique, on peut également utiliser les formules générales de la théorie de la similitude et le représenter sous la forme

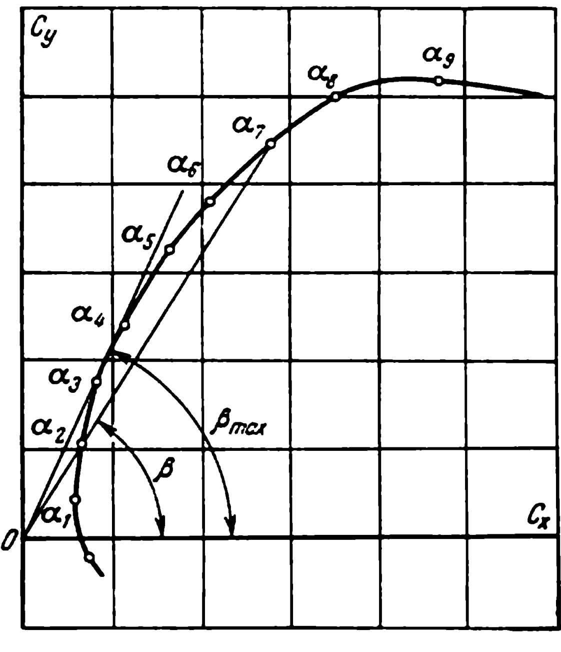


Fig. XII.5

$$M_z = m_z \frac{\rho v_\infty^2}{2} Sb, \quad \text{(XII.14)}$$

où m_z est le coefficient sans dimensions du moment.

Comme les axes z et z_1 coïncident, alors il est évident que $M_z = M_{z_1}$ et $m_z = m_{z_1}$. En se servant des relations (XII.13) et (XII.14), il est aisé d'établir la liaison suivante entre les coefficients C_D et m_z:

$$C_D = \frac{m_z}{C_n}, \quad \text{(XII.15)}$$

et pour les faibles angles d'incidence, en tenant compte de l'égalité (XII.10), on peut utiliser la formule

$$C_D = \frac{m_z}{C_y}. \quad \text{(XII.16)}$$

Pour le profil donné les coefficients C_x, C_y, m_z, C_t, C_n et C_D sont des fonctions de l'angle d'incidence α, ainsi que des critères de la similitude dynamique, c'est-à-dire des nombres de Reynolds, Froude, Strouhal, du nombre de cavitation, et dépendent des conditions du mouvement de l'aile (dans un fluide illimité, au voisinage d'une surface solide, etc.). En cas du mouvement d'un profil dans un gaz avec de grandes vitesses, le nombre des critères de la similitude comprend le nombre de Mach.

Pour la description des caractéristiques hydrodynamiques du profil, on utilise deux types principaux de graphiques. Le premier d'entre eux (fig. XII,4,*a* et *b*) représente la dépendance des coefficients C_x, C_y et C_D de l'angle d'attaque de l'aile. Le second graphique (fig. XII.5) établit la relation $C_y = f(C_x)$ et s'appelle polaire d'aile. Sur une polaire on marque les angles d'attaque correspondant à chaque combinaison des valeurs C_y et C_x caractéristique pour le profil.

Il est commode d'utiliser la polaire pour la détermination de la qualité de l'aile. Pour cela, il suffit de réunir son point correspondant à l'angle d'attaque donné α par une droite avec l'origine des coordonnées. La tangente de l'angle d'inclinaison de cette droite β par rapport à l'axe des abscisses, si l'échelle choisie pour C_x et C_y est la même, est égale à la qualité de l'aile

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{C_y}{C_x} = K.$$

D'après la figure on voit qu'il existe un angle d'attaque tel pour lequel la qualité de l'aile a un maximum; on peut trouver

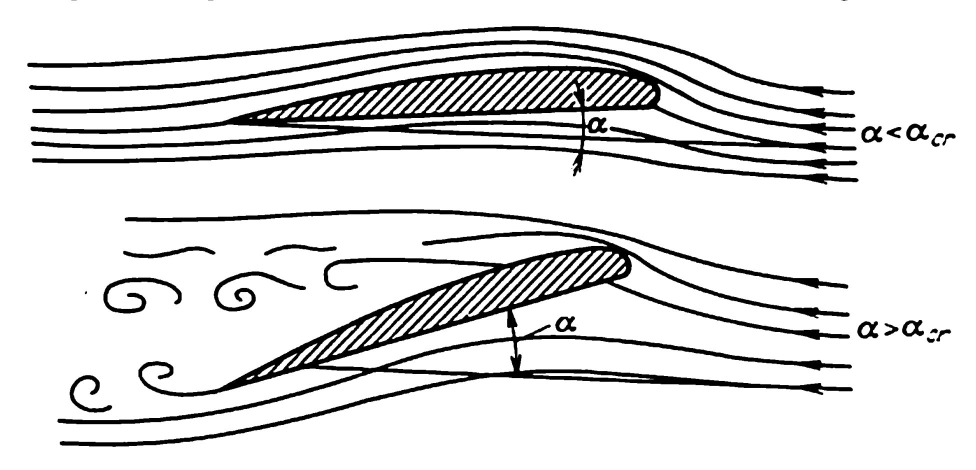


Fig. XII.6

cet angle en traçant une tangente à la polaire; dans ce cas $\beta = \beta_{max}$ et, par conséquent, $K = K_{max}$.

Les courbes de la fig. XII.4 permettent de déterminer un certain nombre de particularités caractéristiques pour la majorité des ailes. La courbe $C_y = f(\alpha)$ a un maximum $C_{y\,max}$ pour un certain angle d'attaque. Cet angle est dit critique α_{cr}; pour les ailes de grande envergure $\alpha_{cr} = 12 \div 18°$. Pour les angles d'attaque supérieurs à l'angle critique, on observe une diminution rapide de C_y et par conséquent de la portance de l'aile, qui s'accompagne d'une croissance sensible de C_x, c'est-à-dire d'une baisse brusque de sa qualité. L'origine de ce phénomène réside dans l'apparition du décollement de la couche limite sur l'extrados du profil, à la suite de quoi l'écoulement régulier autour de l'extrados se perturbe et il apparaît une allée tourbillonnaire dans le sillage à l'arrière de l'aile (fig. XII.6). Pour établir l'origine de l'apparition du décollement de la couche limite de l'extrados avec $\alpha = \alpha_{cr}$, il faut examiner l'épure de la distribution des pressions sur la surface du profil avec différents angles d'attaque.

La figure XII.7 représente l'épure de la distribution du coefficient de pression $\bar{p} = \frac{p - p_0}{\rho v_\infty^2/2}$ sur l'extrados et l'intrados du profil

pour deux valeurs de l'angle d'attaque. La force portante du profil est proportionnelle à la somme des surfaces des parties positive et négative de ces épures. Comme on le voit de la figure, avec des angles d'attaque positifs, une dépression sensible apparaît sur l'extrados, au prix de laquelle est créée la partie principale de la force sustentatrice. Pour cette raison, on appelle parfois l'extrados côté aspirateur du profil. Au fur et à mesure que l'on augmente l'angle d'attaque, la dépression croît, c'est-à-dire que la valeur absolue P_{min} augmente et par conséquent la chute de pression longitudinale le long de l'extrados croît également. L'accroissement de la chute de pression longitudinale à l'approche de l'angle d'attaque critique entraîne le décollement de la couche limite, ce qui entraîne la perturbation de l'écoulement régulier autour de l'extrados et de l'arête vive arrière du profil.

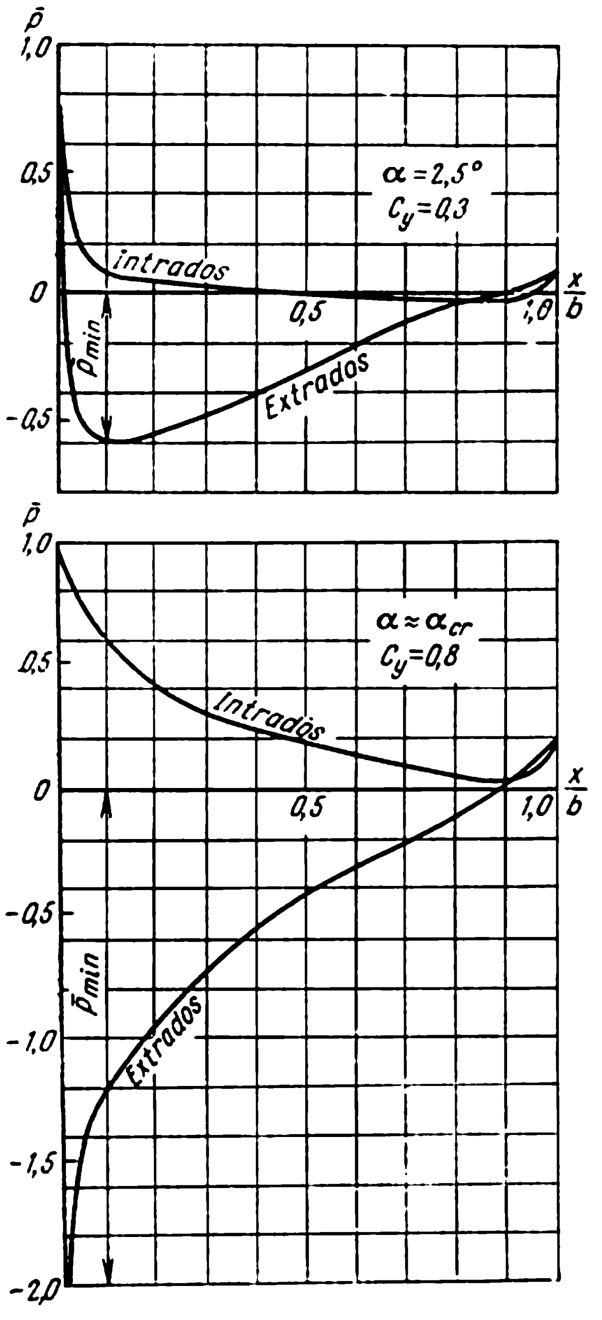


Fig. XII.7

La portance des profils symétriques (fig. XII.4,*a*) est nulle avec $\alpha = 0$; cependant en écoulement autour des profils asymétriques $C_y \neq 0$ avec $\alpha = 0$, et le profil crée une certaine force de sustentation. Pour un profil asymétrique $C_y = 0$ avec un certain angle d'incidence $\alpha = -\alpha_0$ (fig. XII.4,*b*), c'est-à-dire si la direction de son contournement par le fluide diffère de celle de la corde. La droite qui passe dans cette direction par l'arête vive arrière du profil est dite axe de portance nulle; sa direction forme un angle α_0 avec l'axe des x_1. L'angle α_0 s'appelle angle de la portance nulle. La valeur du

coefficient du moment hydrodynamique correspondant à cet angle d'écoulement $m_z = m_{z0}$.

Comme on le voit de la fig. XII.4, avec les angles d'attaque inférieurs à la valeur critique pour les profils symétrique et asymétrique, les relations $C_y = f_1(\alpha)$ et $m_z = f_2(\alpha)$ représentent pratiquement des lignes droites inclinées. Cela permet d'utiliser pour la détermination de C_y et m_z des équations linéaires suivantes:

$$C_y = \frac{dC_y}{d\alpha}(\alpha - \alpha_0) = C_y^{\alpha}(\alpha - \alpha_0); \qquad \text{(XII.17)}$$

$$m_z = m_{z_0} + \frac{dm_z}{d\alpha}(\alpha - \alpha_0) = m_z + m_z^{\alpha}(\alpha - \alpha_0), \qquad \text{(XII.18)}$$

où $dC_y/d\alpha = C_y^{\alpha}$ et $dm_z/d\alpha = m_z^{\alpha}$ sont des grandeurs constantes, qui dépendent de la forme du profil et de l'envergure de l'aile. Elles s'appellent respectivement dérivées du coefficient de portance et du moment de l'angle d'incidence. Si on prend pour point par rapport auquel on détermine le moment apparaissant sur le profil un point arbitraire d'abscisse x_1 disposé sur l'axe des x_1, alors le moment M_{z_1} de la réaction R avec de faibles angles d'incidence, en admettant $R_n \approx R_y$, pourra s'écrire sous la forme suivante

$$M_{z_1} = M_z + R_y x_1 \qquad \text{(XII.19)}$$

ou, en tenant compte des formules générales (XII.1) et (XII.2) et des relations (XII.17) et (XII.18),

$$m_{z_1}\frac{\rho v_\infty^2}{2}Sb = \left[m_{z_0} + \frac{dm_z}{d\alpha}(\alpha - \alpha_0)\right]\frac{\rho v_\infty^2}{2}Sb + C_y\frac{\rho v_\infty^2}{2}Sx_1.$$

Donc, étant donné que $\frac{dm_z}{d\alpha} = \frac{dm_z}{dC_y}\frac{dC_y}{d\alpha}$,

$$m_{z_1} = m_{z_0} + \left(\frac{dm_z}{dC_y} + \frac{x_1}{b}\right)C_y. \qquad \text{(XII.20)}$$

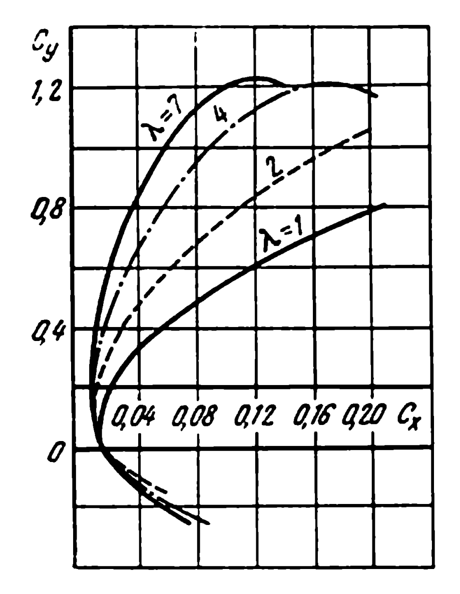
Comme $\frac{dm_z}{dC_y} = \frac{dm_z}{d\alpha} : \frac{dC_y}{d\alpha}$ et m_{z_0} pour le profil donné avec des angles d'incidence inférieurs à la valeur critique sont des grandeurs constantes, alors en vertu de la relation (XII.20) on peut conclure qu'il existe sur le profil un point disposé sur l'axe des x_1 d'abscisse $x_1 = x_{1f}$, le moment par rapport auquel M_f ne dépend pas de l'angle d'incidence. Ce point est dit foyer d'aile. Pour la détermination de son abscisse, il faut, compte tenu de ce que $C_y = f_1(\alpha)$, rendre nul le facteur de C_y dans (XII.20), c'est-à-dire

$$x_{1f} = -b\frac{dm_z}{dC_y}; \qquad \text{(XII.21)}$$

le moment par rapport à ce point est

$$M_f = m_{z_0}\frac{\rho v_\infty^2}{2}Sb. \qquad \text{(XII.22)}$$

Dans l'écoulement autour de l'aile en l'absence d'une surface libre du fluide, sans cavitation et dans les conditions où le fluide est considéré comme incompressible, les fonctions $C_x(\alpha)$, $C_y(\alpha)$, $m_z(\alpha)$ et $C_D(\alpha)$ sont considérées comme indépendantes de la vitesse du mouvement, c'est-à-dire l'on considère ces coefficients comme automodelés, identiques pour les prototypes et leurs maquettes. La condition d'automodelage peut être considérée comme observée



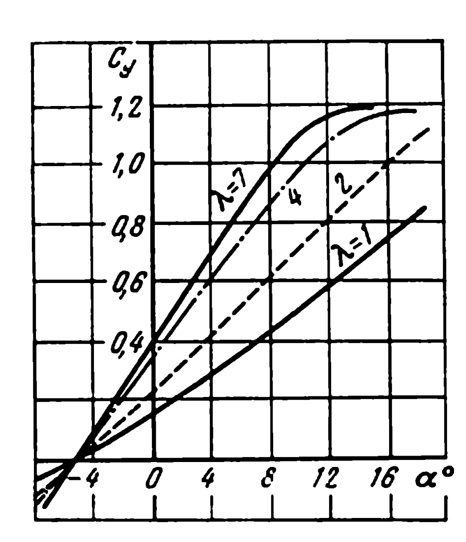


Fig. XII.8

si au cours des essais des maquettes d'ailes on obtient la correspondance des régimes d'écoulement dans leur couche limite aux conditions réelles, c'est-à-dire on obtient des valeurs suffisamment grandes des nombres Re au cours des essais des maquettes d'ailes dans les laboratoires $\mathrm{Re} = \frac{v_\infty b}{\nu} > (1 \div 1{,}5) \cdot 10^{5}$.

Les caractéristiques hydrodynamiques des ailes pour une forme invariable de leur profil dépendent notablement de leur allongement relatif λ. La fig. XII.8 montre l'influence de la variation de l'allongement relatif sur les valeurs des coefficients C_x et C_y d'une aile rectangulaire en plan. Une particularité caractéristique des ailes de faible allongement est l'augmentation de l'angle d'incidence critique, la diminution des valeurs $dC_y/d\alpha$ et l'accroissement des coefficients de traînée au fur et à mesure qu'on diminue l'allongement. Avec des valeurs très faibles de λ on observe une perturbation de la dépendance linéaire $C_y(\alpha)$, c'est-à-dire qu'on ne peut considérer la dérivée $dC_y/d\alpha$ comme une grandeur constante pour les différents angles d'incidence de l'aile.

Une grande influence sur les caractéristiques hydrodynamiques du profil peuvent exercer les frontières de l'écoulement.

La fig. XII.9 montre les courbes qui caractérisent l'influence exercée par une paroi plane solide sur C_y de l'aile.

L'influence de la surface libre du liquide sur les caractéristiques d'une aile portante se déplaçant avec de grands nombres de Froude est montrée sur la fig. XII.10. Comme il ressort de la figure, le coefficient de portance et l'angle α_0 diminuent au fur et à mesure de la diminution de la profondeur d'immersion de l'aile.

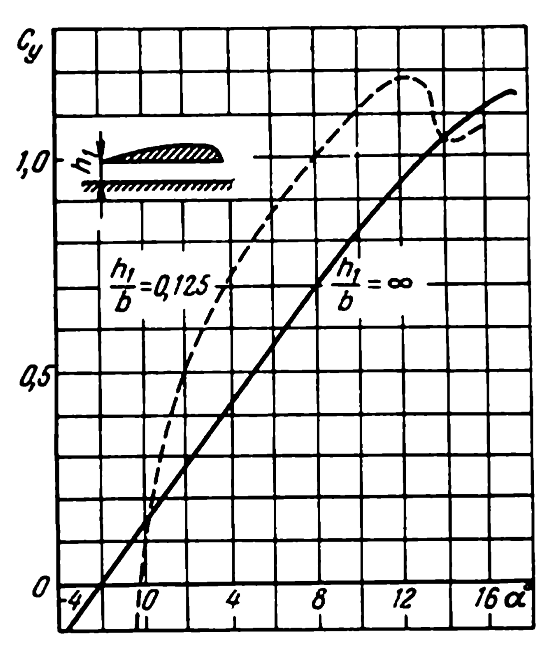


Fig. XII.9

Pour augmenter l'efficacité des ailes, on recourt aux dispositifs spéciaux tels que volets de bord d'attaque et volets de courbure. En tournant le volet de courbure on peut varier la ligne moyenne du profil. Les caractéristiques du profil avec volet de courbure dépendent de l'angle de pivotement δ_c du volet de courbure (fig. XII.11) pour un angle d'incidence invariable du profil principal. L'utilisation du volet de bord d'attaque permet de créer

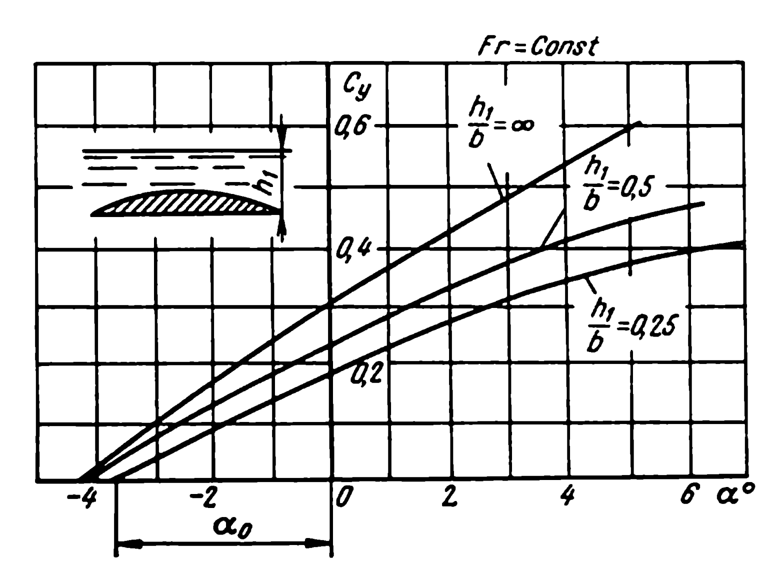
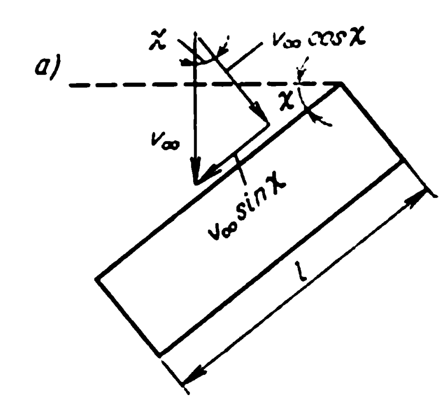


Fig. XII.10

des déflexions favorables du courant sur le profil principal et d'accélérer l'écoulement dans la couche limite sur l'extrados.

Dans un certain nombre de cas, il est nécessaire de déterminer les caractéristiques des ailes dites en attaque oblique ; le bord d'atta-

que de ces ailes n'est pas perpendiculaire à la vitesse à l'infini mais forme avec la perpendiculaire à la vitesse v_∞ un angle de glissement χ (fig. XII.12,*a*). Dans ce cas, en décomposant la vitesse à l'infini en deux composantes: longitudinale $v_\infty \sin\chi$ et perpendiculaire $v_\infty \cos\chi$ à la génératrice de l'aile, nous remarquons que l'écoulement longitudinal autour de l'aile rectangulaire ne s'accompagne pas de l'apparition de vitesses induites. Les vitesses induites n'apparaissent qu'au prix de l'écoulement autour du profil



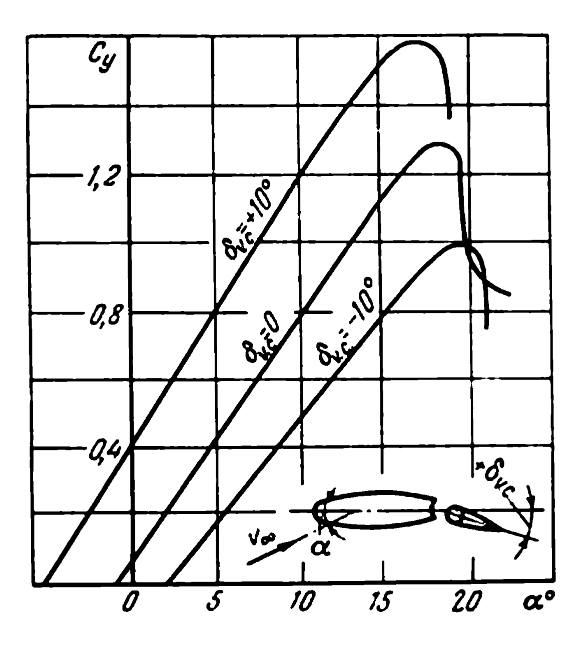


Fig. XII.11

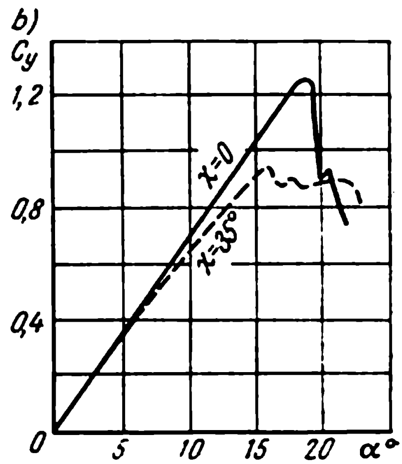


Fig. XII.12

transversal (normal) de la section de l'aile. Ainsi, la portance hydrodynamique de l'aile en attaque oblique dépend en réalité de la vitesse à l'infini pour ses sections normales $v_\infty \cos\chi$, c'est-à-dire

$$R_y = C_{y_n} \frac{\rho v_\infty^2}{2} \cos^2 \chi S. \tag{XII.23}$$

En comparant cette expression avec celle qui est généralement utilisée pour le calcul de la portance (XII.2), nous obtenons que le coefficient de portance de l'aile en attaque oblique est

$$C_y = C_{y_n} \cos^2 \chi, \tag{XII.24}$$

où C_{y_n} est le coefficient de portance du profil de la section normale de l'aile.

L'angle d'incidence α_p de la section perpendiculaire à l'envergure l de l'aile en attaque oblique est

$$\alpha_p = \frac{\alpha}{\cos\chi},$$

où α est l'angle d'incidence de la section de l'aile qui coïncide avec la direction de la vitesse v_∞ de l'écoulement à l'infini.

Comme le coefficient C_y peut être obtenu par intégration des coefficients de pression sur la surface du profil de l'aile, la formule (XII.24) permet de supposer qu'une dépendance analogue existe également entre les coefficients de la pression des ailes en attaque normale $\overline{p}_n$ et en attaque oblique $\overline{p}$

$$\overline{p} = \overline{p}_n \cos^2\chi. \qquad \text{(XII.25)}$$

Cette égalité témoigne en particulier de ce que sur l'aile en attaque oblique on observe une diminution de la dépression maximale de l'épure de pression. Grâce à ce fait, le début de la cavitation lors du mouvement d'une telle aile dans l'eau est un peu retardé par rapport à une aile normale.

Les particularités indiquées de l'aile en attaque oblique peuvent être utilisées pour l'évaluation de l'efficacité des ailes en flèche, si leur envergure est suffisamment grande. Dans ce cas, le rôle de l'angle de glissement est assumé par l'angle de la flèche. La flèche des ailes contribue à l'augmentation des vitesses d'écoulement sans cavitation, ce qui est le cas, par exemple, des bateaux à ailes sous-marines. L'influence de l'angle de la flèche χ sur le coefficient de portance de l'aile est montrée sur la fig. XII.12,*b*.

§ 77. THÉORÈME DE JOUKOVSKI

Pour l'étude théorique et le calcul de la réaction hydrodynamique apparaissant lors de l'écoulement autour d'un profil de l'aile, on peut parfaitement se servir de l'hypothèse suivant laquelle le fluide est non visqueux. Commençons l'étude théorique de la réaction hydrodynamique par le cas où le profil de l'aile fait partie d'une grille d'aubes plane. Par grille d'aubes on entend le système d'un nombre infini de profils identiques distant également l'un de l'autre. La distance entre les profils t_{gr} est dite pas de la grille d'aubes (fig. XII.13), et la ligne le long de laquelle sont disposés les profils, axe de la grille. Les grilles de profils trouvent un large emploi dans la technique. Si l'on trace coaxialement avec l'axe de l'hélice de bateau une section cylindrique de ses pales et si on la développe ensuite sur un plan, on obtiendra alors sur ce développement un système de profils sous la forme d'une grille. De façon analogue, on peut considérer comme une grille le système de profils dans les turbines à vapeur et hydrauliques, les pompes, etc.

La particularité caractéristique de l'écoulement à travers une grille d'aubes infinie est que la valeur et la direction des vitesses de l'écoulement à l'infini en amont et en aval de la grille sont différentes. Ceci constitue la différence entre l'écoulement autour d'un profil dans une grille infinie et l'écoulement autour d'un profil isolé, dans lequel les vitesses à l'infini en aval et en amont sont égales. La propriété notée permet d'utiliser les grilles d'aubes en qualité d'appareil directeur.

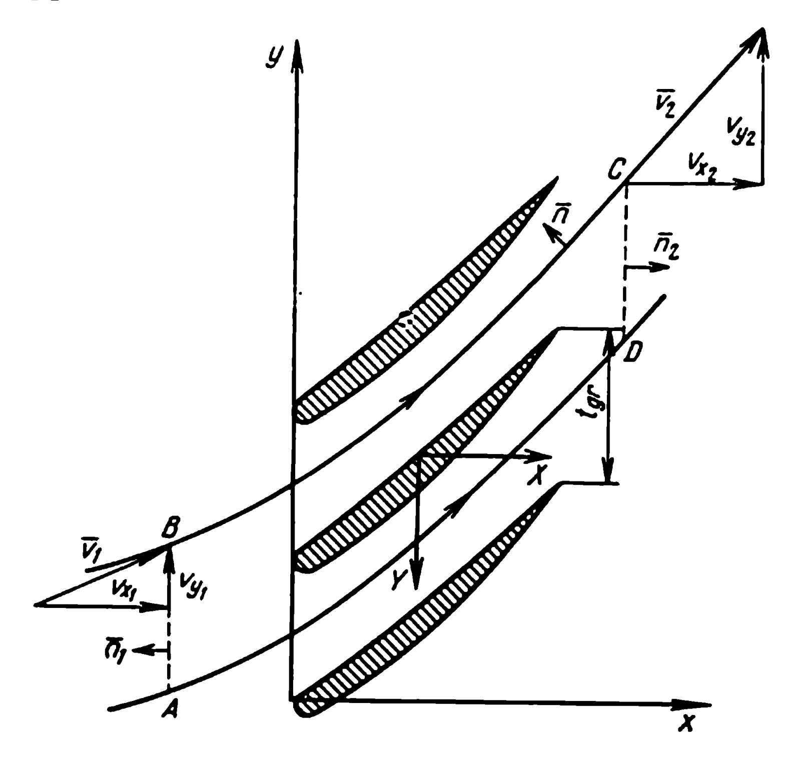


Fig. XII.13

En l'écoulement autour d'un profil dans une grille on observe une périodicité dans la variation de la structure de l'écoulement le long de l'axe de la grille, car l'image de l'écoulement autour de tous les profils est identique. Ceci permet de se limiter par la suite à l'étude de la réaction hydrodynamique apparaissant sur un profil isolé de la grille.

En supposant que l'écoulement autour de la grille s'effectue par un courant permanent de fluide non visqueux dont la vitesse à l'infini en amont de la grille est $\bar{v}_1$ et à l'infini en aval $\bar{v}_2$, nous allons utiliser pour la détermination de la réaction hydrodynamique $\bar{R} = \bar{i}X + \bar{j}Y$, apparaissant sur le profil, la loi de la quantité du mouvement (IV.33) suivant laquelle en mouvement permanent

$$\rho \oint_S \bar{v} v_n \, dS = -\oint_S p\bar{n} \, dS - \bar{R}. \qquad \text{(XII.26)}$$

Pour l'utilisation de cette loi, isolons une aire de référence fermée limitée extérieurement par deux lignes de courant correspondantes moyennes entre les profils *BC* et *AD*, ainsi que par les sections de l'écoulement *AB* et *CD* parallèles à l'axe de la grille. De l'intérieur la masse de fluide contenue dans la surface de référence est limitée par la surface du profil. Dirigeons l'axe des y le long de l'axe de la grille et l'axe des x perpendiculairement à celle-ci.

En supposant que la pression dans l'écoulement loin en amont de la grille dans la section *AB* soit égale à p_1 et loin en aval de la grille dans la section *CD* égale à p_2 et en représentant les vecteurs vitesse comme la somme de leurs composantes

$$\left.\begin{aligned}\bar{v}_1&=\bar{i}v_{x1}+\bar{j}v_{y1};\\ \bar{v}_2&=\bar{i}v_{x2}+\bar{j}v_{y2},\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII.27)}$$

on peut écrire la relation (XII.26) sous la forme suivante

$$-\rho v_{x1}\bar{v}_1t_{gr}+\rho v_{x2}\bar{v}_2t_{gr}=-p_1\bar{n}_1t_{gr}-p_2\bar{n}_2t_{gr}-\bar{R}. \qquad \text{(XII.28)}$$

Ici on tient compte de ce que sur le tronçon *AB* la projection de la vitesse $v_n=-v_{x1}$, sur le tronçon *CD* $v_n=v_{x2}$ et le long de la ligne de courant et sur la surface du profil $v_n=0$; les forces de pression agissent suivant la normale intérieure à la surface *ABCD* et sur les tronçons des lignes de courant *BC* et *AD* les forces de pression sont égales, mais dirigées en sens contraire et les intégrales qui leur correspondent au second membre (XII.28) s'annulent. Le dernier terme $-\bar{R}$ représente la réaction hydrodynamique cherchée agissant du côté du fluide sur le profil; le signe moins signifie qu'elle est contraire à la force $\bar{R}$ agissant du côté du profil sur le fluide. En projetant l'égalité vectorielle (XII.28) sur les axes de coordonnées et tenant compte des signes des projections de la vitesse et des vecteurs unité de la normale, nous obtenons

$$\left.\begin{aligned}\rho t_{gr}(-v_{x_1}^2+v_{x_2}^2)&=(p_1-p_2)t_{gr}-X;\\ \rho t_{gr}(-v_{x_1}v_{y_1}+v_{x_2}v_{y_2})&=-Y.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII.29)}$$

Pour déterminer les relations supplémentaires entre les grandeurs intervenant dans ces formules, faisons appel à l'équation de continuité. Suivant cette équation, une égalité des débits de fluide à travers les sections *AB* et *CD* doit s'observer, étant donné que *BC* et *AD* sont des lignes de courant. En tenant compte de ce fait, nous obtenons

$$v_{x_1}t_{gr}=v_{x_2}t_{gr},$$

c'est-à-dire les vecteurs vitesse $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ ont des projections égales sur l'axe des x

$$v_{x_1}=v_{x_2}. \qquad \text{(XII.30)}$$

Pour exprimer la liaison entre les pressions p_1 et p_2, appliquons l'équation de Bernoulli aux points B et C disposés sur la ligne de courant

$$p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2+\frac{\rho v_2^2}{2}.$$

En tenant compte de ce que $v_1^2 = v_{x_1}^2+v_{y_1}^2$ et $v_2^2 = v_{x_2}^2+v_{y_2}^2$ et en utilisant la relation (XII.30), nous trouvons

$$p_1-p_2=\frac{\rho}{2}(v_{x_2}^2+v_{y_2}^2-v_{x_1}^2-v_{y_1}^2)=\frac{\rho}{2}(v_{y_2}^2-v_{y_1}^2). \quad \text{(XII.31)}$$

Introduisons maintenant le vecteur de la vitesse moyenne de l'écoulement à l'infini $\bar{v}_0$, en entendant par-là la moyenne géométrique des vecteurs $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$

$$\bar{v}_0=\frac{\bar{v}_1+\bar{v}_2}{2}=\bar{i}v_{x_0}+\bar{j}v_{y_0}, \quad \text{(XII.32)}$$

où, compte tenu de (XII.27) et (XII.30),

$$\left.\begin{aligned} v_{x_0}&=v_{x_1}=v_{x_2};\\ v_{y_0}&=\frac{v_{y_1}+v_{y_2}}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(XII.33)}$$

En utilisant les formules (XII.30), (XII.31) et (XII.33), on peut déterminer les projections X et Y de la réaction R d'après (XII.29)

$$\left.\begin{aligned} X&=\rho t_{\text{gr}}v_{y_0}(v_{y_2}-v_{y_1});\\ Y&=-\rho t_{\text{gr}}v_{x_0}(v_{y_2}-v_{y_1}). \end{aligned}\right\} \quad \text{(XII.34)}$$

Maintenant calculons la circulation de la vitesse Γ le long du contour $ABCDA$, en le contournant de manière que le domaine intérieur soit disposé à gauche, c'est-à-dire dans le cas donné dans le sens inverse des aiguilles. Cette circulation sera égale à la circulation autour du profil dans la grille. En calculant la circulation le long des tronçons de la ligne de courant AD et CB, il faut tenir compte de ce que les intégrales de contour sur ces tronçons sont égales, mais de signe contraire, c'est-à-dire s'annulent mutuellement, et alors on obtient finalement

$$\Gamma=(v_{y_2}-v_{y_1})\,t_{\text{gr}}. \quad \text{(XII.35)}$$

De cette relation on voit que si les vitesses loin en amont $\bar{v}_1$ et loin en aval $\bar{v}_2$ de la grille sont égales, alors $v_{y_1} = v_{y_2}$, la circulation autour du profil dans la grille n'a pas lieu et par conséquent, en vertu de (XII.34), la réaction agissant sur le profil est nulle. Dans ce cas la grille ne dévie pas l'écoulement.

En utilisant la relation (XII.35), nous obtenons les expressions suivantes pour les composantes de la réaction

$$X=\rho v_{y_0}\Gamma; \tag{XII.36}$$

$$Y=-\rho v_{x_0}\Gamma. \tag{XII.37}$$

En définitive, en calculant le module de la réaction, nous trouvons

$$|R|=\rho\Gamma\sqrt{v_{x_0}^2+v_{y_0}^2}=\rho v_0\Gamma. \tag{XII.38}$$

On peut déterminer la direction de la ligne d'action de la réaction si on multiplie les égalités (XII.36) et (XII.37) par v_{x_0} et v_{y_0} et en les additionnant. Finalement on a

$$Xv_{x_0}+Yv_{y_0}=0. \tag{XII.39}$$

Cette condition signifie que le vecteur de la réaction est perpendiculaire au vecteur v_0. L'expression (XII.38) permet de formuler le théorème de Joukovski pour le profil de la grille: dans l'écoulement autour d'un profil de la grille sur celui-ci apparaît une réaction hydrodynamique égale pour l'unité d'envergure au produit de la densité du fluide, de la circulation de la vitesse autour du profil et de la vitesse moyenne de l'écoulement en amont et en aval de la grille; on peut déterminer la direction de cette réaction si l'on tourne le vecteur de la vitesse moyenne $\overline{v}_0$ de 90° dans le sens inverse à la circulation.

Comme pour la déduction de la formule (XII.38) on a examiné seulement les surpressions hydrodynamiques, dans les calculs de la valeur globale de la réaction du fluide il est indispensable d'ajouter à la force R le vecteur de la poussée d'Archimède. Ce théorème permet de passer au théorème de Joukovski pour le profil isolé examiné au ch. VI. Pour cela, il faut tenir compte de ce que l'écoulement autour d'un profil isolé peut être examiné comme le cas limite de son écoulement dans la grille lorsque le pas de la grille tend à l'infini. Dans ce cas, la vitesse de l'écoulement à l'infini en amont et en aval du profil est la même, c'est-à-dire $\overline{v}_1=\overline{v}_2=\overline{v}_\infty$ et la circulation Γ se détermine comme pour le profil dans un fluide à l'infini, c'est-à-dire de (XII.38)

$$|R|=\rho v_\infty\Gamma. \tag{XII.40}$$

Ce résultat correspond à la formule (IV.17) obtenue par une autre méthode. Le théorème de Joukovski, publié par lui pour la première fois en 1906, a une importance fondamentale dans l'élaboration de l'hydroaérodynamique de l'aile et de la théorie de l'écoulement de n'importe quels corps qui créent une force sustentatrice hydrodynamique. Pour cette raison, dans de nombreuses recherches ultérieures ce théorème a été étendu aux différentes conditions spéciales

d'écoulement autour des corps ou des particularités hydrodynamiques. L'exemple d'une telle généralisation est le théorème de Joukovski pour le profil de la grille examiné ci-dessus.

Considérons le cas particulier du théorème de Joukovski. Lors de recherches théoriques, il arrive souvent à examiner l'écoulement autour d'un tourbillon disposé dans un écoulement plan de fluide hétérogène potentiel. Calculons la réaction hydrodynamique qui apparaît dans le cas où la circulation du tourbillon disposé en un point quelconque z_1 de la surface de la variable complexe z constitue une valeur Γ. Si la fonction caractéristique de l'écoulement plan hétérogène potentiel, d'une vitesse finie au point $z = z_1$, est connue $w_1(z)$, alors en utilisant le principe de la superposition des écoulements, on trouve que pour l'écoulement résultant la fonction caractéristique sommée a la forme

$$w(z) = w_1(z) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_1).$$

La vitesse complexe de l'écoulement est

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw_1}{dz} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z_1}. \tag{XII.41}$$

Pour le calcul de la réaction hydrodynamique R, utilisons la première formule de Tchaplyguine (VI.8)

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_L \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz,$$

où L est un contour fermé quelconque, entourant le tourbillon examiné.

Décomposons la vitesse complexe dw_1/dz en série suivant les puissances $z - z_1$, en employant la formule de Taylor

$$\frac{dw_1}{dz} = \left(\frac{dw_1}{dz}\right)_1 + \left(\frac{d^2w_1}{dz^2}\right)_1 (z - z_1) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^3w_1}{dz^3}\right)_1 (z - z_1)^2 + \ldots, \tag{XII.42}$$

où $(dw_1/dz)_1$, $(d^2w_1/dz^2)_1$, etc., sont les constantes représentant les valeurs des dérivées de la fonction décomposée au point de coordonnée complexe $z = z_1$.

En substituant (XII.41) dans la formule de Tchaplyguine et en tenant compte de la décomposition (XII.42), nous obtenons

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_L \left[\left(\frac{dw_1}{dz}\right)_1 + \left(\frac{d^2w_1}{dz^2}\right)_1 (z - z_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^3w_1}{dz^3}\right)_1 (z - z_1)^2 + \ldots + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z_1} \right]^2 dz. \tag{XII.43}$$

Dans cette expression, en vertu du théorème de Cauchy des résidus, par analogie avec la déduction de la formule (VI.13), de toute la somme des intégrales seule ne sera pas nulle l'intégrale qui contient dans la fonction sous le signe somme le facteur z^{-1}. Pour mettre en évidence ce terme de la somme, il suffit d'utiliser la formule binomiale connue de la décomposition

$$\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{z}+\frac{z_1}{z^2}+\frac{z_1^2}{z^3}+\ldots \qquad \text{(XII.44)}$$

En tenant compte de cette décomposition, il est facile de séparer dans la somme (XII.43) le terme contenant z^{-1} qui détermine la réaction cherchée

$$X-iY=\frac{i\rho}{2}\oint_L \frac{\Gamma}{\pi i}\left(\frac{dw_1}{dz}\right)_1\frac{dz}{z}. \qquad \text{(XII.45)}$$

Etant donné que suivant le théorème de Cauchy

$$\oint_L \frac{dz}{z}=2\pi i,$$

alors finalement

$$X-iY=i\rho\Gamma\left(\frac{dw_1}{dz}\right)_1. \qquad \text{(XII.46)}$$

Cette expression est l'énoncé mathématique du cas particulier du théorème de Joukovski. Suivant ce théorème, la réaction hydrodynamique qui apparaît en écoulement autour d'un tourbillon hétérogène de circulation donnée Γ est proportionnelle à la masse volumique du fluide, à la circulation du tourbillon et à la vitesse de l'écoulement hétérogène $(dw_1/dz)_1$ à l'endroit de la disposition du centre du tourbillon. La direction de la réaction peut être obtenue si l'on tourne le vecteur de la vitesse de l'écoulement hétérogène d'un angle de 90° contre la direction de la circulation.

Le théorème de Joukovski pour un profil isolé (XII.40) permet à l'étude du fonctionnement des ailes d'introduire la notion importante du tourbillon attaché à l'aile.

Supposons que l'écoulement autour d'un profil d'un flux de vitesse à l'infini v_∞ formant avec l'axe des x l'angle θ s'accompagne de la formation de la circulation Γ. En examinant maintenant l'écoulement dans le plan de la complexe variable z, plaçons au point z_1 de l'écoulement homogène de vitesse $\overline{v}_\infty$ un tourbillon de circulation Γ égale à la circulation autour du profil considéré (fig. XII.14). La fonction caractéristique prendra alors la forme

$$w(z)=v_\infty e^{-i\theta}z+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-z_1) \qquad \text{(XII.47)}$$

et la vitesse complexe de l'écoulement global

$$\frac{dw}{dz}=v_\infty e^{-i\theta}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z-z_1}, \qquad \text{(XII.48)}$$

ou en tenant compte de la décomposition (XII.44)

$$\frac{dw}{dz}=v_\infty e^{-i\theta}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z}+\frac{\Gamma z_1}{2\pi i}\frac{1}{z^2}+\frac{\Gamma z_1^2}{2\pi i}\frac{1}{z^3}+\ldots \qquad \text{(XII.49)}$$

Exigeons maintenant que les forces et les moments hydrodynamiques qui apparaissent en écoulement du tourbillon et en écoulement autour du profil d'aile examiné soient égaux. Etant donné

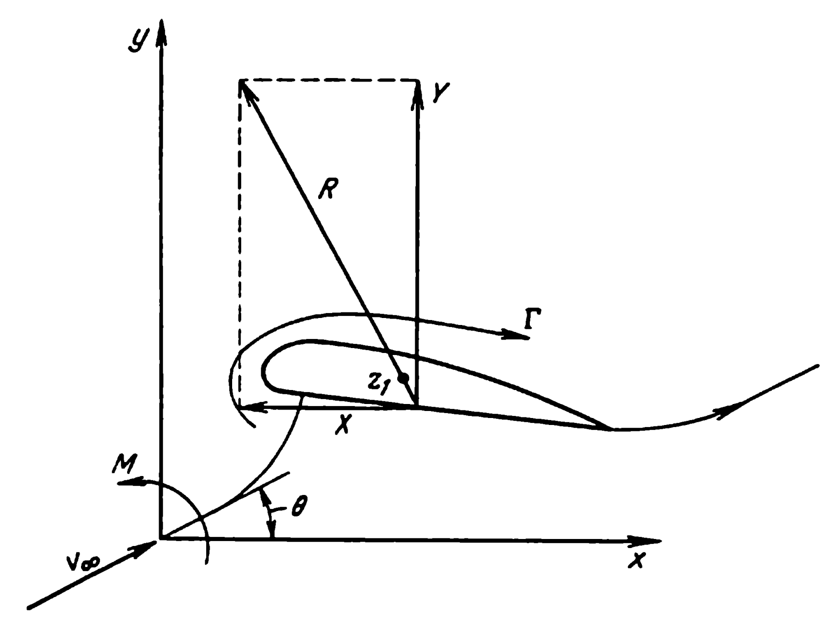


Fig. XII.14

que la réaction hydrodynamique et son moment par rapport à l'origine des coordonnées dans le plan z, aussi bien pour le profil que pour le tourbillon, se déterminent par les formules de Tchaplyguine, ces dernières peuvent être réduites à la forme (VI.15) et (VI.19)

$$X-iY=-2\pi\rho A_0A_1;$$
$$M=-2\pi\rho\,\mathrm{Reel}\,(iv_\infty e^{-i\theta}A_2),$$

où A_0, A_1, A_2 sont les coefficients de décomposition de la vitesse en série de Laurent (VI.11), alors l'égalité des forces et des moments de l'aile et du tourbillon peut être assurée si l'on exige que les coefficients A_0, A_1 et A_2 dans la décomposition de la vitesse en série soient égaux aux coefficients correspondants de la série (XII.49), à savoir:

$$A_0=v_\infty e^{-i\theta};$$
$$A_1=\frac{\Gamma}{2\pi i}; \qquad A_2=\frac{\Gamma z_1}{2\pi i}.$$

Les deux premières égalités sont remplies suivant les conditions du choix de l'écoulement homogène et de la circulation du tourbillon. Cette dernière égalité permet de déterminer la coordonnée complexe z_1 du point du plan en lequel il faut situer le centre du tourbillon suivant la forme du profil et de l'angle de son attaque, caractérisés par le coefficient A_2

$$z_1 = \frac{2\pi i A_2}{\Gamma} . \qquad \text{(XII.50)}$$

La ligne d'action de la réaction hydrodynamique de l'aile passe par ce point du plan z.

Le tourbillon avec circulation égale à la circulation de l'aile, contourné par un fluide de vitesse à l'infini égale à la vitesse d'écoulement autour du profil et située en un point déterminé par la formule (XII.50) s'appelle tourbillon attaché d'un profil de l'aile.

Par conséquent, du point de vue des forces et des moments qui apparaissent, l'action sur l'écoulement de l'aile est équivalente à l'action du tourbillon attaché. Le remplacement de l'aile par le tourbillon attaché donne un modèle physique très commode et dans de nombreux cas permet de simplifier la composition des schémas de calcul du mouvement des ailes. En effectuant ce remplacement, il faut se rappeler que les champs de vitesse et de pression au voisinage immédiat du profil et de son image physique — tourbillon attaché — sont différents; cette différence s'atténue au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'endroit de leur disposition.

§ 78. DÉTERMINATION DE LA CIRCULATION AUTOUR DU PROFIL. POSTULAT DE TCHAPLYGUINE-JOUKOVSKI

D'après le théorème de Joukovski, la portance hydrodynamique, apparaissant en écoulement autour d'un profil, est proportionnelle à la circulation de la vitesse Γ autour d'une aile. Evidemment c'est ce facteur qui tient compte de l'influence de l'angle d'incidence et de la forme du profil sur la valeur de la portance créée.

Pour la détermination de la valeur Γ, il est indispensable de faire appel à une condition supplémentaire, outre la condition d'imperméabilité, caractéristique pour l'écoulement en des points de la surface du profil. Les observations sur l'écoulement autour des ailes ont permis à Tchaplyguine et Joukovski de formuler cette condition supplémentaire pour les profils avec bord de fuite aigu sous la forme suivante: en écoulement autour d'un profil son bord de fuite est contourné de façon régulière et la vitesse d'écoulement autour de ce bord a une valeur finie.

Cette position porte le nom de postulat de Tchaplyguine-Joukovski et, de même que le théorème de Joukovski, a une importance fondamentale pour la théorie de l'aile. Les caractéristiques des

ailes, examinées au § 76, attestent que ce postulat est appliquable en écoulement autour des profils pour des angles d'incidence inférieurs à la valeur critique; lorsque les angles d'incidence dépassent les valeurs critiques, l'écoulement régulier autour de l'extrados du profil est perturbé et l'utilisation de ce postulat devient impossible. Si l'on considère l'écoulement autour d'un profil dont les bords d'attaque et de fuite sont aigus, le postulat n'est appliquable qu'au bord arrière, vu que l'écoulement autour du bord d'attaque n'est pas toujours régulier. Pour les corps qui n'ont pas d'arête vive, par exemple les cylindres circulaires ou elliptiques, on n'arrive pas à formuler la condition analogue au postulat de Tchaplyguine-Joukovski, et la détermination de leur force portante au moyen de la formule de Joukovski amène des difficultés liées à l'indétermination de la valeur calculée de la circulation.

Examinons de quelle manière le postulat formulé peut être utilisé pour le calcul de la valeur Γ autour du profil. Du chapitre V on sait que pour le calcul de l'écoulement potentiel autour des contours plans d'un fluide parfait, une des méthodes les plus efficaces est celle des représentations conformes.

Notons les particularités caractéristiques de l'emploi de cette méthode pour l'étude de l'écoulement dans le plan z autour des profils à bord de fuite aigu. Etant donné que dans le plan auxiliaire de la variable complexe ζ on considère pour contour initial le cercle de rayon r_0 et l'écoulement avec circulation autour de ce corps avec une vitesse $v_{\infty\zeta}$ dirigée sous l'angle α à l'axe réel, la fonction caractéristique de l'écoulement autour de ce corps peut s'écrire sous la forme (V.54)

$$w(\zeta)=v_{\infty\zeta}\left(\zeta e^{-i\alpha}+\frac{r_0^2}{\zeta}e^{i\alpha}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta.$$

La circulation de la vitesse Γ autour du contour initial suivant les propriétés de la représentation conforme est égale à la circulation autour du contour dans le plan de la variable z, c'est-à-dire du profil d'aile étudié.

Si la fonction de transformation représentant le passage du profil de l'aile sur le cercle est écrite sous la forme d'une série de Laurent (V.51)

$$z=m_{-1}\zeta+m_0+\frac{m_1}{\zeta}+\frac{m_2}{\zeta^2}+\dots$$

alors la vitesse complexe d'écoulement autour du contour de l'aile s'obtient de la formule

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw(\zeta)}{d\zeta}\,\frac{1}{\dfrac{dz}{d\zeta}}\,. \qquad \text{(XII.51)}$$

La dérivée $dw/d\zeta$ représente la vitesse complexe de l'écoulement en des points du plan ζ autour du cylindre circulaire. Elle a partout une valeur finie et aux points critiques situés sur la surface du cylindre devient nulle. La dérivée de la fonction de transformation est non nulle dans tout le plan ζ, à l'exception des points dont les coordonnées complexes satisfont à l'équation

$$\frac{dz}{d\zeta}=f'(\zeta)=0. \qquad \text{(XII.52)}$$

Ce sont des points particuliers où la conformité de la représentation est perturbée ; ils sont des points de ramification de la fonction

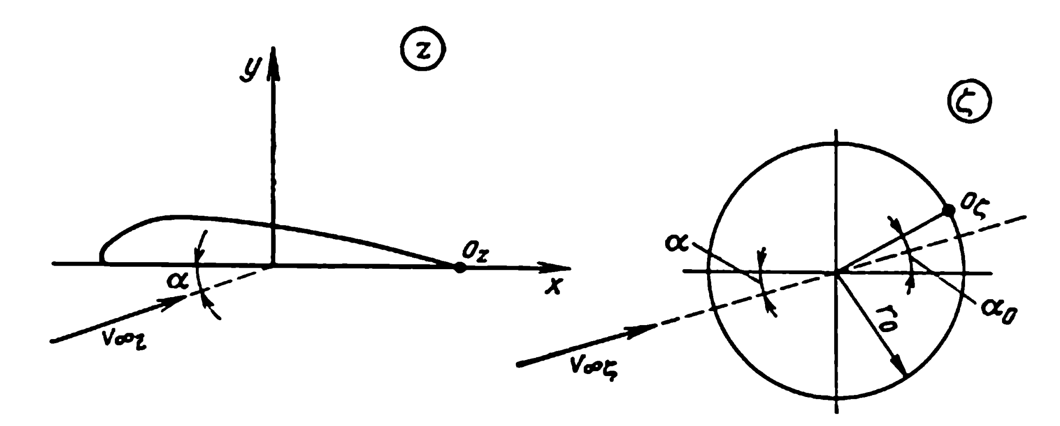


Fig. XII.15

de transformation. Pour obtenir à l'aide de la représentation conforme à partir du contour d'un cercle le contour d'un profil à bord de fuite aigu, au point correspondant O_ζ de coordonnée ζ_0 sur le cercle la dérivée de la fonction de transformation doit devenir nulle. Les autres points dont les coordonnées satisfont également à l'équation (XII.52) doivent se trouver à l'intérieur du cercle, car autrement, d'après la formule (XII.51), dans l'écoulement autour du profil peuvent apparaître des points où la vitesse tendra vers l'infini. Si (fig. XII.15) la coordonnée complexe du point sur le cercle O_ζ correspondant au bord de fuite aigu de profil O_z

$$\zeta_0=r_0e^{i\alpha_0}, \qquad \text{(XII.53)}$$

et la vitesse complexe en ce point est

$$\frac{dw(\zeta)}{d\zeta}=\frac{dw(\zeta_0)}{d\zeta},$$

alors suivant la formule (XII.51) la vitesse sur le bord de fuite du profil est $[dw(z)/dz]_{O_z}=0$, c'est-à-dire le postulat de Tchaplyguine-Joukovski n'est pas rempli. La seule possibilité d'obtenir une valeur finie de la vitesse complexe sur le bord de fuite du profil

consiste à exiger que la vitesse au point O_ζ soit nulle. Cela signifie que pour satisfaire au postulat de Tchaplyguine-Joukovski, le point O_ζ du cercle correspondant au bord de fuite du profil O_z doit être critique. On sait que les déplacements de la position des points critiques sur la surface d'un cylindre sont possibles si l'on choisit convenablement la circulation Γ autour du cylindre.

Par conséquent, pour obtenir la valeur de la circulation assurant l'exécution du postulat, il est indispensable de remplir la condition

$$\frac{dw(\zeta_0)}{d\zeta}=0. \tag{XII.54}$$

En calculant la dérivée de la fonction caractéristique de l'écoulement autour d'un cercle, en y posant $\zeta = \zeta_0$ et ensuite en l'égalant à zéro, nous obtenons l'équation suivante déterminant la valeur de la circulation:

$$v_{\infty\zeta}e^{-i\alpha}-\frac{v_{\infty\zeta}r_0^2e^{i\alpha}}{\zeta_0^2}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\zeta_0}=0,$$

d'où

$$\Gamma=-v_{\infty\zeta}e^{-i\alpha}2\pi i\zeta_0+\frac{v_{\infty\zeta}2\pi i r_0^2e^{i\alpha}}{\zeta_0}.$$

En remplaçant ζ_0 par sa valeur suivant (XII.53), et $v_{\infty\zeta}$, suivant (V.59), nous trouvons

$$\Gamma=2\pi i v_{\infty z}r_0m_{-1}(e^{-i(\alpha-\alpha_0)}-e^{-i(\alpha-\alpha_0)}). \tag{XII.55}$$

Si l'on tient compte que $\sin\alpha=\frac{1}{2i}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})$, alors

$$\Gamma=-4\pi r_0v_{\infty z}m_{-1}\sin(\alpha-\alpha_0). \tag{XII.56}$$

Cette valeur de la circulation restera invariable également autour du profil au cours de la réalisation de la représentation conforme, et l'image de l'écoulement autour du profil avec une vitesse $v_{\infty z}$ sous un angle α à l'axe des x satisfera au postulat de Tchaplyguine-Joukovski. La circulation autour du profil lorsqu'il est baigné par un fluide non visqueux déterminé par la formule (XII.56) témoigne de ce que le potentiel de cet écoulement et par conséquent la fonction $w(z)$ sont multivoques, tandis que le champ de la vitesse, c'est-à-dire la fonction dw/dz, est ici univoque.

Arrêtons-nous d'une façon plus détaillée sur la possibilité de l'apparition de la circulation autour de l'aile dans le cas d'un fluide non visqueux. En effet, si au moment initial le profil se trouvait au repos et ensuite a subitement commencé à se déplacer avec une vitesse constante dans un fluide non visqueux, alors suivant le théorème de Thomson (voir § 18) la circulation dans l'écoulement ne doit pas changer; sa valeur est égale à celle qui a été au moment

initial, c'est-à-dire nulle. Cependant dans un mouvement du profil sans circulation la vitesse sur son bord de fuite aigu tend, suivant (XII.51), vers l'infini et la condition d'écoulement régulier autour de lui n'est pas remplie. Si le processus a lieu dans un fluide même peu visqueux, alors dans le cas de la perturbation de l'écoulement régulier sur son bord de fuite apparaît un tourbillon qui en se détachant de celui-ci reste au point de départ de l'aile (fig. XII.16). Ce tourbillon initial, se détachant au moment du départ de l'aile,

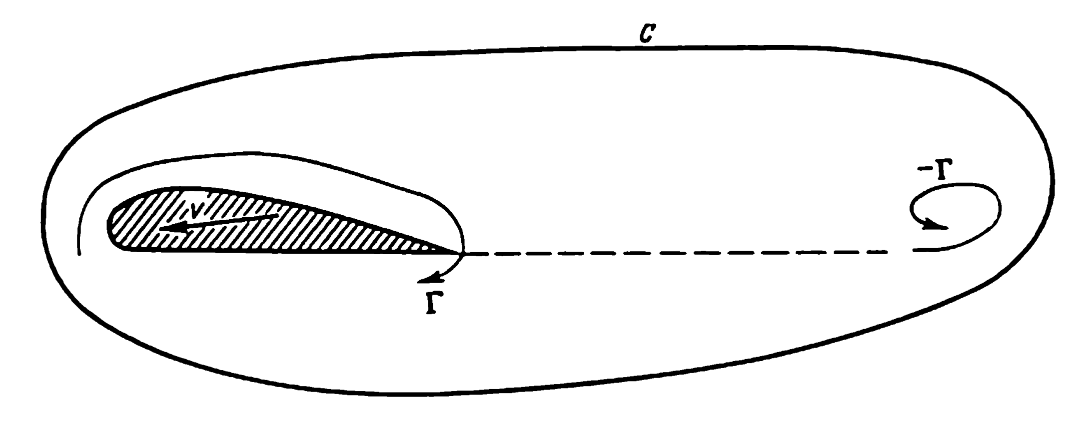


Fig. XII.16

s'appelle tourbillon d'établissement de courant. Il entraîne l'apparition autour de l'aile de la circulation Γ qui transforme l'écoulement autour du profil de façon que l'écoulement autour du bord de fuite devienne régulier.

En examinant maintenant le contour C qui englobe l'aile et le tourbillon d'établissement de courant, il est facile de déterminer que la circulation du tourbillon d'établissement de courant est égale à $-\Gamma$, car ce n'est que dans ce cas que la circulation totale dans le fluide est nulle et l'exigence du théorème de Thomson sur l'invariabilité de la circulation dans le temps dans toute la masse de fluide est observée. Les raisonnements énoncés permettent de compter qu'avec la variation de la vitesse du mouvement de l'aile ou de la variation de son angle d'incidence, de son bord de fuite doivent se détacher des tourbillons qui restent dans son sillage et compensent les variations de la circulation ayant lieu autour du profil. La présence de tels tourbillons, ainsi que du tourbillon d'établissement de courant avec des axes parallèles à l'envergure de l'aile a été déterminée expérimentalement dans le sillage derrière l'aile.

Il est indispensable de faire quelques éclaircissements relatifs à la nature physique de la portance du profil apparaissant lors de son mouvement dans un fluide visqueux. On sait que l'écoulement d'un fluide dans la couche limite qui apparaît le long de la surface du profil est turbulent. Suivant le théorème de Stokes, l'intensité des tourbillons dans la couche limite du profil est égale à la circula-

tion de la vitesse Γ le long du contour qui englobe l'aile et sa couche limite. Au premier abord il serait naturel de déterminer la circulation autour du profil comme la somme des intensités des tourbillons formés par suite de l'influence de la viscosité dans la couche limite de l'aile. Cependant, une telle méthode de détermination de Γ est actuellement difficile et de cette façon elle n'est pratiquement pas utilisée. En tenant compte de ce que la couche limite est relativement mince, on trouve possible d'examiner le mouvement du profil avec circulation Γ, mais dans un fluide non visqueux, déterminé par le postulat de Tchaplyguine-Joukovski. Les valeurs de la portance obtenues à cette admission sont proches des valeurs expérimentales.

La résistance du profil, déterminée sous l'hypothèse de l'écoulement autour de lui d'un fluide non visqueux, est nulle, c'est-à-dire que le paradoxe d'Euler-d'Alembert est vrai. Pour calculer la résistance réelle en mouvement du profil, il faut utiliser les méthodes élaborées dans la théorie de la couche limite. Dans ce cas la résistance du profil de l'aile d'allongement infini se compose seulement de la résistance de viscosité.

§ 79. FORMULES THÉORIQUES GÉNÉRALES DE LA FORCE SUSTENTATRICE HYDRODYNAMIQUE ET DU MOMENT DU PROFIL

Considérons maintenant comment se détermine la force sustentatrice du profil d'aile si l'on utilise le théorème de Joukovski. Pour cela, il suffit de tenir compte de ce que la formule de Joukovski pour un profil isolé détermine une réaction hydrodynamique conjointe $X - iY$. La vraie réaction $X + iY$ est dirigée perpendiculairement à la vitesse de l'écoulement à l'infini, c'est-à-dire dans le système de coordonnées aérodynamiques représente la force de sustentation R_y. Par conséquent,

$$|R_y| = |X + iY| = |X - iY|.$$

En utilisant la formule (VI.15), en y substituant l'expression de la circulation (XII.56) et en tenant ensuite compte de ce que pour le profil $v_{\infty z} = v_\infty$, nous obtenons une relation générale suivante:

$$X - iY = -i\rho v_\infty e^{-i\alpha}\Gamma = i\rho 4\pi r_0 v_\infty^2 m_{-1} e^{-i\alpha} \sin(\alpha - \alpha_0). \quad \text{(XII.57)}$$

D'où l'on voit que le module de la force sustentatrice du profil rapporté à l'unité de son envergure est

$$|R_y| = \rho 4\pi r_0 v_\infty^2 m_{-1} \sin(\alpha - \alpha_0). \quad \text{(XII.58)}$$

La force sustentatrice du profil en vertu de cette relation devient nulle, quand $\alpha = \alpha_0$; par conséquent, l'angle α_0 détermine la direction de l'axe de portance nulle. En écoulement autour du profil

le long de cette direction, la circulation autour de celui-ci n'apparaît pas, bien que l'écoulement autour du bord de fuite soit régulier avec une vitesse finie.

Si la corde du profil est b, alors le coefficient de portance est

$$C_y = \frac{|R_y|}{\frac{\rho v_\infty^2 b}{2}} = 8\pi m_{-1}\frac{r_0}{b}\sin(\alpha-\alpha_0) \tag{XII.59}$$

ou avec de faibles angles d'incidence quand $\sin(\alpha-\alpha_0) \approx \alpha-\alpha_0$

$$C_y = 8\pi m_{-1}\frac{r_0}{b}(\alpha-\alpha_0) \tag{XII.60}$$

et

$$\frac{dC_y}{d\alpha} = 8\pi m_{-1}\frac{r_0}{b}\,. \tag{XII.61}$$

La relation (XII.60) confirme la présence d'une dépendance linéaire entre le coefficient C_y et l'angle d'incidence, révélée dans la zone des angles d'incidence inférieurs à valeur critique au cours de l'analyse des résultats des expériences. Dans la région des angles d'incidence critiques et supercritiques, les formules obtenues ne sont pas appliquables.

Pour la détermination du moment hydrodynamique du profil par rapport à l'origine des coordonnées du système des axes xoy dans le plan de la variable complexe z, il faut utiliser la formule (VI.19)

$$M = -2\pi\rho\,\mathrm{Reel}\,(iv_\infty e^{-i\alpha}A_2),$$

où A_2 est le coefficient de z^{-2} de la décomposition de la vitesse complexe d'écoulement autour du profil en série de Laurent (VI.11) suivant les puissances $1/z$.

Pour déterminer ce coefficient, on doit examiner l'expression de la vitesse complexe d'écoulement autour du profil. D'après la formule (XII.51), en calculant la dérivée de $w(\zeta)$ et en tenant compte du remplacement $v_{\infty\zeta} = m_{-1}v_\infty$, nous obtenons

$$\frac{dw}{dz} = \left(v_\infty m_{-1}e^{-i\alpha} - \frac{v_\infty m_{-1}r_0^2}{\zeta^2}e^{i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{dz}\,. \tag{XII.62}$$

Pour ce qui suit, il est indispensable de remplacer dans cette relation ζ par z. Pour cela, il est avantageux de représenter la fonction de transformation sous la forme d'une série (V.51), en la transformant toutefois en dépendance $\zeta = f_1(z)$. A cet effet il faut effectuer la transformation de la série

$$\zeta = n_{-1}z + n_0 + \frac{n_1}{z} + \frac{n_2}{z^2} + \ldots \tag{XII.63}$$

De la théorie des séries on sait que les coefficients des séries initiale et transformée sont liés par des relations

$$n_{-1}=\frac{1}{m_{-1}}; \quad n_0=-\frac{m_0}{m_{-1}}; \quad n_1=-m_1 \ldots \qquad \text{(XII.64)}$$

Par conséquent, la dérivée de la fonction de transformation pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{d\zeta}{dz}=n_{-1}-\frac{n_1}{z^2}-\ldots=\frac{1}{m_{-1}}+\frac{m_1}{z^2}\ldots, \qquad \text{(XII.65)}$$

et les facteurs $\frac{1}{\zeta}$ et $\frac{1}{\zeta^2}$, en utilisant la relation (XII.62) et la formule de la décomposition binomiale $(a+b)^n=a^n \pm na^{n-1}b+ + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\ldots$,

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\zeta}&=\frac{1}{n_{-1}z}-\frac{n_0}{n_{-1}^2z^2}\ldots=\frac{1}{m_{-1}}+\frac{m_1}{z^2}\ldots;\\ \frac{1}{\zeta^2}&=\frac{1}{n_{-1}z^2}\ldots=\frac{m_{-1}^2}{z^2}+\ldots\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII.66)}$$

En substituant dans la formule (XII.62) les relations (XII.65), (XII.66) et en groupant les termes en z à exposants identiques, on peut l'écrire sous la forme d'une série

$$\frac{dw}{dz}=v_\infty e^{-i\alpha}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z}+\left(m_{-1}m_1v_\infty e^{-i\alpha}-m_{-1}^2r_0^2v_\infty e^{i\alpha}+\frac{\Gamma m_0}{2\pi i}\right)\frac{1}{z^2}+\ldots \qquad \text{(XII.67)}$$

En comparant cette expression avec la série (VI.11), nous trouvons que

$$A_2=m_{-1}m_1v_\infty e^{-i\alpha}-m_{-1}^2r_0^2v_\infty e^{i\alpha}+\frac{\Gamma m_0}{2\pi i}. \qquad \text{(XII.68)}$$

En substituant cette valeur de A_2 dans la formule (VI.19). il vient

$$M=\rho\,\text{Reel}\,(-im_{-1}m_1v_\infty^2e^{-2i\alpha}2\pi-\Gamma v_\infty m_0e^{-i\alpha}). \qquad \text{(XII.69)}$$

Dans ce cas on a tenu compte de ce que le coefficient m_{-1} est réel, positif, et par suite le terme qui correspond au second terme de la formule (XII.68) dans l'expression du moment, n'a pas de partie réelle. Pour le calcul du moment M_1 de la réaction hydrodynamique par rapport à un point quelconque de l'espace de coordonnée $z_1 = = x_1 + iy_1$, il faut faire appel à la formule bien connue de la mécanique

$$M_1=M-x_1Y+y_1X \qquad \text{(XII.70)}$$

dans laquelle les deux derniers termes peuvent être représentés sous la forme

$$Xy_1-Yx_1=\text{Reel}\,[-iz_1(X-iY)],$$

c'est-à-dire si l'on tient compte de la formule de Joukovski

$$M_1 = -\rho \,\text{Reel}\, i\,(m_{-1} m_1 v_\infty^2 e^{-2i\alpha} + \Gamma v_\infty e^{-i\alpha} m_0 + z_1 i v_\infty e^{-i\alpha}\Gamma). \quad (\text{XII.71})$$

En remplaçant ici Γ en vertu de la formule (XII.55), nous obtenons finalement

$$M_1 = -2\pi\rho v_\infty^2 m_{-1} \,\text{Reel}\, i\,\{[m_1 - r_0(m_0 - z_1)\,e^{i\alpha_0}]\,e^{-2i\alpha} + r_0(m_0 - z_1)\,e^{-2i\alpha_0}\}. \quad (\text{XII.72})$$

Cette formule permet de déterminer le moment du profil par rapport au bord d'attaque, si par z_1 on entend la coordonnée complexe z_{1_0} de l'origine des coordonnées liées au profil. Le coefficient du moment de profil par rapport au bord d'attaque est dans ce cas

$$m_z = \frac{M_1}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} b} = -\frac{4\pi m_1}{b^2} \,\text{Reel}\, i\,\{[m_1 - r_0(m_0 - z_{1_0})e^{i\alpha_0}]\,e^{-2i\alpha} + r_0(m_0 - z_{1_0})\,e^{-2i\alpha_0}\}. \quad (\text{XII.73})$$

Elucidons les conditions où la valeur du moment ne dépend pas de l'angle α. A cet effet, il faut que dans l'expression (XII.72) le terme contenant le facteur $e^{-2i\alpha}$ soit nul

$$m_1 - r_0(m_0 - z_1)\,e^{i\alpha_0} = 0,$$

d'où il suit que

$$z_1 = m_0 - \frac{m_1}{r_0}\,e^{-i\alpha_0}. \quad (\text{XII.74})$$

On sait que le point par rapport auquel le moment ne dépend pas de l'angle d'incidence du profil est son foyer; par conséquent, la formule (XII.74) détermine la coordonnée complexe du foyer du profil.

En remplaçant z_1 dans la formule (XII.72) par sa valeur tirée de (XII.74), nous obtiendrons l'expression du moment $M_1 = M_f$ par rapport au foyer du profil

$$M_f = -2\pi\rho m_{-1} v_\infty^2 \,\text{Reel}\,(i m_1 e^{-2i\alpha_0}). \quad (\text{XII.75})$$

De (XII.75) on voit que la valeur M_f ne dépend pas de l'angle d'incidence. Ce résultat a été obtenu par Tchaplyguine et énoncé sous la forme du théorème suivant: les forces de pression du fluide agissant sur un profil peuvent être ramenées à la force portante appliquée au foyer et au couple dont la valeur du moment ne dépend pas de l'angle d incidence.

Trouvons l'équation de la ligne d'action de la force de sustentation. Pour cela introduisons le système de coordonnées x^*, y^* avec l'origine o_1 au foyer du profil et l'axe des x^* dirigé le long de l'axe de portance nulle. Dans ce cas $z_1 = 0$ et $\alpha_0 = 0$, c'est-à-dire d'après (XII.74) $m_1 = m_0 r_0$. Utilisons la formule du moment de la force

connue de la mécanique

$$M_f = x^* Y - y^* X\,;$$

en la portant dans le premier membre de l'équation (XII.75), en exprimant les composantes de la réaction X et Y suivant (XII.57) et en tenant compte également des valeurs indiquées ci-dessus

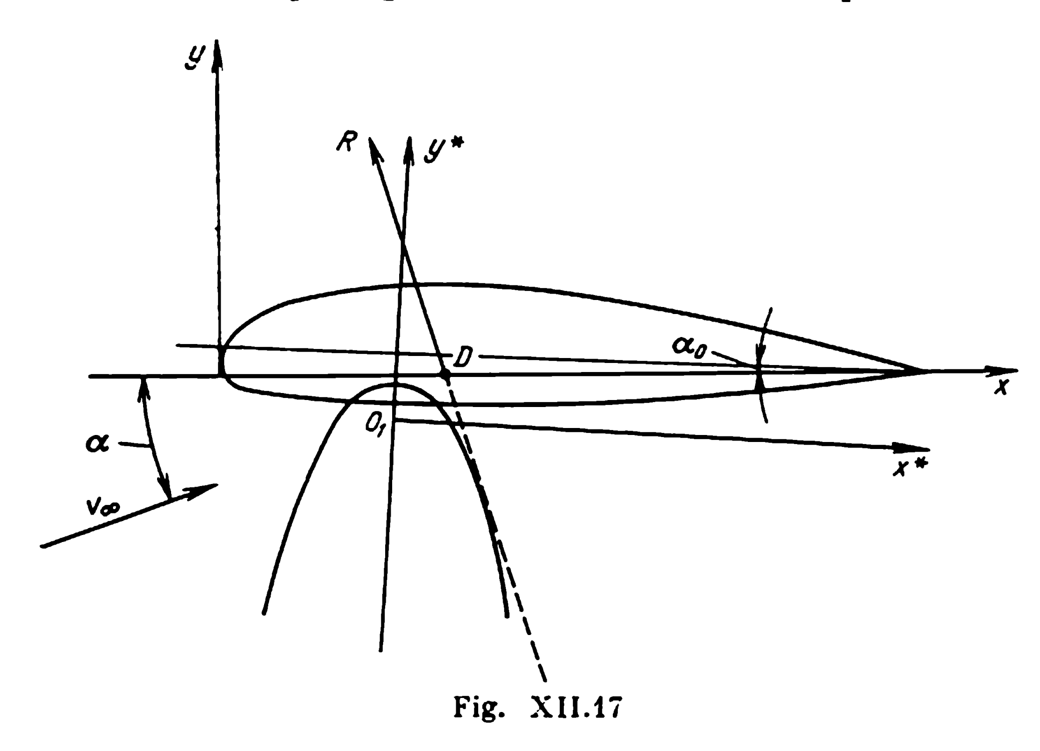


Fig. XII.17

α_0 et m_1, nous obtenons l'équation suivante de la droite représentant la ligne d'action de la force portante

$$x^* \sin\alpha\cos\alpha + y^* \sin^2\alpha = -\,\mathrm{Reel}\left(\frac{im_0}{2}\right). \qquad \text{(XII.76)}$$

Maintenant on peut établir l'équation de l'enveloppe des lignes d'action de la force portante pour divers angles d'écoulement autour du profil. Pour cela on doit dériver la relation (XII.76) par rapport au paramètre α

$$x^* (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + y^* 2\sin\alpha\cos\alpha = 0 \qquad \text{(XII.77)}$$

et éliminer α des relations (XII.76) et (XII.77). Finalement on obtient

$$x^{*2} = 2y^*\,\mathrm{Reel}\,(im_0) + [\mathrm{Reel}\,(im_0)]^2. \qquad \text{(XII.78)}$$

Cette équation décrit une parabole dont les branches sont symétriques à l'axe des y^* (fig. XII.17) ; son foyer est le foyer du profil.

La force portante du profil est dirigée suivant la tangente à cette parabole, appelée par Tchaplyguine parabole des métacentres de l'aile. De la fig. XII.17 il apparaît qu'en présence de la parabole

des métacentres le point D d'intersection de la ligne d'action de la force portante avec la corde du profil pour différents angles d'incidence occupe des positions différentes, c'est-à-dire le centre de poussée se déplace avec la variation de l'angle d'incidence du profil. Pour que la position du centre de poussée reste invariable avec la variation de l'angle d'incidence, la parabole des métacentres doit dégénérer en un point coïncidant avec le centre de poussée et à la fois avec le foyer du profil.

§ 80. ÉCOULEMENT AUTOUR DES PROFILS THÉORIQUES

Passons maintenant à l'étude de l'écoulement autour des profils concrets présentant un intérêt pratique et de leurs caractéristiques hydrodynamiques. Parmi ces profils, on peut distinguer un grand nombre de profils dits théoriques, c'est-à-dire tels pour lesquels la fonction qui réalise la représentation conforme de leur extérieur sur l'extérieur d'un cercle peut être écrite sous la forme fermée. On rapporte à ces profils de nombreuses modifications de profils étudiés par Joukovski, Tchaplyguine, Mizes et autres auteurs.

Une nombreuse famille de profils théoriques peut être étudiée au moyen de la fonction de transformation de Joukovski

$$z=\zeta+\frac{l_1^2}{\zeta}, \qquad \text{(XII.79)}$$

où l_1 est un certain nombre positif réel.

Les points singuliers de cette fonction de transformation s'obtiennent en faisant nulle sa dérivée

$$\frac{dz}{d\zeta}=1-\frac{l_1^2}{\zeta^2},$$

c'est-à-dire $\zeta = \pm l_1$. Ils sont disposés sur l'axe réel du plan ζ symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées. L'équation (XII.79) atteste que lim $dz/d\zeta$ avec $\zeta \to \infty$ est égale à l'unité. Cela signifie que l'utilisation de la fonction de Joukovski assure la correspondance de la valeur et de la direction de la vitesse de l'écoulement à l'infini dans les plans ζ et z $(m_{-1} = 1)$.

1. Ecoulement autour d'une plaque plane

Examinons le cas d'application de la fonction de Joukovski à l'étude de l'écoulement autour d'une plaque plane située dans le plan z sur un axe réel, d'un fluide dont la vitesse v_∞ à l'infini fait l'angle α avec la plaque.

Pour montrer que la résolution de ce problème au moyen de la fonction (V.59) est possible, examinons un cercle de rayon l_1 dans le plan ζ de centre à l'origine des coordonnées (fig. XII.18). Le

lieu géométrique des points correspondant à ce cercle est décrit par l'équation

$$\zeta = l_1 e^{i\theta}. \qquad \text{(XII.80)}$$

En la substituant dans la fonction de transformation, on trouve que

$$z = x + iy = l_1 e^{i\theta} + l_1 e^{-i\theta} = 2l_1 \cos\alpha.$$

c'est-à-dire aux points du cercle correspondront dans le plan z les points avec les coordonnées $x = 2l_1 \cos\theta$; $y = 0$.

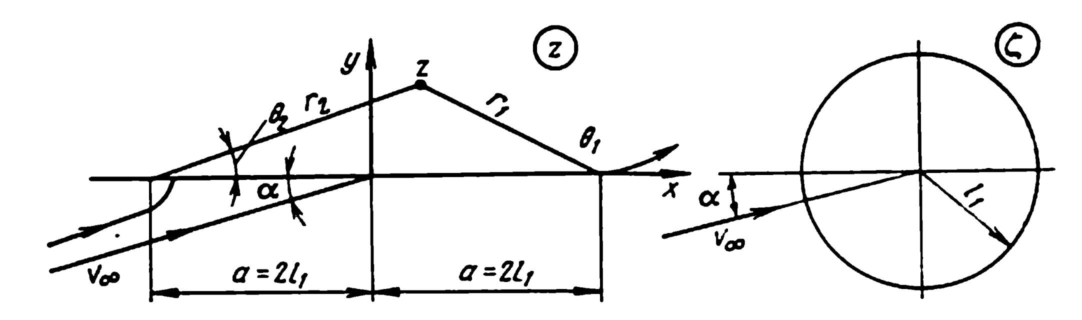


Fig. XII.18

Ces points sont disposés sur le secteur du tronçon deux fois traversé de l'axe réel, de longueur $4l_1$, c'est-à-dire qui correspond à une plaque plane infiniment mince avec deux arêtes vives. L'extérieur du cercle passe en extérieur de ce segment. L'intérieur du cercle suivant la ligne $-2l_1, +2l_1$ passe sur la seconde feuille riemannienne du plan z, qui dans le cas donné ne présente pas d'intérêt physique. En admettant ensuite $2l_1 = a$, on peut déterminer les valeurs des coefficients de la série (V.51) pour une plaque avec la corde $b = 2a$

$$m_{-1} = 1, \quad m_0 = 0, \quad m_1 = \frac{a^2}{4}. \qquad \text{(XII.81)}$$

D'après le schéma général, utilisé pour la méthode des représentations conformes, on peut obtenir la fonction caractéristique $w(z)$ de l'écoulement autour de la plaque, si l'on élimine la variable ζ de la fonction de l'écoulement autour du cylindre circulaire de rayon r_0 qui, en tenant compte de la relation (XII.81) et en admettant $r_0 = a/2$, peut être représentée sous la forme

$$w(\zeta) = v_\infty \left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{4\zeta} e^{i\alpha}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta. \qquad \text{(XII.82)}$$

Déterminons à l'aide de la fonction (XII.79) l'expression $\zeta = f(z)$

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z \pm \sqrt{z^2 - a^2}\right). \qquad \text{(XII.83)}$$

Par la suite on doit adopter dans celle-ci le signe plus, ce qui assure la correspondance des points infiniment éloignés des plans z et ζ. En substituant cette expression de ζ dans la formule (XII.82) et ayant effectué les transformations, nous obtenons

$$w(z)=v_\infty\left(z\cos\alpha-i\sqrt{z^2-a^2}\sin\alpha\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-a^2}\right). \tag{XII.84}$$

Le premier terme de cette formule correspond à la fonction caractéristique de l'écoulement sans circulation autour de la plaque. En tenant compte de (XII.81) et de ce que le point du cylindre correspondant au bord arrière de la plaque a dans le plan ζ un angle polaire $\theta=\alpha_0=0$, on peut, en partant de la formule (XII.56), obtenir la valeur de la circulation

$$\Gamma=-2\pi a v_\infty\sin\alpha. \tag{XII.85}$$

La vitesse complexe d'écoulement autour de la plaque est

$$\frac{dw}{dz}=v_\infty\left(\cos\alpha-i\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}\sin\alpha\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\cdot \tag{XII.86}$$

ou en tenant compte de (XII.85)

$$\frac{dw}{dz}=v_\infty\cos\alpha-iv_\infty\sin\alpha\sqrt{\frac{z-a}{z+a}}. \tag{XII.87}$$

Cette expression montre que sur le bord arrière de la plaque avec $z=a$ la vitesse a une valeur finie

$$\frac{dw}{dz}=v_\infty\cos\alpha. \tag{XII.88}$$

L'écoulement autour du bord avant de la plaque $z=-a$ n'est pas régulier, car la vitesse sur celui-ci, d'après (XII.87), tend vers l'infini. Le point critique situé sur la surface de la plaque et sa position sont déterminés selon la condition $\frac{dw}{dz}=0$

$$z=a(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha).$$

Considérons le champ des vitesses induites en écoulement autour de la plaque

$$\frac{dw_1}{dz}=\frac{dw}{dz}-v_\infty e^{-i\alpha}.$$

En tenant compte de (XII.87), nous obtenons

$$\frac{dw_1}{dz}=iv_\infty\sin\alpha\left(1-\sqrt{\frac{z-a}{z+a}}\right)=iv_\infty\sin\alpha\sqrt{\frac{z-a}{z+a}}\left(\sqrt{\frac{z+a}{z-a}}-1\right). \tag{XII.89}$$

Isolons les projections de la vitesse induite sur l'axe des coordonnées. Pour cela introduisons les coordonnées polaires locales (fig. XII.18)

$$z-a=r_1e^{i\theta_1}; \quad z+a=r_2e^{i\theta_2};$$

on peut alors écrire

$$\frac{dw_1}{dz}=v_{x_1}-iv_{y_1}=iv_\infty \sin\alpha-iv_\infty \sin\alpha\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\,e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}.$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} v_{x_1}&=v_\infty \sin\alpha\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2};\\ v_{y_1}&=v_\infty \sin\alpha\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}-1\right).\end{aligned}\right\} \qquad (XII.90)$$

A l'aide de ces formules, il est commode de calculer les vitesses induites sur les côtés supérieur et inférieur de la plaque. Lorsque le point en lequel on calcule la vitesse se rapproche du côté supérieur de la plaque $\theta_1\to\pi$, $\theta_2\to 0$; par conséquent,

$$\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\to 1; \quad \cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\to 0.$$

Lorsque ce point se rapproche du côté inférieur de la plaque $\theta_1\to-\pi$, $\theta_2\to 0$, c'est-à-dire

$$\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\to -1; \quad \cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\to 0.$$

Dans les deux cas $r_1\to a-x$; $r_2\to a+x$. Par conséquent, les composantes tangentielles de la vitesse induite au-dessus et au-dessous de la plaque sont égales en grandeur et de signes opposés

$$\left.\begin{aligned} v_{x_{1+}}&=v_\infty \sin\alpha\sqrt{\frac{a-x}{a+x}};\\ v_{x_{1-}}&=-v_\infty \sin\alpha\sqrt{\frac{a-x}{a+x}},\end{aligned}\right\} \qquad (XII.91)$$

tandis que les composantes normales sont identiques

$$v_{y_{1+}}=v_{y_{1-}}=-v_\infty \sin\alpha. \qquad (XII.92)$$

Cela veut dire que le secteur de l'axe réel $-a<x<a$, où est disposée la plaque, est équivalent à la couche tourbillonnaire, à la traversée de laquelle la composante trangentielle subit une discontinuité. L'intensité de la couche tourbillonnaire $\gamma(x)$ est égale à la différence des vitesses tangentielles

$$\gamma_x=v_{x_{1-}}-v_{x_{1+}}=-2v_\infty \sin\alpha\sqrt{\frac{a-x}{a+x}},$$

et de plus

$$\int_{-a}^{a} \gamma(x)\,dx = \Gamma.$$

L'intensité de la couche tourbillonnaire équivalente est nulle sur le bord arrière de la plaque et croît au fur et à mesure qu'on se rapproche de son bord avant.

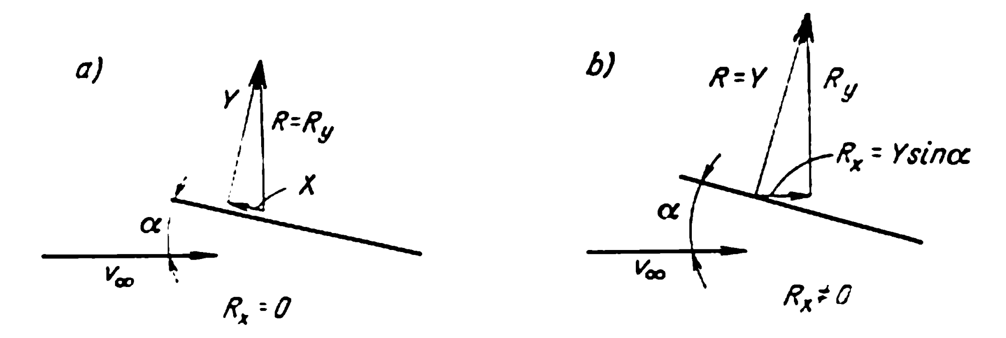


Fig. XII.19

En employant la formule (XII.57), nous trouvons la réaction hydrodynamique conjuguée qui s'exerce sur la plaque

$$X - iY = -i\rho 2\pi a v_\infty^2 e^{-i\alpha} \sin\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} X &= -2\pi\rho a v_\infty^2 \sin^2\alpha\,; \\ Y &= 2\pi\rho a v_\infty^2 \sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII.93)}$$

Les formules (XII.93) montrent qu'en sus de la composante de la réaction Y normale à la surface de la plaque, due à la différence des pressions sur les côtés supérieur et inférieur de celle-ci, il apparaît une composante horizontale X dirigée dans le plan de la plaque (fig. XII.19,*a*). Cette force s'appelle force de succion. Elle prend naissance par suite de la dépression infinie au voisinage du bord due à l'augmentation brusque de la vitesse dans cette région. L'apparition de la force de succion est signalée au cours des calculs théoriques de l'écoulement autour des profils à arête avant vive et des surfaces portantes minces. L'apparition réelle (réalisation) de cette force dans l'écoulement autour du profil n'est possible que dans le cas où sur celui-ci il y a un domaine suffisant d'application des dépressions sur le bord d'attaque. On l'obtient par un profilage correspondant du bord avant. Si le bord avant n'est pas profilé, alors au cours de l'écoulement autour de l'aile la force de succion peut ne pas apparaître ou si elle apparaît, elle n'atteint pas sa valeur totale calculée théoriquement.

En cas d'un écoulement réel autour d'une plaque avec un bord avant extrêmement mince, quand la force de succion ne se manifeste pas, il n'existe que la composante Y perpendiculaire à la surface de la plaque (fig. XII.19,*b*). Cette force constitue la projection sur la direction de la vitesse de l'écoulement

$$R_x = Y \sin\alpha = 2\pi\rho\, a v_\infty^2 \sin^2\alpha \cos\alpha \qquad \text{(XII.94)}$$

qui représente une force de résistance supplémentaire (traînée) qui augmente la résistance totale de l'aile. Dans ce cas, la valeur de la portance diminue également quelque peu

$$R_y = Y \cos\alpha = 2\pi\rho a v_\infty^2 \sin\alpha \cos^2\alpha.$$

Joukovski a, le premier, noté l'importance d'assurer les conditions contribuant à la réalisation de la force de succion de l'aile.

Le coefficient de portance de la plaque est, suivant la formule (XII.60),

$$C_y = 2\pi \sin\alpha, \qquad \text{(XII.95)}$$

et sa dérivée suivant l'angle d'incidence, si l'on pose $\sin\alpha = \alpha$,

$$\frac{dC_y}{d\alpha} = 2\pi. \qquad \text{(XII.96)}$$

Le coefficient de moment s'obtient de la formule (XII.73), en tenant compte de ce que $z_{10} = -a$,

$$m_z = -\frac{4\pi}{4a^2} \text{Reel}\, i\left[\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) e^{2i\alpha} + \frac{a^2}{4}\right] = -\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha.$$

Maintenant il est facile de trouver le coefficient du centre de poussée de la plaque

$$C_D = \frac{m_z}{C_n} = \frac{-\frac{\pi}{4} 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\pi\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{1}{4}. \qquad \text{(XII.97)}$$

Comme on le voit, le centre de poussée de la plaque est disposé à une distance de 1/4 de la corde de son bord d'attaque et sa position ne dépend pas de l'angle d'incidence.

La coordonnée du foyer se détermine par la formule (XII.74) suivant laquelle

$$z_1 = -\frac{a}{4}, \qquad \text{(XII.98)}$$

c'est-à-dire le foyer de la plaque coïncide avec son centre de poussée. Par conséquent, le moment de la force de sustentation par rapport au foyer est nul et la parabole des métacentres dégénère en un point. D'après les formules (XII.50), (XII.68) et la relation de la circulation Γ nous trouvons la coordonnée du tourbillon attaché $z = -\frac{a}{4}$. Sa position se confond avec le centre de poussée de la plaque.

2. Ecoulement autour d'un arc de cercle

Pour résoudre au moyen de la fonction de Joukovski le problème de l'écoulement autour d'un arc de cercle disposé dans le plan z (fig. XII.20), il faut tenir compte de ce que le profil en arc possède deux bords aigus. Cela veut dire que le cercle dans le plan auxiliaire ζ doit être tracé de manière qu'il passe par deux points de ramification $\pm l_1$. Plaçons le centre du cercle sur un axe imaginaire à

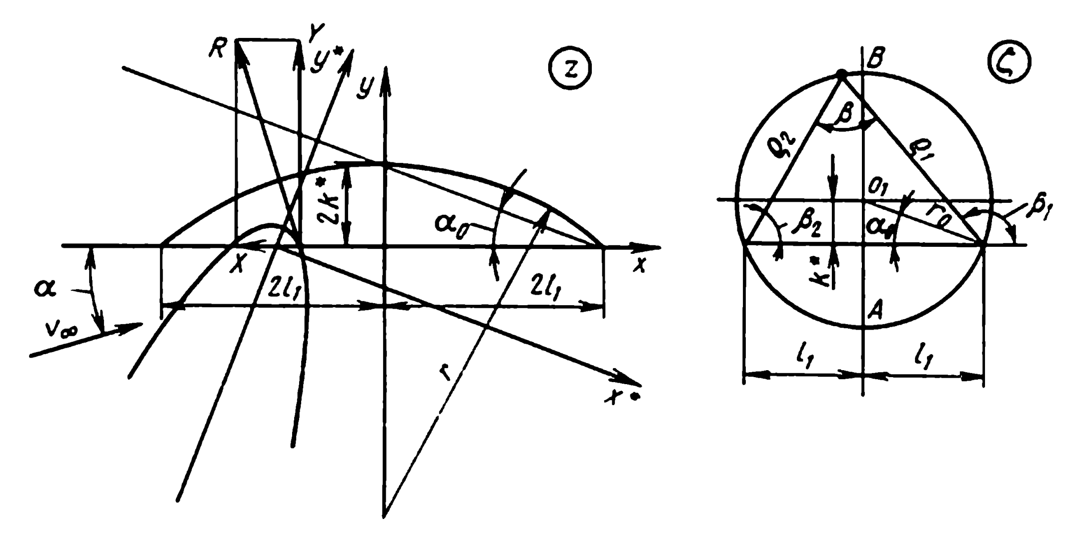


Fig. XII.20

une distance k^* de l'origine des coordonnées, alors son rayon r_0 sera

$$r_0=\sqrt{l_1^2+k^{*2}}. \qquad \text{(XII.99)}$$

Par substitution directe des coordonnées des points du cercle disposé sur l'axe imaginaire A et B

$$\zeta_A=i\left(k^*+\sqrt{l_1^2+k^{*2}}\right);$$

$$\zeta_B=i\left(k^*-\sqrt{l_1^2+k^{*2}}\right)$$

dans la fonction de transformation (XII.79), on se convainc aisément qu'elles passent sur le plan z en un point commun de coordonnée $z = 2ik^*$. Par conséquent, l'arc dans le plan z, correspondant aux parties supérieure et inférieure du cercle dans le plan ζ, passe dans le plan z par les points $z = \pm 2l_1$ et $z = 2ik^*$. Démontrons que cet arc est l'arc d'un cercle de corde $b = 2l_1$. A cet effet utilisons une nouvelle forme d'écriture de la fonction de Joukovski

$$\frac{z-2l_1}{z+2l_1}=\left(\frac{\zeta-l_1}{\zeta+l_1}\right)^2. \qquad \text{(XII.100)}$$

En résolvant cette équation par rapport à la variable z, on peut montrer son identité totale avec l'expression (XII.79) utilisée précédemment.

En introduisant les rayons et les angles polaires des points du cercle et de l'arc étudié dans le plan z, on peut écrire

$$z-2l_1=r_1e^{i\alpha_1}; \qquad \zeta-l_1=\rho_1e^{i\beta_1};$$
$$z+2l_1=r_1e^{i\alpha_2}; \qquad \zeta-l_1=\rho_2e^{i\beta_2},$$

c'est-à-dire l'expression (XII.100) prend la forme

$$\frac{r_1}{r_2}e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}=\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2e^{2i(\beta_1-\beta_2)}.$$

En égalisant les arguments de ces expressions complexes, nous trouvons

$$\alpha_1-\alpha_2=2(\beta_1-\beta_2).$$

Mais pour les points disposés sur le cercle, l'angle β du sommet du triangle qui s'appuie sur la corde $\beta=\beta_1-\beta_2$ est une valeur constante. Par conséquent, la différence $\alpha_1-\alpha_2$ est aussi une valeur constante pour un arc dans le plan z, c'est-à-dire que cet arc représente également une partie du cercle. On peut montrer que le rayon de cet arc est

$$r=\frac{r_0^2}{k^*}.$$

Le calcul des caractéristiques hydrodynamiques du profil en arc impose la détermination des coefficients de la série de Laurent pour la fonction de transformation. Il est indispensable de tenir compte ici qu'à la déduction des formules de calcul, on a supposé que le centre du cercle coïncide avec l'origine des coordonnées. La liaison entre les nombres complexes ζ_1 pour lesquels l'origine des coordonnées est le centre de la circonférence O_1 et les nombres ζ est telle que

$$\zeta_1=\zeta-ik^*.$$

En en déduisant la valeur $\zeta=\zeta_1+ik^*$ et en la substituant dans la fonction de Joukovski, nous trouvons

$$z=\zeta+ik^*+\frac{l_1^2}{\zeta_1+ik^*}. \qquad \text{(XII.101)}$$

En utilisant la formule de décomposition en série binomiale pour le dernier terme de cette équation, on a

$$z=\zeta_1+ik^*+\frac{l_1^2}{\zeta_1}-\frac{l_1^2ik^*}{\zeta_1^2}\ldots,$$

c'est-à-dire

$$m_{-1}=1, \quad m_0=ik^*, \quad m_1=l_1^2. \qquad \text{(XII.102)}$$

Nous constatons en même temps que dans le système de coordonnées ζ_1 la position sur la circonférence du point correspondant

au bord arrière de l'arc est caractérisée par l'angle $-\alpha_0$, et de plus

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{k^*}{l_1} . \qquad \text{(XII.103)}$$

En tenant compte des relations (XII.99), (XII.102), nous obtenons l'expression suivante de la réaction conjuguée:

$$X - iY = -i4\pi\rho \sqrt{l_1^2 + k^{*2}} v_\infty^2 e^{-i\alpha} \sin(\alpha + \alpha_0), \qquad \text{(XII.104)}$$

c'est-à-dire

$$X = -4\pi\rho \sqrt{l_1^2 + k^{*2}} v_\infty^2 \sin\alpha \sin(\alpha + \alpha_0); \qquad \text{(XII.105)}$$

$$Y = 4\pi\rho \sqrt{l_1^2 + k^{*2}} v_\infty^2 \cos\alpha \sin(\alpha + \alpha_0). \qquad \text{(XII.106)}$$

La force X représente la force de succion du profil en arc.

Ces formules montrent qu'avec $\alpha = 0$, c'est-à-dire en écoulement le long de la corde, la force de succion du profil en arc est nulle. Dans ce cas a lieu l'écoulement régulier non seulement autour du bord arrière mais aussi autour du bord avant du profil. L'écoulement pour lequel dans la région du bord avant aigu il n'apparaît pas de vitesse théoriquement infinie est dit conventionnellement sans chocs.

Le coefficient de portance de l'arc suivant la formule (XII.60) est

$$C_y = 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{k^*}{l_1}\right)^2} \sin(\alpha + \alpha_0)$$

ou avec de faibles angles d'incidence

$$C_y = 2\pi \sqrt{1 + \alpha_0^2} (\alpha + \alpha_0). \qquad \text{(XII.107)}$$

La comparaison de cette dernière égalité avec la formule (XII.95) montre qu'avec le même angle d'incidence α, le profil en arc crée une portance plus grande par rapport à la plaque plane. Par conséquent, en donnant au profil la courbure de la ligne moyenne, on en augmente sa portance.

L'axe de portance nulle correspond à la direction de l'écoulement autour de l'arc sous un angle d'incidence $\alpha = -\alpha_0$.

Le foyer du profil en arc est disposé en un point de coordonnée

$$z_1 = ik^* - \frac{l_1^2}{\sqrt{l_1^2 + k^{*2}}} e^{i\alpha_0} \approx ik^* - l_1 e^{i\alpha_0}. \qquad \text{(XII.108)}$$

Si l'on tient compte de ce que $l_1 \sin\alpha_0 \approx k^*$, alors $z_1 \approx l_1$.

L'équation de la parabole des métacentres dans le cas donné prend la forme

$$x^{*2} = -2y^* k^* + k^{*2}.$$

Les lignes d'action de la force portante, tangentes à cette parabole, pour différents angles d'incidence traversent la corde de l'arc en différents points. Cela signifie que le centre de poussée du profil considéré change sa position suivant l'angle d'incidence.

3. Profils de Joukovski

La fonction de transformation de Joukovski (XII.79) permet d'effectuer l'étude de l'écoulement autour d'une famille de profils ayant une épaisseur finie et un bord d'attaque arrondi. Pour cela il est indispensable de disposer le cercle de rayon r_0 dans le plan

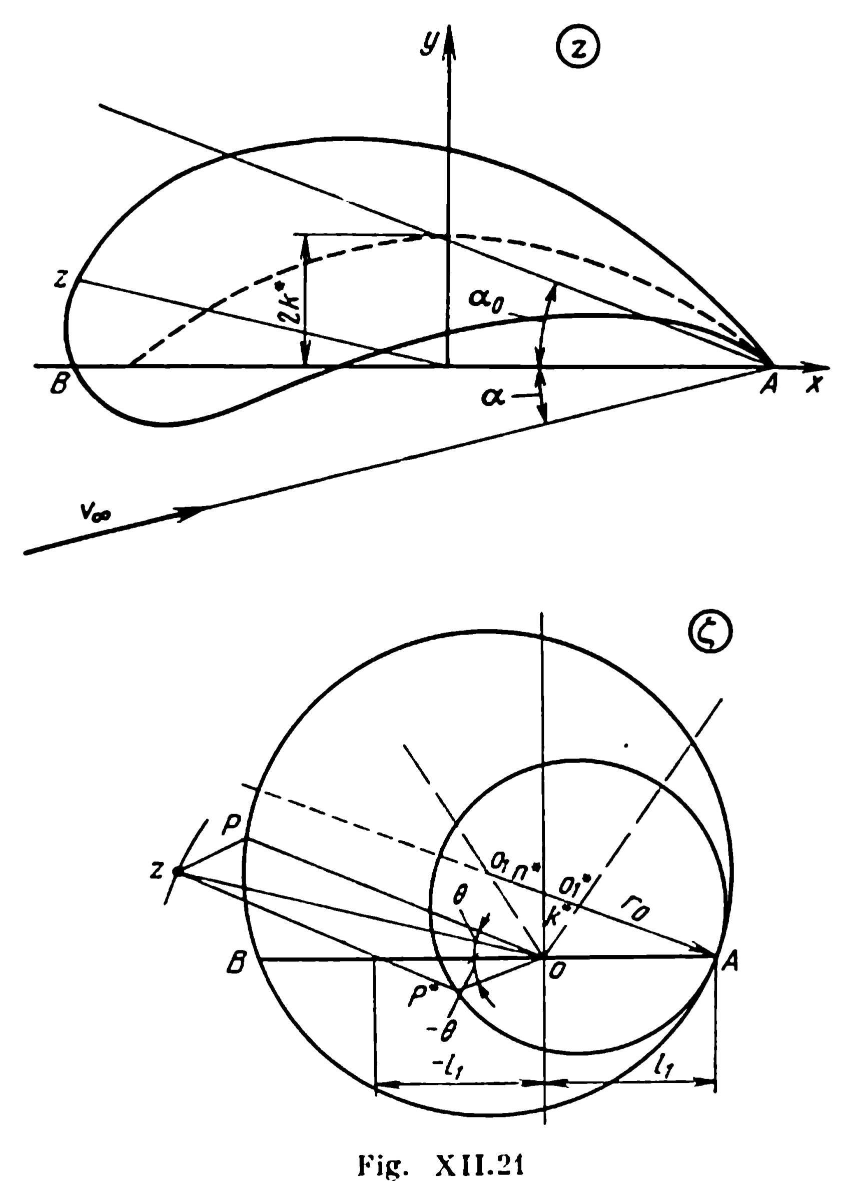


Fig. XII.21

auxiliaire ζ de manière qu'il passe par le point singulier de la représentation conforme, correspondant au bord de fuite aigu du profil, et que le second point singulier se trouve à l'intérieur du cercle.

Comme on le voit de la fig. XII.21, on peut l'obtenir si l'on choisit le point o_1 comme centre du cercle et si l'on pose le rayon r_0 égal à

$$r_0 = \sqrt{l_1^2 + k^{*2}} + n^*. \tag{XII.109}$$

Dans ce cas, la liaison entre les coordonnées complexes ζ et ζ_1, qui ont pour origine le point o_1, se détermine par la relation

$$\zeta_1 = \zeta - ik^* - n^* e^{i(\pi - \alpha_0)},$$

c'est-à-dire

$$\zeta = \zeta_1 + ik^* - n^* e^{-i\alpha_0}.$$

En substituant cette expression dans la fonction de Joukovski, on trouve

$$z = \zeta_1 + ik^* - n^* e^{-i\alpha_0} + \frac{l_1^2}{\zeta_1 + ik^* - n^* e^{-i\alpha_0}}. \qquad \text{(XII.110)}$$

En décomposant ce dernier terme suivant la formule du binôme, nous obtenons

$$z = \zeta_1 + ik^* - n^* e^{-i\alpha_0} + \frac{l_1^2}{\zeta_1} - \frac{l_1^2 (ik^* - n^* e^{-i\alpha_0})}{\zeta_1^2} \ldots \qquad \text{(XII.111)}$$

Par conséquent, les coefficients de la fonction de transformation dans le cas donné sont de la forme

$$m_{-1} = 1, \quad m_0 = ik^* - n^* e^{-i\alpha_0}, \quad m_1 = r_0^2. \qquad \text{(XII.112)}$$

Les valeurs des grandeurs m_{-1}, m_1 et α_0 du profil de Joukovski sont les mêmes que celles du profil en arc, qui représente la ligne moyenne du profil de Joukovski. Avec $k^* = 0$, la transformation (XII.110) permet d'obtenir un profil symétrique, le gouvernail de Joukovski.

Les particularités géométriques essentielles des profils considérés consistent en ce que leur section d'épaisseur maximale se trouve à une distance du quart de la corde du bord d'attaque et que sur le bord de fuite l'angle entre les tangentes à ses côtés supérieur et inférieur est nul, ce qui rend difficile l'emploi pratique de ces profils.

La longueur de la corde $b = z_A - z_B$ du profil peut être obtenue en déterminant z_A et z_B par la substitution dans la fonction de transformation des coordonnées qui leur correspondent $\zeta_A = l_1$ et $\zeta_B = -(r_0 + n^*) \cos \alpha_0$, c'est-à-dire

$$b = 2l_1 + 2l_1 \left[1 + \frac{2n^{*2}}{r_0 (r_{01} + 2n^*)}\right] \approx 4l_1, \qquad \text{(XII.113)}$$

où $r_{01} = \sqrt{l_1^2 + k^{*2}}$, $\cos \alpha_0 = l_1 / r_{01}$.

Le profil de Joukovski peut être construit géométriquement. Pour cela, il suffit de tenir compte de ce que sa coordonnée complexe peut être obtenue comme le résultat de l'addition géométrique des segments ζ et l_1^2/ζ correspondant au point donné P du cercle auxiliaire dans le plan ζ. Les segments l_1^2/ζ s'obtiennent par inversion, c'est-à-dire à l'aide de la relation

$$\zeta^* = \frac{l_1^2}{\zeta}.$$

De la théorie des représentations conformes, on sait qu'avec une telle transformation le cercle auxiliaire se transforme en un autre cercle ayant avec le cercle initial le point commun $\zeta = l_1$. Le centre du nouveau cercle est disposé au point o_1^* de l'intersection du segment o_1A avec la ligne qui s'obtiendra comme l'image reflétée du segment oo_1 par rapport à l'axe imaginaire.

Le nombre complexe ζ^*, correspondant au point donné P, avec l'angle polaire θ du cercle initial se détermine comme le segment oP^* dont l'angle polaire est égal à $-\theta$. Alors, comme on le voit de la fig. XII.21, la coordonnée complexe z du point du profil correspond au sommet du parallélogramme avec la diagonale

$$z = \overline{oP} + \overline{oP^*}.$$

En utilisant les valeurs (XII.112) des coefficients de la fonction de transformation et l'expression (XII.113) de la corde, déterminons le coefficient de portance du profil

$$C_y = 2\pi \left[\sqrt{1 + \left(\frac{k^*}{l_1}\right)^2} + \frac{n^*}{l_1} \right] \sin(\alpha + \alpha_0) \approx$$

$$\approx 2\pi \left(1 + \frac{n^*}{l_1}\right)(\alpha + \alpha_0). \qquad \text{(XII.114)}$$

La présence du paramètre n^*/l_1, qui détermine l'épaisseur relative du profil, augmente le coefficient de portance du profil par rapport à sa valeur pour le profil en arc ayant le même angle α_0, c'est-à-dire une courbure relative identique.

Le foyer du profil est disposé au point

$$z_1 = ik^* - n^* e^{-i\alpha_0} - \frac{l_1^2}{r_0} e^{i\alpha_0}. \qquad \text{(XII.115)}$$

et le moment par rapport au foyer

$$M_f = -2\pi\rho v_\infty^2 l_1^2 \sin 2\alpha_0 \qquad \text{(XII.116)}$$

est égal au moment du profil en arc avec le même angle α_0. Dans le cas du profil symétrique de Joukovski $\alpha_0 = 0$ et $M_f = 0$; cela signifie que le foyer du profil symétrique coïncide avec son centre de poussée, comme dans le cas d'une plaque plane, c'est-à-dire le centre de poussée ne change pas sa position avec la variation de l'angle d'incidence.

La construction des profils théoriques, pour lesquels l'angle entre les tangentes tracées sur le bord de fuite n'est pas nul, peut s'effectuer à l'aide de la fonction de transformation généralisée

$$\frac{z - \varkappa l_1}{z + \varkappa l_1} = \left(\frac{\zeta - l_1}{\zeta + l_1}\right)^{\varkappa}, \qquad \text{(XII.117)}$$

où $\varkappa \leqslant 2$.

Avec $\varkappa = 2$ cette fonction se transforme en expression qui a été déjà utilisée auparavant (XII.100), c'est-à-dire en fonction de transformation de Joukovski.

Les points singuliers de la fonction (XII.117) sont toujours les points $\zeta = \pm l_1$ qui dans le plan z passent dans $z = \pm \varkappa l_1$. Pour étudier les propriétés de la fonction introduite, faisons appel, comme pour l'étude de la fonction (XII.110), aux coordonnées polaires en y remplaçant le facteur 2 par la grandeur $\varkappa$. En portant des valeurs ainsi obtenues dans (XII.117), il vient

$$\frac{r_1}{r_2} e^{-i(\alpha_1-\alpha_2)} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\varkappa} e^{i\varkappa(\beta_1-\beta_2)}, \qquad \text{(XII.118)}$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \varkappa (\beta_1 - \beta_2). \qquad \text{(XII.119)}$$

Il résulte de cette égalité que les points situés sur le cercle dans le plan ζ qui passe par $\zeta = \pm l_1$, après leur représentation dans le plan z, appartiendront également aux arcs de cercle passant par $z = \pm \varkappa l_1$ (fig. XII.22). Ces arcs forment un profil avec deux arêtes vives, dit dièdre. L'angle intérieur δ entre ces arcs peut être déterminé si l'on admet dans le cas le plus simple que le centre du cercle dans le plan ζ coïncide avec l'origine des coordonnées. Alors, comme on le voit de la fig. XII.22, au point A, en se rapprochant de ce point d'en haut suivant le cercle, $\beta_1 \to \pi$, $\beta_2 \to 0$ et dans le plan $z\alpha_2 \to 0$, c'est-à-dire en vertu de (XII.119) $\alpha_1 \to \varkappa\pi/2$.

En se rapprochant de ce même point d'en bas, $\beta_1 \to -\pi/2$, $\beta_2 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$, c'est-à-dire $\alpha_1 \to -\varkappa\pi/2$. Mais dans le plan z à la différence des angles α_1 correspond au point A l'angle $2\pi - \delta$,

$$2\varkappa \frac{\pi}{2} = 2\pi - \delta.$$

Par conséquent,

$$\delta = \pi (2 - \varkappa). \qquad \text{(XII.120)}$$

Cette expression de δ, valable aussi pour une autre disposition du centre du cercle, est caractéristique pour les propriétés géométriques des profils obtenus à l'aide de la fonction (XII.117). Si $\varkappa = 2$, $\delta = 0$, ce qui est caractéristique, comme nous l'avons déjà noté ci-dessus, pour les profils de Joukovski.

Pour obtenir des profils à une arête vive, il faut tracer le cercle dans le plan ζ par le point $\zeta = l_1$ et le second point, où la conformité de la représentation est perturbée $\zeta = -l_1$, doit se trouver à l'intérieur du cercle (fig. XII.23).

La courbure, l'épaisseur et l'angle intérieur du bord de fuite du profil ainsi obtenu seront différents suivant les valeurs choisies de k^*, n^* et de l'exposant $\varkappa$.

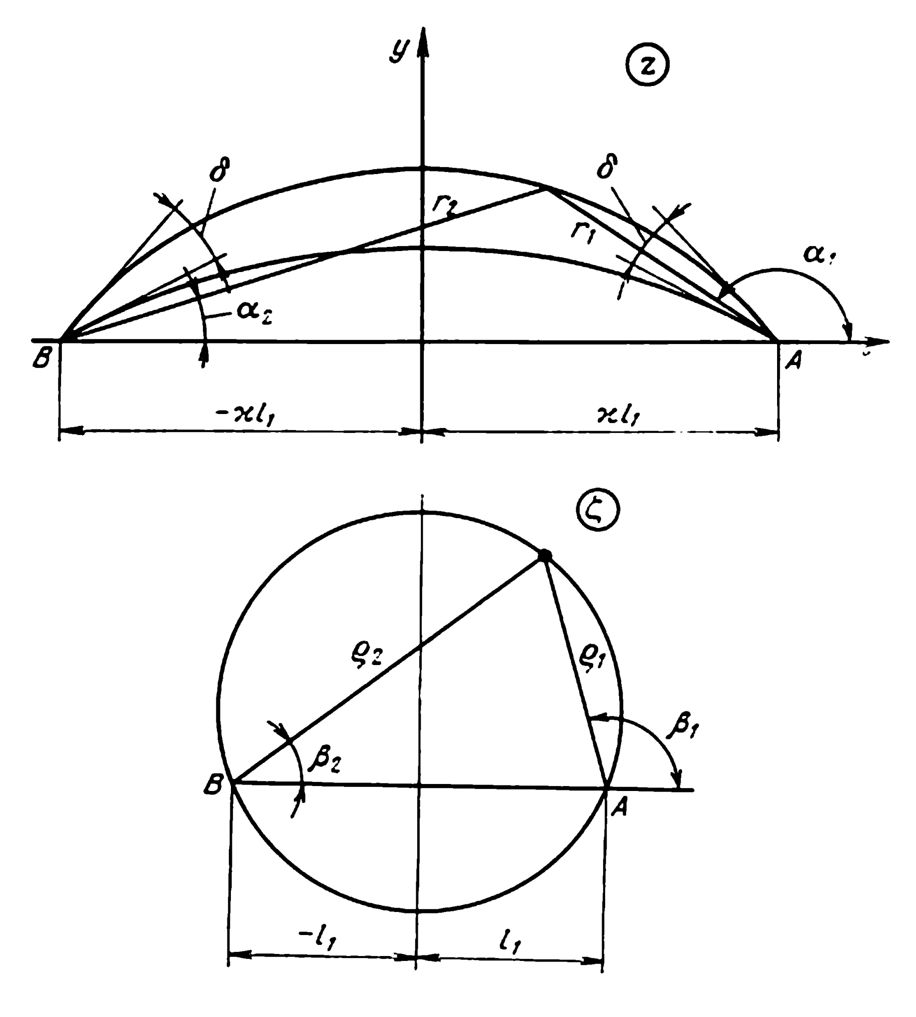


Fig. XII.22

On peut trouver les coordonnées de ce profil si l'on résout la fonction (XII.117) par rapport à z

$$z = \varkappa l \frac{1+\left(\frac{\zeta - l_1}{\zeta + l_1}\right)^{\varkappa}}{1-\left(\frac{z - l_1}{z + l_1}\right)^{\varkappa}} \tag{XII.121}$$

et, en se servant des coordonnées polaires introduites auparavant, on met en évidence les parties réelle et imaginaire

$$\left.\begin{aligned} x &= \varkappa l_1 \frac{1-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{2\varkappa}}{1+\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{2\varkappa} - 2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\varkappa}\cos\varkappa(\beta_1-\beta_2)}; \\ y &= \varkappa l_1 \frac{2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\varkappa}\sin\varkappa(\beta_1-\beta_2)}{1+\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{2\varkappa} - 2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\varkappa}\cos\varkappa(\beta_1-\beta_2)}. \end{aligned}\right\} \tag{XII.122}$$

Ces équations permettent de déterminer les coordonnées du profil si l'on connaît les valeurs ρ_1, ρ_2 et $\beta_1 - \beta_2$ pour les différents points de la circonférence. Les profils décrits au moyen de la fonction (XII.121) représentent les profils généralisés de Joukovski avec un angle non nul du bord de fuite arrière. L'expression (XII.121) permet de trouver les coefficients de la série de Laurent nécessaires au calcul des caractéristiques de ces profils.

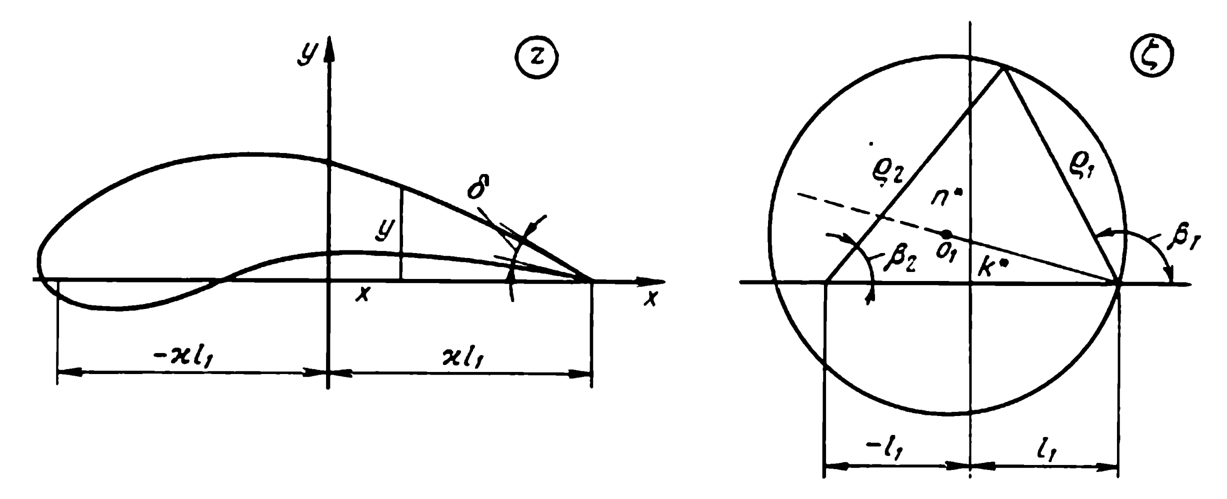


Fig. XII.23

On peut également obtenir différentes familles de profils théoriques en utilisant pour fonction de transformation l'expression de la forme

$$z = \zeta + \frac{l_1^2}{\zeta} + \frac{m_n}{(\zeta - \zeta_c)^n}, \qquad \text{(XII.123)}$$

où l_1^2 est le nombre réel et m_n et ζ_c les nombres complexes.

Les caractéristiques géométriques des profils dépendent de ces paramètres, ainsi que de l'exposant n. En les variant, on peut obtenir des profils de diverses formes avec différentes propriétés hydrodynamiques.

§ 81. THÉORIE DU PROFIL MINCE

Souvent il est nécessaire de calculer l'écoulement autour d'un profil de contour donné, ne coïncidant pas avec les contours des profils théoriques connus. On peut résoudre ce problème, si le profil étudié a une épaisseur relative faible, en utilisant la théorie du profil mince. Une méthode effective de calcul des caractéristiques des ailes minces a été élaborée par L. Sédov [20].

Examinons l'écoulement autour d'un profil mince faiblement incurvé, ayant une corde $b = 2a$, d'un fluide de vitesse v_∞ sous un angle d'incidence α (fig. XII.24). Vu la petite épaisseur de ce profil, son action sur l'écoulement peut être admise équivalente à l'action

de l'arc représentant la ligne moyenne du profil. Nous considérons comme connues les ordonnées de cet arc, décrites par l'équation

$$y = F(x).$$

La fonction caractéristique de l'écoulement autour de cet arc peut être représentée sous la forme d'une somme

$$w(z) = v_\infty e^{-i\alpha} z + w_1(z), \qquad \text{(XII.124)}$$

où $w_1(z)$ est la fonction caractéristique des vitesses induites.

Pour résoudre le problème il suffit de trouver la fonction dw_1/dz car elle détermine le champ des vitesses induites et, par conséquent,

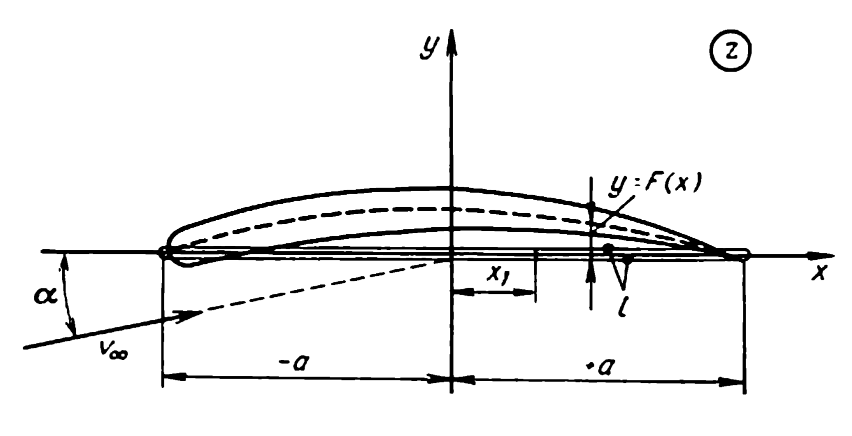


Fig. XII.24

les forces agissant sur le profil. Pour la détermination de cette fonction on doit tenir compte des conditions aux limites.

Sur la surface de l'arc correspondant à la ligne moyenne du profil, la condition d'imperméabilité $v_n = 0$ doit être observée. Cependant, en supposant la courbure de cet arc faible et en considérant que la direction de la normale à celui-ci diffère peu de la direction de l'axe des y, cette condition peut être remplacée par une condition plus simple $v_y = 0$.

En mettant en évidence dans (XII.124) la fonction de courant

$$\psi = v_\infty (y \cos\alpha - x \sin\alpha) + \psi_1, \qquad \text{(XII.125)}$$

on peut écrire la condition d'imperméabilité sous la forme

$$v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \qquad \text{(XII.126)}$$

ou

$$v_\infty \left(\frac{dy}{dx}\cos\alpha - \sin\alpha\right) - v_{y_1} = 0. \qquad \text{(XII.127)}$$

Nous obtenons définitivement l'expression de la composante transversale des vitesses induites en des points de l'arc que nous écrirons, en supposant les angles d'incidence faibles, sous la forme

$$v_{y_1}=v_\infty(F'-\alpha). \qquad \text{(XII.128)}$$

Elle signifie qu'en passant par la surface de l'arc, la composante de la vitesse de l'écoulement ne subit pas de discontinuité

$$v_{y_{1+}}=v_{y_{1-}}=v_{y_1}. \qquad \text{(XII.129)}$$

Les vitesses induites et, par conséquent, la fonction dw_1/dz sont univoques et finies dans tout l'écoulement; à l'infini, avec $z\to\infty$, elles tendent vers zéro.

En étudiant l'écoulement autour d'une plaque mince qui constitue l'exemple d'un profil mince simple, nous avons établi que son action sur l'écoulement est équivalente à l'action d'une couche tourbillonnaire disposée le long de sa surface. Ceci permet de remplacer l'action de l'arc considéré sur l'écoulement également par une couche tourbillonnaire d'intensité inconnue, disposée le long de la surface de l'arc. Et de plus, en vertu des propriétés de la couche tourbillonnaire (§ 80), la composante normale de la vitesse au passage par la couche tourbillonnaire est continue, c'est-à-dire qu'il est possible de remplir la condition (XII. 129). La composante tangentielle de la vitesse subit une discontinuité et ses valeurs sur les côtés supérieur $v_{x_{1+}}$ et inférieur $v_{x_{1-}}$ sont liées par la relation

$$v_{x_{1+}}=-v_{x_{1-}}. \qquad \text{(XII.130)}$$

Par la suite, vu la faible courbure du profil, on peut transférer cette condition de la surface de l'arc sur sa corde, c'est-à-dire sur le segment de l'axe, $-a\leqslant x\leqslant a$.

En tenant compte de ce que dans le cas d'une plaque mince le champ des vitesses induites, qui satisfait en principe aux conditions aux limites analogues, a été décrit par la relation (XII.89), nous allons chercher, conformément au profil mince examiné également, les vitesses induites sous la forme

$$\frac{dw_1}{dz}=\sqrt{\frac{z-a}{z+a}}\,f(z), \qquad \text{(XII.131)}$$

où $f(z)$ est la fonction analytique, finie en tous les points de la surface, liée d'après (XII.131) à la vitesse complexe induite par la relation

$$f(z)=-i\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}\,\frac{dw_1}{dz}. \qquad \text{(XII.132)}$$

En vertu de la formule de Cauchy, connue de la théorie des fonctions de la variable complexe, la fonction analytique en tout

point z peut être exprimée par ses valeurs aux points z_1 d'un contour fermé quelconque l limitant le domaine

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z_1)\,dz_1}{z_1-z}. \tag{XII.133}$$

En calculant l'intégrale, il faut observer le sens de contournement du contour l de façon que le domaine intérieur z soit disposé à gauche.

Vu qu'à l'infini, comme on en déduit de la formule (XII.132), $f(z)\to 0$, adoptons pour le contour l le segment d'axe réel deux fois traversé $-a<x<a$ sur lequel sont remplies les conditions (XII.129) et (XII.130) pour la vitesse induite, et par conséquent, selon (XII.132), les conditions se superposent à la valeur $f(z)$. Le sens de contournement doit être adopté à partir de $x=-a$ jusqu'à $x=+a$ et inversement. En des points du contour l $z_1=x_1$. Comme il suit de l'analyse du champ de la vitesse le long de la plaque, la racine dans l'expression (XII.131) doit être prise avec le signe plus si l'on fait le contournement du contour l d'en haut et avec le signe moins dans le cas contraire. Compte tenu de ce qui est exposé ci-dessus, en vertu de la formule (XII.133), on a

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left\{-i\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a+x_1}{a-x_1}}\left[\frac{(v_{x_{1+}}-iv_{y_{1+}})\,dx_1}{x_1-z}\right]+\right.$$
$$\left.+i\int_{a}^{-a}\sqrt{\frac{a+x_1}{a-x_1}}\,\frac{(v_{x_{1-}}-iv_{y_{1-}})\,dx_1}{x_1-z}\right\}. \tag{XII.134}$$

En prenant en considération les relations (XII.129) et (XII.130) qui lient les vitesses induites d'en haut et d'en bas, il vient

$$f(z)=-\frac{v_\infty}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{(F'-\alpha)}{x_1-z}\sqrt{\frac{a+x_1}{a-x_1}}\,dx_1. \tag{XII.135}$$

En portant la valeur obtenue $f(z)$ dans l'expression (XII.131) et en tenant compte de (XII.134), on obtient la vitesse complexe d'écoulement autour du profil mince sous la forme suivante:

$$\frac{dw}{dz}=v_\infty e^{-i\alpha}-\frac{v_\infty}{\pi i}\sqrt{\frac{z-a}{z+a}}\int_{-a}^{a}\frac{F'-\alpha}{x_1-z}\sqrt{\frac{a+x_1}{a-x_1}}\,dx_1. \tag{XII.136}$$

Pour calculer les réactions hydrodynamiques et le moment agissant sur le profil, il faut trouver les coefficients de décomposition de la vitesse complexe en série de Laurent

$$\frac{dw}{dz}=A_0+\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\ldots,$$

en se servant à cet effet des formules de la décomposition binomiale

$$\frac{1}{x_1-z}=-\frac{1}{z}-\frac{x_1}{z^2}\ldots;\quad \sqrt{\frac{z-a}{z+a}}=1-\frac{a}{z}+\frac{a^2}{2z^2}\ldots$$

En substituant ces décompositions dans (XII.136) et en groupant les termes en z^0, z^{-1} et z^{-2}, nous trouvons

$$\left.\begin{aligned}
&A_0=v_\infty e^{-i\alpha};\\
&A_1=\frac{v_\infty}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}(F'-\alpha)\sqrt{\frac{a+x_1}{a-x_1}}\,dx_1;\\
&A_2=\frac{v_\infty}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}(F'-\alpha)\sqrt{a^2-x_1^2}\,dx_1.
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(XII.137)}$$

Etant donné que toujours $A_1=\Gamma/2\pi i$, alors, en comparant cette valeur avec l'expression de A_1 obtenue ci-dessus, nous trouvons la formule pour le calcul de la circulation autour du profil mince

$$\Gamma=2v_\infty\int\limits_{-a}^{a}(F'-\alpha)\sqrt{\frac{a+x_1}{a-x_1}}\,dx_1.\qquad \text{(XII.138)}$$

En utilisant la formule de Joukovski (VI.15), nous obtenons l'expression de la réaction complexe

$$X-iY=-2i\rho v_\infty^2 e^{-i\alpha}\int\limits_{-a}^{a}(F'-\alpha)\sqrt{\frac{a+x_1}{a-x_1}}\,dx_1,\qquad \text{(XII.139)}$$

c'est-à-dire le module de la portance

$$R_y=2\rho v_\infty^2\int\limits_{-a}^{a}(F'-\alpha)\sqrt{\frac{a+x_1}{a-x_1}}\,dx_1.\qquad \text{(XII.140)}$$

A l'aide de la seconde formule de Tchaplyguine (VI.19), nous trouvons l'expression du moment de la réaction par rapport à l'origine des coordonnées, en admettant dans le calcul $\cos\alpha\approx 1$,

$$M=-2\pi\rho\,\text{Reel}\,(iv_\infty e^{-i\alpha}A_2)=2\rho v_\infty^2\int\limits_{-a}^{a}(F'-\alpha)\sqrt{a^2-x_1^2}\,dx_1.$$

(XII.141)

La formule (XII.136) montre que sur le bec du profil avec $z=-a$ la vitesse tend vers l'infini; sur le bord de fuite avec $z=a$ la vitesse a une valeur finie, c'est-à-dire que le postulat de Tchaplyguine-Joukovski est observé. Sur le bord d'attaque ap-

paraît une force de succion

$$X = -R_y \sin\alpha \approx -R_y\alpha. \qquad \text{(XII.142)}$$

Si la courbure de la ligne moyenne du profil est absente, c'est-à-dire $F' = 0$, les formules (XII.140) et (XII.141) se transforment en relations connues auparavant pour la plaque plane. Pour le démontrer il faut tenir compte de ce que

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a+x_1}{a-x_1}}\, dx_1 = \int_{-a}^{a} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2-x_1^2}} + \frac{x_1}{\sqrt{a^2-x_1^2}}\right) dx_1 =$$

$$= \left| a \arcsin\frac{x_1}{a} + a\sqrt{1-\left(\frac{x_1}{a}\right)^2}\ \right|_{-a}^{a} = \pi a;$$

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x_1^2}\, dx_1 = \frac{1}{2}\left| x_1\sqrt{a^2-x_1^2} + a^2 \arcsin\frac{x_1}{a}\ \right|_{-a}^{a} = \frac{\pi a^2}{2},$$

c'est-à-dire

$$|R| = 2\pi\rho a v_\infty^2 \alpha; \quad |M| = \pi\rho a^2 v_\infty^2 \alpha.$$

Ces résultats prouvent que pour un profil symétrique mince, pour lequel, comme pour une plaque, $F' = 0$, la théorie exposée donne les mêmes valeurs de la force portante et du moment, qui apparaissent au cours de l'écoulement autour d'une plaque plane.

La théorie énoncée ci-dessus n'assure pas une précision suffisante du calcul de l'écoulement autour des profils quelconques avec n'importe quels angles d'incidence, ainsi que du calcul de la distribution de la pression sur la surface du profil mince; dans ces cas on doit recourir à d'autres méthodes. La plus effective est la méthode des représentations conformes. En employant cette méthode, on écrit la fonction de transformation, qui représente l'extérieur du profil sur l'extérieur du cercle, sous la forme d'une série de Laurent

$$z = \zeta + m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{\zeta^n}.$$

Dans ce cas la dérivée $dz/d\zeta \to 1$ avec $\zeta \to \infty$, ce qui assure la correspondance des écoulements à l'infini. Les coefficients m_n de la série se trouvent à l'aide des moyens approchés de la représentation conforme.

§ 82. SCHÉMA DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE AILE D'ENVERGURE FINIE

Les ailes utilisées dans les constructions réelles ont toujours une envergure finie. Ceci impose la nécessité d'élaborer une théorie permettant de tenir compte des principales particularités de l'écou-

lement autour de telles ailes. Leur principale particularité consiste dans le caractère tridimensionnel de l'écoulement autour de l'aile d'envergure finie et dans le processus de formation de systèmes tourbillonnaires dans l'écoulement derrière l'aile conditionné par ce caractère d'écoulement. Etudions l'origine de l'apparition de ces tourbillons, en admettant que l'aile est baignée par un courant permanent de fluide non visqueux. Isolons la section de l'aile dans laquelle sur le profil apparaît une force portante. D'après le théorème de Joukovski, la circulation Γ-qui existe dans cette section est proportionnelle à la force portante. Entourons cette section par un contour fermé l_1 et supposons que sur ce contour s'appuie la surface Ω (fig. XII.25) qui enveloppe une partie de l'aile. La circulation de la vitesse sur le contour l_1 est égale à la circulation Γ autour du profil et en vertu du théorème de Stokes est égale au flux des tourbillons à travers la surface Ω. Par conséquent, la surface Ω est traversée par des lignes tourbillons qui prennent naissance à l'intérieur de cette surface, c'est-à-dire sur la surface de l'aile comprise à l'intérieur de Ω. Comme dans l'écoulement il n'existe pas de tourbillons en avant de l'aile, lesdits tourbillons ne peuvent se trouver qu'en arrière de l'aile où ils forment un système de tourbillons marginaux s'éloignant à l'infini. Ce système ne se forme pas si au cours de l'écoulement autour de l'aile il ne se produit pas de force portante. Le système de tourbillons marginaux se ferme par un tourbillon d'établissement de courant qui naît au début du mouvement de l'aile; en écoulement permanent autour de l'aile, on peut considérer le tourbillon d'établissement de courant comme disposé à l'infini, c'est-à-dire ne pas tenir compte de son influence sur le courant fluide contournant l'aile. Les tourbillons libres prennent naissance sur la surface de l'aile.

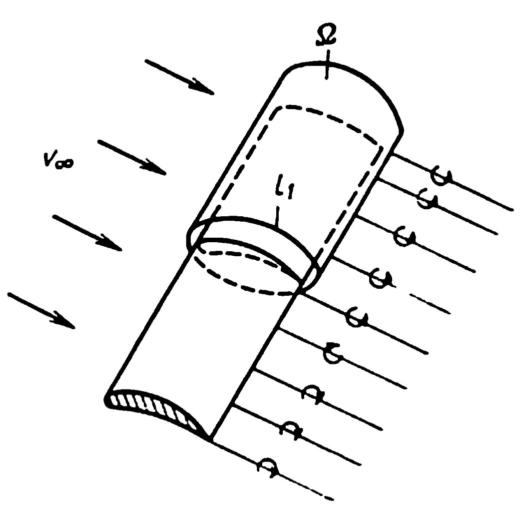


Fig. XII.25

Comme l'action du profil de l'aile sur l'écoulement peut être remplacée par une couche tourbillonnaire, ou, dans le cas le plus simple, par un tourbillon attaché, alors d'après le premier théorème de Helmholtz, pour conserver la circulation le long des tourbillons, on doit admettre que les tourbillons marginaux sont fermés par une couche tourbillonnaire attachée ou par le tourbillon attaché de l'aile, en formant avec ces derniers et avec le tourbillon d'établissement de courant un système fermé de filets tourbillonnaires. Les tourbillons attachés se déplacent dans le fluide avec l'aile et

comme le tourbillon d'établissement de courant initial reste sur place au début du déplacement de l'aile, alors il devient clair que la longueur des tourbillons libres (marginaux), qui forment avec les tourbillons attachés un système fermé, doit augmenter avec le déplacement de l'aile. L'apparition continue dans le fluide de tronçons supplémentaires de tourbillons marginaux s'accompagne de l'augmentation de l'énergie cinétique du fluide qui se produit évidemment aux dépens du travail effectué par l'aile. Cela signifie que l'aile qui crée lors de son mouvement dans un fluide un système de tourbillons marginaux doit surmonter la force de résistance à son mouvement qui s'exerce de la part du fluide. Cette résistance est dite résistance induite de l'aile. Elle apparaît en mouvement de l'aile, y compris en fluide non visqueux, ce qui atteste que le paradoxe d'Euler-d'Alembert relatif à l'annulation de la force de résistance en écoulement autour des ailes d'envergure finie n'est pas vrai.

La forme des tourbillons marginaux derrière l'aile dépend des résultats de leur interaction et de leur réaction avec les tourbillons attachés de l'aile. Etant donné qu'en écoulement permanent autour de l'aile la position de ces tourbillons dans l'espace reste invariable, alors leurs axes coïncident avec la direction des lignes de courant et, par conséquent, a lieu une corrélation suivant laquelle

$$\bar{v}\times\bar{\omega}=0, \qquad \text{(XII.143)}$$

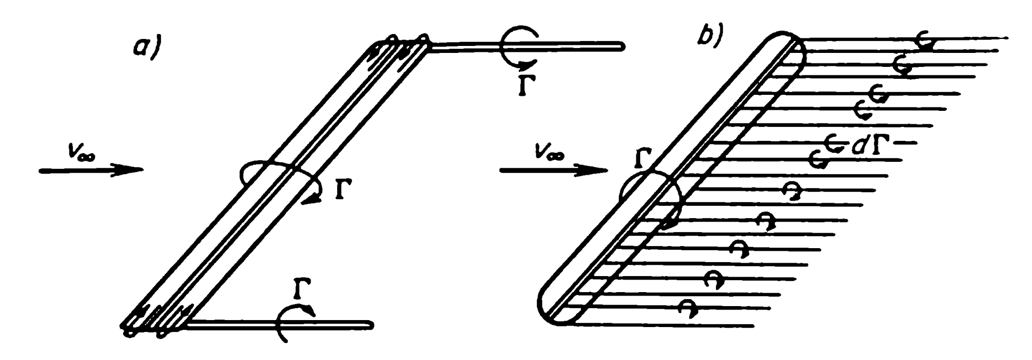
où $\bar{\omega}$ est le vecteur de la vitesse angulaire de rotation des tourbillons marginaux le long des lignes tourbillonnaires.

Examinons l'origine physique de l'apparition des tourbillons marginaux. Par suite de la différence des pressions régnant sur l'intrados et l'extrados, aux extrémités de l'aile il s'établit des chutes de pression. Elles conditionnent un courant transversal de fluide allant de l'intrados (en surpression) vers l'extrados (en dépression). Ce sont justement ces courants transversaux de fluide, qui se conservent dans le sillage derrière l'aile, qui provoquent la formation de tourbillons marginaux à l'arrière de l'aile disposés le long de l'écoulement.

L'existence des tourbillons marginaux est justifiée par des observations expérimentales, par exemple au moyen de moulinets placés dans le sillage derrière l'aile.

Si dans le cas le plus simple on remplace l'action de chaque section de l'aile exercée sur le courant par un tourbillon attaché et on admet que dans toutes les sections le long de l'envergure de l'aile il apparaît une force portante identique, alors la circulation du tourbillon attaché sera invariable le long de toute son envergure, égale à l'envergure de l'aile. Et de plus, aux extrémités de l'aile le tourbillon attaché se transforme en deux tourbillons marginaux avec la même circulation, qui s'éloignent à l'infini. Finalement nous obtenons un schéma tourbillonnaire simple de l'aile d'envergure finie sous la forme d'un tourbillon semi-infini en U avec une circu-

lation Γ constante sur toute sa longueur (fig. XII.26,*a*). Cependant, les différentes sections de l'aile le long de l'envergure créent généralement une force portante différente. Suivant le théorème de Joukovski, cela veut dire que la grandeur de la circulation du tourbillon attaché change lorsqu'on passe d'une section à l'autre et dépend



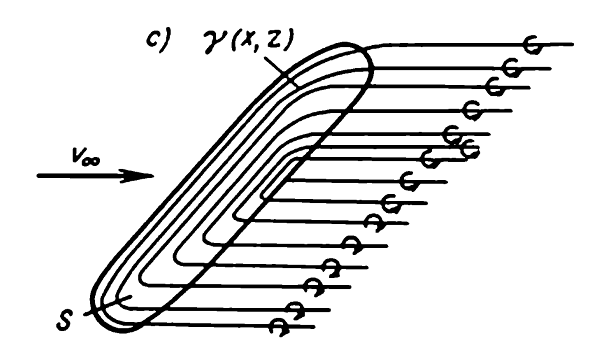


Fig. XII.26

de la coordonnée z, c'est-à-dire $\Gamma(z)$. Il est à supposer qu'en tous les points le long de l'envergure du tourbillon attaché, où se produit la variation de la circulation

$$d\Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial z} dz, \qquad \text{(XII.144)}$$

apparaissent des tourbillons marginaux élémentaires avec une circulation $d\Gamma$ qui s'enfuient en arrière. En définitive, derrière une telle aile, avec une variation continue de la circulation le long de son envergure, il se forme une nappe tourbillonnaire constituée de tourbillons marginaux élémentaires. Le schéma tourbillonnaire de l'aile composé d'un tourbillon attaché avec une circulation variable le long de l'envergure et d'une nappe semi-infinie de tourbillons marginaux s'appelle schéma de la ligne portante (fig. XII.26,*b*). Dans l'hydrodynamique des navires ce schéma est utilisé par exemple pour l'étude des caractéristiques des ailes portantes des bateaux.

Dans § 81 il a été montré que l'action du profil mince peut être remplacée dans l'écoulement par une couche tourbillonnaire des tourbillons attachés avec des axes dirigés le long de l'envergure de l'aile, disposés sur sa ligne moyenne. En cas d'une aile d'envergure finie, l'intensité de cette couche tourbillonnaire γ variera non seulement le long de la corde du profil, mais également le long de l'envergure de l'aile, c'est-à-dire $\gamma(x, z)$. Les tourbillons marginaux avec une circulation $d\gamma$ se détacheront dans le sillage en tous les points de la surface de l'aile où il y a la variation de l'intensité de la couche tourbillonnaire en formant derrière l'aile une nappe tourbillonnaire complexe. Pour cette raison, lors de l'élaboration plus détaillée de la théorie de l'aile d'envergure finie, on doit admettre que son schéma tourbillonnaire se compose de la couche tourbillonnaire disposée sur la surface S de l'aile et d'une nappe de tourbillons marginaux (fig. XII. 26,*c*). C'est ce que l'on appelle le schéma de l'aile d'envergure finie comme surface portante. Il est utilisé par exemple dans la théorie des hélices propulsives marines.

Pour n'importe quel des schémas décrits, il est caractéristique ce que les tourbillons placés dans l'écoulement y engendrent des vitesses supplémentaires dites vitesses induites v_i. Ces vitesses ont une influence sensible sur les caractéristiques hydromécaniques de l'aile d'envergure finie.

§ 83. THÉORIE DE L'AILE D'ENVERGURE FINIE COMME LIGNE PORTANTE

En remplaçant l'action de l'aile d'envergure finie exercée sur un écoulement par une ligne sous forme d'un tourbillon attaché avec une circulation variable suivant l'envergure et avec une nappe semi-infinie de tourbillons marginaux derrière celle-ci, disposons l'origine des coordonnées au milieu de l'envergure de l'aile et admettons que l'axe des z coïncide avec la ligne du tourbillon attaché (fig. XII.27). Le champ de vitesse autour d'une telle aile se compose de la somme des vitesses de l'écoulement à l'infini $\bar{v}_\infty$ et du champ des vitesses induites, créé par les tourbillons,

$$\bar{v}=\bar{v}_\infty+\bar{v}_i.$$

Adoptons l'hypothèse que les vitesses induites v_i sont petites. Elle est vraie si les angles d'incidence de l'aile sont faibles et si l'allongement de l'aile est suffisamment grand. On ne peut élaborer des recommandations pratiques sur les limites d'emploi de cette hypothèse qu'après avoir comparé la théorie construite avec les données des expériences. En s'appuyant sur cette hypothèse, on peut écrire approximativement la condition (XII.143) sous la forme

$$\bar{v}_\infty \times \bar{\omega}=0.$$

Cela signifie qu'on peut considérer les axes des tourbillons marginaux comme étant confondus avec la vitesse de l'écoulement à l'infini, c'est-à-dire parallèles à l'axe des x dans le système des coordonnées aérodynamiques, comme l'indique la fig. XII.27, et la nappe de tourbillons comme étant plane. Examinons le champ des vitesses induites dans la région de l'axe du tourbillon attaché. Comme le tourbillon rectiligne n'induit pas de vitesses en des points

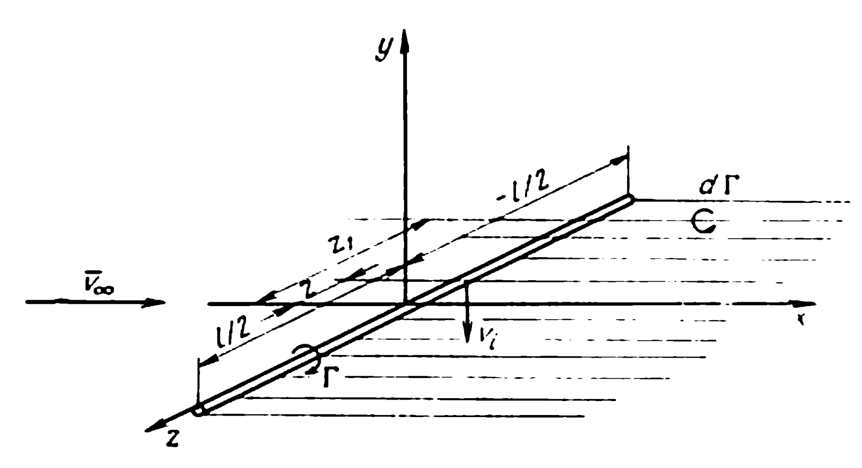


Fig. XII.27

de son axe, alors à l'endroit de la disposition de l'axe du tourbillon attaché les vitesses ne sont induites que par les tourbillons libres

$$\bar{v}_i = j\bar{v}_{yi}.$$

Pour calculer la vitesse v_{yi} en n'importe quel point du tourbillon attaché de coordonnée z, isolons dans la nappe tourbillonnaire plane un tourbillon élémentaire avec une circulation $d\Gamma$, disposé à une distance z_1 de l'axe des x.

Un tourbillon rectiligne infini avec circulation induit autour de lui un champ de vitesse, déterminé par la formule

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi h}.$$

Au commencement du tourbillon semi-infini ces vitesses sont deux fois moindres. C'est pourquoi, vu que dans notre cas $h = z$ — — z et $\Gamma = d\Gamma$, nous obtenons

$$dv_{yi} = \frac{d\Gamma}{4\pi(z_1 - z)}.$$

Nous trouvons la valeur totale de la vitesse induite $v_i = v_{yi}$ en additionnant les influences de tous les tourbillons marginaux en un point donné de la ligne portante, c'est-à-dire en effectuant l'intégration le long de l'envergure de l'aile compte tenu de la formule

(XII.144)

$$v_i = -\frac{1}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{d\Gamma}{dz_1}\frac{dz_1}{z-z_1}. \qquad \text{(XII.145)}$$

La vitesse induite v_i crée dans la région de la disposition de l'aile une déflexion du courant d'un angle α_i appelé angle de déflexion induit (fig. XII.28). Dans le cas général de l'écoulement autour

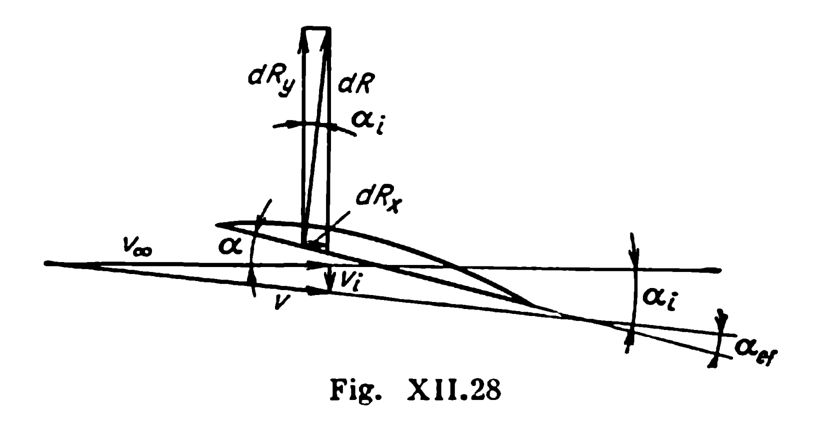


Fig. XII.28

d'une aile, les vitesses induites v_i et les angles de déflexion α_i ne sont pas constants le long de son envergure, c'est-à-dire ils dépendent de z.

Eu égard à ce que les vitesses induites sont faibles, on peut écrire d'après la fig. XII.28

$$\alpha_i \approx \operatorname{tg}\alpha_i = \frac{v_i}{v_\infty}, \qquad \text{(XII.146)}$$

et la vitesse totale de l'écoulement à l'endroit de la disposition du tourbillon attaché

$$v = \sqrt{v_\infty^2 + v_i^2} = v_i\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_i} \approx v_\infty. \qquad \text{(XII.147)}$$

Considérons maintenant le problème du calcul des forces agissant sur un élément d'aile de longueur dz. Comme l'aile est remplacée par le tourbillon attaché avec une circulation variable le long de l'envergure, alors pour le calcul de la réaction hydrodynamique dR il suffit d'utiliser le théorème de Joukovski (XII.46)

$$dR = \rho v \Gamma\, dz.$$

Cette réaction est dirigée perpendiculairement à la vitesse v de l'écoulement résultant, c'est-à-dire sous l'angle α_i à l'axe des y. Par la suite, la vitesse v pourra être remplacée par sa valeur dans l'expression (XII.147). Cette réaction conditionne l'apparition de deux composantes de la vitesse dans le système de coordonnées aérodynamiques

$$dR_x = dR\sin\alpha_i;$$
$$dR_y = dR\cos\alpha_i.$$

En posant ensuite $\sin \alpha_i = \alpha_i$ et $\cos \alpha_i = 1$ et en effectuant l'intégration des forces élémentaires le long de l'envergure de l'aile, nous obtenons des formules générales suivantes qui déterminent la traînée et la portance de l'aile d'envergure finie en fluide non visqueux :

$$R_x = \rho v_\infty \int_{-l/2}^{l/2} \Gamma(z)\, \alpha_i(z)\, dz; \qquad \text{(XII.148)}$$

$$R_y = \rho v_\infty \int_{-l/2}^{l/2} \Gamma(z)\, dz. \qquad \text{(XII.149)}$$

La composante R_x représente la traînée, qui est, suivant ce qui a été énoncé au § 82, la résistance induite de l'aile $R_x = R_i$. L'apparition de cette force est liée à la déflexion du courant d'un angle α_i et à la déviation de réaction provoquée par cette déflexion par rapport à sa direction dans l'écoulement autour d'une aile d'envergure infinie derrière laquelle il n'existe pas de nappe de tourbillons marginaux. La formule (XII.148) témoigne de ce que la résistance induite s'annule quand la circulation est nulle, c'est-à-dire quand l'aile ne crée pas de force portante. En écoulement autour d'une aile d'envergure finie dans un fluide visqueux, la force totale de la traînée R_x se compose de la somme des résistances induite et visqueuse.

Des formules (XII.148) et (XII.149) il suit que les forces hydrodynamiques, qui apparaissent en écoulement autour d'une aile d'envergure finie, dépendent notablement de la loi de distribution de la circulation le long de l'envergure d'une telle aile.

Ainsi, pour calculer ces forces et les angles de déflexion α_i, il est indispensable d'élaborer des méthodes de calcul de la circulation $\Gamma(z)$ suivant la forme de l'aile et son angle d'incidence.

En utilisant l'expression de la force élémentaire dR_y, on peut obtenir la formule pour le calcul du moment M_x de l'aile d'envergure finie par rapport à l'axe des x

$$M_x = \int_{-l/2}^{l/2} z\, dR_y = \rho v_\infty \int_{-l/2}^{l/2} z\Gamma(z)\, dz.$$

Il est évident que si la charge de l'aile est répartie le long de son envergure symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées, ce moment est nul. Quant au moment M_z, le schéma considéré ne permet pas de prendre en compte entièrement l'influence de l'envergure de l'aile sur sa grandeur, car la position du tourbillon attaché du profil est sur le schéma considéré la même que dans le cas du profil de l'aile d'envergure infinie. Par suite, la valeur du coefficient du moment m_z de l'aile d'envergure finie,

qui a en plan la forme d'un rectangle, sera la même que de l'aile d'allongement infini.

En examinant le triangle des vitesses en écoulement autour du profil d'aile d'envergure finie, montré sur la fig. XII.28, on peut établir que l'apparition de la vitesse induite et de la déflexion du courant d'un angle α_i qui en résulte conduit à la variation de l'angle d'incidence α du profil. En effet, l'angle d'incidence effectif α_{ef} représente maintenant la différence entre les angles d'incidence α du profil par rapport à la vitesse de l'écoulement à l'infini en amont de l'aile et l'angle de déflexion α_i dans la région de la disposition de l'aile

$$\alpha_{ef} = \alpha - \alpha_i.$$

Il faut s'attendre à ce que la circulation formée autour du profil et les particularités d'écoulement autour de lui seront déterminées justement par cette valeur de l'angle d'incidence effectif.

En prenant en considération le fait que l'observation du postulat de Tchaplyguine-Joukovski est une condition infaillible du travail normal d'une aile, y compris d'envergure finie, exigeons que ce postulat soit rempli dans chaque section transversale d'une telle aile.

Si pour la détermination de la circulation on se sert de la formule (XII.56), valable sous condition d'un écoulement régulier autour du bord de fuite aigu du profil, alors on doit y faire introduire au lieu de l'angle α l'angle d'incidence effectif $\alpha - \alpha_i$. En tenant compte de ce qu'ordinairement à l'utilisation des fonctions de transformation, au moyen desquelles on effectue la représentation du profil sur le cercle, le coefficient $m_{-1} = 1$, $v_{\infty z} = v_\infty$ et en admettant les angles d'incidence petits, la relation (XII.56) pourra s'écrire sous la forme

$$\Gamma = 4\pi r_0 v_\infty (\alpha - \alpha_0 - \alpha_i).$$

Ici l'angle α_i peut être exprimé par le module de la vitesse induite en utilisant les formules (XII.145) et (XII.146) ; d'autre part, on peut introduire la corde b du profil, en désignant $2\pi r_0/b = a$, et l'angle d'incidence $\alpha_1 = \alpha - \alpha_0$ par rapport à l'axe de portance nulle. En définitive on obtient

$$\Gamma = 2abv_\infty \left(\alpha_1 - \frac{1}{4\pi v_\infty} \int\limits_{-l/2}^{l/2} \frac{d\Gamma}{dz_1} \frac{dz_1}{z - z_1}\right). \qquad \text{(XII.150)}$$

Cette expression, contenant une fonction inconnue $\Gamma(z)$, représente par rapport à celle-ci une équation intégro-différentielle.

Pour une aile non rectangulaire en plan, b est une certaine fonction de z connue à l'avance. L'angle α_1 des ailes géométriquement vrillées est également une variable le long de l'envergure et la loi de sa variation doit être imposée.

L'équation intégro-différentielle obtenue de la théorie de l'aile comme une ligne portante ne peut pas être résolue sous sa forme générale. Par ailleurs, seulement au moyen de cette équation on peut trouver la loi de la répartition de la circulation pour une aile avec des caractéristiques géométriques données. Par suite, actuellement on a élaboré des méthodes qui permettent d'effectuer les calculs des ailes d'envergure finie avec l'utilisation des moyens approchés de résolution de cette équation.

§ 84. CALCUL THÉORIQUE DES CARACTÉRISTIQUES HYDRODYNAMIQUES DE L'AILE D'ENVERGURE FINIE

Pour le calcul théorique des caractéristiques hydrodynamiques de l'aile d'envergure finie, faisons appel à la méthode élaborée par Glauert. A cet effet, introduisons une nouvelle variable sans dimension θ qui est liée avec la coordonnée z de la ligne portante par la relation

$$-\frac{z}{\frac{l}{2}}=\cos\theta. \qquad \text{(XII.151)}$$

Il est évident que dans les limites de l'envergure de l'aile $\pm l/2$ le cosinus varie de -1 à $+1$ et θ de π à 0.

En tenant compte de ce que pour l'angle d'incidence donné toutes les sections d'une aile plane créent généralement une force portante de même signe, c'est-à-dire la circulation de la vitesse autour d'elles a également le même signe, représentons la loi de distribution de la circulation le long de l'envergure sous la forme d'une série trigonométrique suivant les sinus de l'argument θ sous la forme suivante

$$\Gamma=2lv_\infty\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta. \qquad \text{(XII.152)}$$

Ici A_n sont les coefficients inconnus qui dépendent des caractéristiques géométriques de l'aile et de son angle d'incidence, et la forme adoptée de la décomposition assure l'annulation de la circulation aux extrémités de l'aile.

Examinons les formules de calcul des forces hydrodynamiques de l'aile, obtenues pour une telle représentation de la loi de distribution de la circulation le long de son envergure.

Suivant la formule (XII.149), en tenant compte de (XII.152), on peut écrire l'expression suivante de la portance de l'aile

$$R_y=\rho v_\infty\int_{-l/2}^{l/2}\Gamma(z)\,dz=\rho v_\infty^2 l^2\int_0^\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta\right)\sin\theta\,d\theta,$$

où il est pris en compte que d'après (XII.151)

$$dz = \frac{l}{2} \sin\theta \, d\theta. \qquad \text{(XII.153)}$$

Pour calculer les intégrales suivant la variable θ on doit tenir compte de la propriété connue du cours de l'analyse mathématique d'orthogonalité des sinus des arcs multiples selon laquelle

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta \, d\theta = 0, \quad \text{si} \quad m \neq n; \\ &\int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad m = n. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII.154)}$$

En partant de ces relations, nous trouvons

$$\int_0^\pi \sin^2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin\theta \, d\theta = 0 \quad \text{avec} \quad n > 1.$$

En définitive, on obtient

$$R_y = \rho v_\infty^2 \frac{\pi}{2} A_1 l^2. \qquad \text{(XII.155)}$$

En comparant cette expression avec la formule générale de la portance de l'aile

$$R_y = C_y \frac{\rho v_\infty^2}{2} S$$

et en tenant compte de ce que $\lambda = l^2/S$, écrivons la formule théorique suivante pour le coefficient de portance de l'aile d'envergure finie

$$C_y = \pi\lambda A_1. \qquad \text{(XII.156)}$$

Passons maintenant au calcul de la résistance induite. En vertu de (XII.148), pour cela il est indispensable de connaître les valeurs de l'angle de déflexion induit. En se servant de la formule (XII.146) et en y portant la valeur de la vitesse induite (XII.145), nous trouvons l'expression suivante pour le module de cet angle:

$$\alpha_i = \frac{1}{4\pi v_\infty} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{d\Gamma}{dz_1} \frac{dz_1}{z - z_1}. \qquad \text{(XII.157)}$$

En tenant compte du fait que d'après le remplacement des variables (XII.151)

$$z - z_1 = -\frac{l}{2}(\cos\theta - \cos\theta_1),$$

et d'après (XII.152)

$$\frac{d\Gamma}{dz_1} = \frac{d\Gamma}{d\theta_1}\frac{d\theta_1}{dz_1} = 4v_\infty \sum_{n=1}^{\infty} nA \frac{\cos n\theta_1}{\sin\theta_1},$$

et en prenant en considération l'expression de la différentielle (XII.153), nous obtenons

$$\alpha_i = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \frac{\cos n\theta_1}{\cos\theta - \cos\theta_1} d\theta_1. \qquad \text{(XII.158)}$$

Les relations (XII.157) et (XII.158) contiennent des intégrales impropres dont la fonction sous le signe somme tend vers l'infini avec $z_1 \to z$ ou respectivement avec $\theta_1 \to \theta$. De telles intégrales sont considérées du point de vue de leur valeur principale, c'est-à-dire on calcule leur limite, par exemple

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta_1\, d\theta_1}{\cos\theta - \cos\theta_1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{\theta-\varepsilon} \frac{\cos n\theta_1\, d\theta_1}{\cos\theta - \cos\theta_1} + \int_{\theta+\varepsilon}^{\pi} \frac{\cos n\theta_1\, d\theta_1}{\cos\theta - \cos\theta_1}\right).$$

En utilisant la théorie des soustractions, on peut montrer [6] que

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta_1\, d\theta_1}{\cos\theta - \cos\theta_1} = -\pi\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

Alors pour l'angle de déflexion induit, on trouve l'expression générale suivante:

$$\alpha_i = \int_{n=1}^{\infty} nA_n \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}. \qquad \text{(XII.159)}$$

Appliquons cette formule, ainsi que l'expression (XII.152), pour le calcul de la résistance induite

$$R_i = \rho v_\infty \int_{-l/2}^{l/2} \Gamma(z)\,\alpha_i(z)\,dz =$$

$$= \rho v_\infty^2 l^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \sum_{m=1}^{\infty} mA_m \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\sin\theta\, d\theta.$$

Ici nous avons trouvé nécessaire d'affecter les indices m aux termes de la série, qui expriment la valeur de l'angle de déflexion

induit pour pouvoir tenir compte de toutes les combinaisons possibles des produits des sinus des arcs multiples. En employant les formules (XII.154) pour le calcul des intégrales des termes respectifs de la série obtenue, nous trouvons l'expression suivante de la résistance induite de l'aile:

$$R_i = \rho v_\infty^2 l^2 \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2, \qquad \text{(XII.160)}$$

et après l'avoir comparée avec la formule de la théorie de la similitude

$$R_i = C_i \frac{\rho v_\infty^2}{2} S,$$

nous obtenons l'équation du coefficient de résistance induite de l'aile

$$C_i = \pi\lambda \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2. \qquad \text{(XII.161)}$$

En introduisant dans celle-ci le coefficient de portance de l'aile et en utilisant (XII.156), nous obtenons

$$C_i = \frac{C_y^2}{\pi\lambda}(1+\delta), \qquad \text{(XII.162)}$$

où

$$1+\delta = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{A_n^2}{A_1^2}.$$

Les formules (XII.156) et (XII.162) montrent que les coefficients de résistance induite et de portance de l'aile d'envergure finie se déterminent par les coefficients de décomposition en série de la circulation de la vitesse; par conséquent, pour le calcul de C_i et C_y il faut préalablement déterminer les coefficients A_n. Pour résoudre ce problème, on doit utiliser l'équation intégro-différentielle (XII.150).

En portant dans cette équation la décomposition de la circulation (XII.152) et l'expression de l'angle de déflexion induit (XII.159), il vient

$$2lv_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta = 2av_\infty b \left(\alpha_1 - \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)$$

ou, en groupant les termes et en les réduisant à la forme sans dimensions par leur division par l,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a\frac{b}{l}n + \sin\theta\right) A_n \sin n\theta = a\frac{b}{l}\alpha_1 \sin\theta. \qquad \text{(XII.163)}$$

Dans cette équation α_1 et ab/l sont les fonctions connues de z, c'est-à-dire du paramètre θ; les valeurs cherchées sont les coefficients A_n. Pour résoudre cette équation, on utilise généralement différentes méthodes approchées élaborées par Glauert, Lotz, Carrafoli, Multhopp [11], [8]. Parmi ces méthodes la plus simple est celle de Glauert, applicable aux ailes proches de la forme rectangulaire ou elliptique en plan, qui consiste dans le remplacement de l'équation (XII.163) par un système fini d'équations algébriques comprenant n équations aux coefficients inconnus A_n.

Pour obtenir ce système, l'équation (XII.163) doit être satisfaite non pas sur toute l'aile, mais seulement en n points de son envergure. Les valeurs de la variable θ des fonctions α_1, ab/l et sin θ pour les points respectifs s'obtiennent d'après la formule (XII.151) et, en limitant la somme de la série (XII.152) à n membres, on écrit l'équation (XII.163). Finalement, on obtient un système fermé de n équations algébriques contenant n coefficients inconnus A_n.

Les calculs des coefficients A_n se simplifient notablement, si l'aile en plan est symétrique par rapport à l'axe des x, c'est-à-dire si la loi de distribution de la circulation est également symétrique par rapport à cet axe. Dans ce cas $\Gamma(z) = \Gamma(-z)$, c'est-à-dire $\Gamma(\theta) = \Gamma(\pi - \theta)$ et comme $\sin n(\pi - \theta) = -\sin n\theta$, alors pour une loi symétrique de distribution de la circulation, il faut que pour les n pairs toutes les valeurs $A_n = 0$; les expressions (XII.152) et (XII.163) ne contiennent donc que les membres impairs de la série. De plus, dans les calculs, on peut se limiter à la variation de la valeur du paramètre θ comprise entre 0-90°; une précision nécessaire des calculs peut être assurée en conservant dans la décomposition (XII.152) quatre membres de la série, c'est-à-dire en déterminant les coefficients A_1, A_3, A_5, A_7 et en satisfaisant l'équation (XII.163) en des points calculés auxquels correspondent les valeurs de θ égales à $\pi/2$; $3/8\pi$; $\pi/4$ et $\pi/8$, c'est-à-dire $z = 0$; $0{,}383\,l/2$; $0{,}707\,l/2$ et $0{,}924\,l/2$.

§ 85. AILE D'ENVERGURE FINIE AVEC UNE RÉSISTANCE INDUITE MINIMALE

Les formules théoriques obtenues pour une aile d'envergure finie permettent de poser et de résoudre le problème de l'aile, qui pour une valeur du coefficient de portance donnée a la résistance induite minimale. Si l'on tient compte que le coefficient de résistance visqueuse de l'aile ne dépend pratiquement pas de son envergure, alors l'aile avec une résistance induite minimale sera simultanément l'aile de qualité hydrodynamique maximale.

Pour étudier le problème du minimum de la résistance induite pour les valeurs données de C_y et λ, reportons-nous à la formule du

C_i (XII.162). Etant donné que l'expression

$$1+\delta=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{A_n^2}{A_1^2}=1+2\frac{A_2^2}{A_1^2}+3\frac{A_3^2}{A_1^2}+\ldots,$$

qui fait partie de cette formule, représente une somme des membres positifs (contient les carrés des coefficients A_n), alors le minimum C_i est assuré, si $\delta = 0$, c'est-à-dire $A_n = 0$ avec $n > 1$, et seul le coefficient A_1 qui n'est pas nul. Par conséquent, le coefficient de résistance induite d'une aile optimale se détermine par la formule

$$C_i=\frac{C_y^2}{\pi\lambda}, \qquad \text{(XII.164)}$$

c'est-à-dire la relation $C_i = f(C_y)$ représente une parabole appelée parabole de résistance induite; le coefficient de portance d'une telle aile se détermine toujours par la relation

$$C_y=\pi\lambda A_1.$$

Considérons les particularités hydrodynamiques et géométriques de l'aile optimale. En vertu de la formule (XII.159) l'angle de déflexion induit du courant d'une telle aile est

$$\alpha_i=A_1=\frac{C_y}{\pi\lambda}, \qquad \text{(XII.165)}$$

c'est-à-dire il est constant en tous les points le long de son envergure. Cela signifie que la vitesse induite

$$v_i=v_\infty\alpha_i=v_\infty\frac{C_y}{\pi\lambda} \qquad \text{(XII.166)}$$

est également constante dans toutes les sections de l'aile optimale. Cette constance de la vitesse induite le long de l'envergure représente une particularité caractéristique importante des ailes à résistance induite minimale.

On trouvera la loi de distribution de la circulation le long de l'envergure d'une telle aile en posant dans (XII.152) $A_n = 0$ avec $n \neq 1$,

$$\Gamma=2lv_\infty A_1\sin\theta. \qquad \text{(XII.167)}$$

Si l'on tient compte de (XII.151) on peut écrire que

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2z}{l}\right)^2}. \qquad \text{(XII.168)}$$

En désignant $\Gamma_0 = 2lv_\infty A_1$ et en substituant cette valeur dans (XII.167), nous trouvons

$$\Gamma=\Gamma_0\sqrt{1-\left(\frac{2z}{l}\right)^2}. \qquad \text{(XII.169)}$$

Cette relation témoigne de ce que la circulation le long de l'envergure de l'aile considérée est répartie symétriquement suivant la loi elliptique avec la valeur maximale

$$\Gamma_0 = \frac{2lv_\infty C_y}{\pi\lambda}$$

atteinte pour $z = 0$, c'est-à-dire au milieu de l'envergure.

Pour trouver la forme d'aile en plan telle qui assure le minimum de traînée induite, écrivons l'expression de la portance de l'élément d'une telle aile dR_y, de longueur dz. A cet effet on utilisera aussi bien la formule générale de la théorie de la similitude que le théorème de Joukovski

$$dR_y = C_y \frac{\rho v_\infty^2}{2} b\,dz = \rho v_\infty \Gamma\,dz.$$

En définitive on obtient l'équation de liaison de la circulation sur l'aile dans la section donnée avec le coefficient de portance du profil

$$\Gamma = C_y \frac{bv_\infty}{2}. \qquad \text{(XII.170)}$$

Cette équation est souvent utilisée dans la théorie des hélices et les différents mécanismes hydrauliques à aubes, lors du calcul de la circulation le long des aubes. Portons dans le premier membre l'expression (XII.167) de la circulation pour l'aile optimale et remplaçons dans le deuxième membre C_y par A_1 suivant (XII.165); finalement on obtient

$$2lv_\infty A_1 \sin\theta = \pi\lambda A_1 \frac{bv_\infty}{2}.$$

En effectuant la simplification et en remplaçant $\sin\theta$ suivant (XII.168), nous trouvons

$$b = b_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{l}\right)^2}, \qquad \text{(XII.171)}$$

où $b_0 = \frac{4}{\pi}\frac{l}{\lambda}$ est la corde, maximale pour l et λ donnés, de l'aile pour $z = 0$.

Il résulte de (XII.171) que l'aile optimale doit être en plan de forme elliptique. Et de plus, sur une aile géométriquement non vrillée la loi elliptique de distribution de la circulation le long de son envergure est vérifiée. Les ailes de formes elliptiques en plan sont employées pour réduire la traînée induite, en particulier on les utilise pour les pales des hélices de bateaux. Quant aux ailes d'autres formes en plan, la loi elliptique de distribution de la circulation est assurée par le vrillage de l'aile.

La théorie énoncée de l'aile d'envergure finie comme ligne portante permet d'établir le schéma de recalcul des caractéristiques

de l'aile de forme donnée en plan lorsqu'on passe d'une envergure à une autre. Un tel schéma peut être établi pour le domaine de la dépendance linéaire entre le coefficient de portance et l'angle d'incidence de l'aile, c'est-à-dire du domaine où est vraie la relation

$$C_y = \frac{dC_y}{d\alpha}(\alpha - \alpha_0) = \frac{dC_y}{d\alpha_1}\alpha_1.$$

Nous utilisons ici la condition suivant laquelle la valeur de l'angle de portance nulle α_0 ne dépend pas de l'allongement de l'aile λ, c'est-à-dire on peut considérer que pour tout allongement $d\alpha = d\alpha_1$. La valeur de la dérivée $dC_y/d\alpha_1$ dépend de l'envergure relative et pour λ donné se détermine de la condition

$$C_y = \pi\lambda A_{1\lambda} = \left(\frac{dC_y}{d\alpha_1}\right)_\lambda \alpha_1, \qquad \text{(XII.172)}$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{dC_y}{d\alpha_1}\right)_\lambda = \frac{\pi\lambda A_{1\lambda}}{\alpha_1}.$$

La comparaison de cette dernière formule avec les données des expériences montre que les valeurs expérimentales de cette dérivée constituent en moyenne 85-90 % de ses valeurs théoriques.

Comme il suit de la formule (XII.172), la même valeur de C_y pour les ailes d'envergure différente est obtenue avec différents angles d'incidence α_1.

La variation de l'angle d'incidence α_1 lorsqu'on passe de l'aile d'allongement λ_1 à l'aile d'allongement λ_2 ($\lambda_2 < \lambda_1$) pour une valeur constante $\alpha_{i\,\text{moy}}$ est conditionnée par la variation de l'angle de déflexion du courant de l'aile d'envergure moyenne, la différence des angles d'incidence étant égale à la différence des angles moyens de déflexion du courant

$$\alpha_{1\lambda_2} - \alpha_{1\lambda_1} = \alpha_{i\,\text{moy}\,\lambda_2} - \alpha_{i\,\text{moy}\,\lambda_1}.$$

Pour une aile elliptique en plan, l'angle de déflexion α_i est constant d'après son envergure, par conséquent $\alpha_{i\,\text{ell}} = \alpha_{i\,\text{moy ell}}$ et se détermine en radians par la formule (XII.165). Dans ce cas

$$\alpha_{1\lambda_2} - \alpha_{1\lambda_1} = \frac{C_y}{\pi\lambda_2} - \frac{C_y}{\pi\lambda_1} = \frac{C_y}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right). \qquad \text{(XII.173)}$$

Pour les ailes qui diffèrent en plan de la forme elliptique, l'angle de déflexion moyen d'après l'envergure différera de l'angle de déflexion de l'aile elliptique

$$\alpha_{1\,\text{moy}} = \alpha_{i\,\text{ell}}(1+\tau). \qquad \text{(XII.174)}$$

Les valeurs des coefficients $1 + \tau$ s'obtiennent par calcul théorique de la répartition des angles de déflexion induits du courant pour

les différentes ailes en plan. En utilisant la relation (XII.174), on peut écrire la différence entre les angles d'incidence des ailes non elliptiques en plan d'envergure finie sous la forme

$$\alpha_{i\lambda_2} - \alpha_{i\lambda_1} = \frac{C_y}{\pi\lambda_2}(1+\tau_2) - \frac{C_y}{\pi\lambda_1}(1+\tau_1) = $$
$$= \frac{C_y}{\pi}\left(\frac{1+\tau_2}{\lambda_2} - \frac{1+\tau_1}{\lambda_1}\right). \qquad \text{(XII.175)}$$

Pour une valeur donnée de C_y on peut calculer les corrections à la valeur du coefficient de traînée de l'aile de forme donnée en plan en passant d'allongement λ_1 à celui λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) d'après la formule (XII.162). Pour cela on doit tenir compte de ce que, suivant les données expérimentales, le coefficient de la résistance visqueuse ne dépend pas de λ

$$C_{x\lambda_2} - C_{x\lambda_1} = C_{i\lambda_2} - C_{i\lambda_1};$$

par conséquent,

$$C_{x\lambda_2} - C_{x\lambda_1} = \frac{C_y^2}{\pi\lambda_2}(1+\delta_2) - \frac{C_y^2}{\pi\lambda_1}(1+\delta_1) = $$
$$= \frac{C_y^2}{\pi}\left(\frac{1+\delta_2}{\lambda_2} - \frac{1+\delta_1}{\lambda_1}\right). \qquad \text{(XII.176)}$$

Dans le cas d'une aile elliptique en plan $\delta = 0$, c'est-à-dire

$$C_{x\lambda_2} - C_{x\lambda_1} = \frac{C_y^2}{\pi\lambda}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right). \qquad \text{(XII.177)}$$

A l'aide des formules (XII.175) et (XII.176), on peut refaire les calculs des caractéristiques hydrodynamiques des ailes si l'on passe d'un allongement à l'autre. Ceci permet lors des études expérimentales des ailes de se limiter à une seule valeur quelconque de λ et d'obtenir les valeurs de C_x et C_y pour d'autres allongements par le calcul au moyen des formules données.

Les valeurs des corrections δ et τ figurant dans ces formules dépendent de la forme de l'aile en plan et de l'allongement λ. Par exemple pour les ailes rectangulaires en plan, les valeurs de ces correctifs sont

λ	3	6	8	11
τ	0,10	0,17	0,20	0,26
δ	0,02	0,05	0,06	0,08

La petite valeur de ces corrections permet parfois, en calculant les caractéristiques, d'utiliser aussi les formules (XII.173) et (XII.177) pour les ailes qui diffèrent des ailes elliptiques. La comparaison des résultats de calcul des caractéristiques des ailes obtenus

à l'aide de ces formules pour diverses envergures avec les données expérimentales témoigne de leur bonne coïncidence dans la gamme des variations $\lambda \geqslant 2$. Avec des valeurs $\lambda < 2$, on observe des déviations qui augmentent à mesure que l'allongement diminue. Ceci est dû à l'exactitude insuffisante de la théorie basée sur le schéma de la ligne portante lors du passage aux ailes de faible allongement.

Les observations de l'écoulement autour de l'aile d'envergure finie montrent qu'à une certaine distance derrière une telle aile la nappe tourbillonnaire continue des tourbillons libres se transforme en formant deux tourbillons marginaux avec le sens contraire de circulation. Cependant cette non-conformité de la structure de l'écoulement à la structure supposée lors de l'élaboration de la théorie de la ligne portante n'impose pas la nécessité d'introduire des corrections supplémentaires dans les formules de calcul obtenues ci-dessus.

§ 86. THÉORIE LINÉAIRE D'UNE AILE DE FAIBLE ENVERGURE

Le problème des ailes de faible allongement revêt une importance toute particulière pour l'hydrodynamique du navire. Conformément à un gouvernail de bateau, l'allongement sera égal au rapport de la hauteur du gouvernail à sa largeur. Si l'on considère le corps d'un bateau comme une aile avec un angle d'incidence égal à l'angle de dérive, alors pour de faibles nombres de Froude, on entendra par envergure le tirant d'eau double du bateau et par corde, sa longueur suivant la ligne de flottaison réelle. L'allongement du corps du navire considéré comme une aile est très faible. Il ne constitue en tout que $\lambda = 0{,}03 \div 0{,}20$.

De cette façon, dans l'étude de la manœuvrabilité d'un navire un intérêt particulier revient aux caractéristiques des ailes d'allongement de l'ordre de 1-2 et d'allongement proche de zéro. Les premières sont dites ailes à allongement réduit et les secondes ailes d'allongement minimal.

Plus haut il a été montré que dans la théorie de l'aile d'envergure finie le rôle dominant revient à la distribution de la circulation le long de l'envergure. Dans la théorie de l'aile d'allongement réduit le rôle essentiel est dû non seulement à la distribution de la circulation le long de l'envergure, mais aussi le long de la corde. Enfin, dans le cas des allongements minimaux, le rôle principal revient à la distribution de la circulation le long de la corde.

Par raison de l'importance de la distribution de la circulation le long de la corde, nous disposerons les tourbillons attachés sur toute la surface de l'aile, c'est-à-dire nous utiliserons le schéma de l'aile d'envergure finie sous forme d'une surface portante. Suivant les prémisses générales de la théorie linéaire, nous disposerons

les tourbillons libres dans le plan de l'aile, ce qui équivaut à supposer l'égalité de l'angle de déflexion des tourbillons libres à l'angle d'incidence.

On peut déterminer dans le cas général la loi de la distribution des tourbillons attachés sur la surface portante de l'aile seulement par des méthodes numériques. La première solution numérique de ce problème a été obtenue par K. Wieghardt [23] sur la base du remplacement de l'aile, divisée le long de l'envergure en tranches par un système de lignes portantes tourbillonnaires discrètes, avec une détermination ultérieure de leurs circulations par résolution d'un système d'équations algébriques.

La méthode la plus générale de la solution numérique est celle des tourbillons en fer à cheval proposée par Faulkner. Elle consiste dans le remplacement de la distribution continue de la densité des tourbillons cherchée par un système de singularités tourbillonnaires discrètes, dont chacune est donnée sous la forme d'un tourbillon attaché et de deux tourbillons marginaux (libres) à circulation constante. Par rapport à la circulation de ces tourbillons, on établit un système d'équations algébriques représentant la condition d'imperméabilité du point considéré de l'aile.

Fig. XII.29

Pour remplacer les tourbillons à densité répartie de façon continue par un nombre fini de tourbillons en fer à cheval discrets, on divise l'aile étudiée suivant la corde en M tranches égales avec des cordes b/M. La couche portante de chaque tranche est remplacée par une ligne portante correspondante. En partageant l'envergure de l'aile en $2N$ tranches égales, on divise les lignes portantes en segments de longueur égale, des extrémités desquels se détachent des tourbillons libres. Les lignes portantes se trouvent sur le quart de la corde de chaque tranche, c'est-à-dire à une distance $b/4M$ de son bord avant (fig. XII.29), et les lignes de calcul, sur lesquelles est satisfaite la condition aux limites de l'imperméabilité, se disposent au milieu des lignes portantes. On choisit les points de calcul sur le milieu des segments des lignes de calcul de n'importe quelle tranche.

Après une telle division, la couche tourbillonnaire de l'aile se trouve divisée en $n = 2MN$ tourbillons en fer à cheval (sur la fig. XII.29 $M = 4$, $N = 8$).

La disposition des tourbillons et des points de calcul, dans lesquels les conditions aux limites sont observées, doit se faire en partant des considérations suivantes. Premièrement, dans chaque section de l'aile, parallèle à la grande corde, c'est-à-dire se trouvant dans le plan des coordonnées yox, doit être observé le postulat de Tchaplyguine-Joukovski. Cela signifie qu'avec $M \to \infty$, les vitesses induites sur les bords de fuite des sections doivent être limitées. Deuxièmement, les sommes par lesquelles on remplace les intégrales lorsqu'on passe de la couche tourbillonnaire distribuée de façon continue aux tourbillons en fer à cheval avec $M \to \infty$ et $N \to \infty$ doivent correspondre aux valeurs principales des intégrales de Cauchy, puisque ces intégrales sont impropres. On peut montrer que les deux conditions seront satisfaites si l'on choisit les tourbillons attachés et les points de calcul suivant ce qui a été énoncé ci-dessus.

Le choix des points en lesquels doit être satisfaite la condition aux limites, c'est-à-dire la nullité de la composante normale de la vitesse, peut être dans un certain degré justifié par des considérations suivantes. Examinons une plaque d'envergure infinie et déterminons le point de la corde en lequel sera satisfaite la condition aux limites lors du remplacement de la surface tourbillonnaire par un tourbillon attaché discret, disposé suivant (XII.97) à 1/4 de la corde du bord avant.

La circulation autour d'une plaque mince d'allongement infini ayant une corde $b = 2a$, selon (XII.85) avec $\sin \alpha \approx \alpha$

$$\Gamma = -\pi b \alpha v_\infty.$$

La condition aux limites de l'imperméabilité sera observée en un point distant de x du centre de poussée (placé à 1/4 de la corde du bord avant), si

$$\frac{\Gamma}{2\pi x} = v_\infty \alpha,$$

d'où

$$x = \frac{\Gamma}{2\pi \alpha v_\infty} = \frac{b}{2}.$$

Autrement dit, la condition aux limites sera satisfaite au point qui se trouve à une distance de la moitié de la corde du centre de poussée et du 3/4 de la corde à partir du bord d'attaque.

La quantité minimale de tranches et de bandes, nécessaire au modelage de l'aile à l'aide des tourbillons en fer à cheval discrets, dépend tout d'abord de l'allongement de l'aile et des caractéristiques hydrodynamiques cherchées. Il est naturel que l'aile de grand allongement doit être modelée par un grand nombre de bandes et par un nombre relativement faible de tranches. Par contre, l'aile de faible allongement doit être modelée par un grand nombre de tranches avec un nombre relativement faible de bandes. Pour les ailes

avec des allongements $1 \leqslant \lambda \leqslant 5$, on considère suffisant $M = 5$ et $N = 12$. Certaines caractéristiques hydrodynamiques, comme par exemple le coefficient C_n de la force normale de l'aile se déplaçant avec un angle d'incidence constant, dépendent peu du nombre de tranches adopté dans le schéma de calcul pour différents allongements de l'aile. Les autres caractéristiques hydrodynamiques, comme par exemple le coefficient du moment longitudinal m_z de l'aile, exigent toujours un grand nombre de tranches.

Ainsi, en chaque point calculé, indiqué sur la fig. XII.29 par une croix, il faut satisfaire à la condition aux limites de l'imperméabilité

$$v_n + v_{in} = 0, \qquad \text{(XII.178)}$$

où v_n, v_{in} sont les composantes normales respectivement de la vitesse relative du fluide et de la vitesse induite par le système tourbillonnaire.

La composante normale de la vitesse induite au j-ième point calculé, c'est-à-dire au point où est satisfaite la condition aux limites, peut avoir trois composantes (si l'aile n'est pas plane).

Nous ne considérerons que la composante suivant l'axe oy, égale à

$$\sum_{i=0}^{n} v_{yij},$$

où v_{yij} sont les composantes de la vitesse induites par l'i-ième tourbillon en fer à cheval au point de calcul j de coordonnées x_j, y_j; n est le nombre de tourbillons en fer à cheval.

Introduisons la vitesse sans dimensions $\bar{v}_{yij}$, alors

$$v_{yij} = \frac{v_\infty \Gamma_i^*}{2\pi} \bar{v}_{yij},$$

où v_∞ est la vitesse de translation du mouvement de l'aile; Γ_i^* la circulation permanente sans dimensions du tourbillon; $\bar{v}_{yij}$ la vitesse sans dimensions induite par le tourbillon en fer à cheval avec une circulation $\Gamma = 1$.

En introduisant les coordonnées sans dimensions du point j par rapport au milieu du tourbillon attaché dans chaque tourbillon en fer à cheval

$$\xi_j = \frac{2x_j}{m} \quad \text{et} \quad \zeta_j = \frac{2z_j}{m},$$

où $m = l/2N$ est la longueur du tourbillon attaché, on peut d'après la formule de Biot-Savart (VII.15) calculer $\bar{v}_{yij}$

$$\bar{v}_{yij} = \bar{v}_{y\,\mathrm{at}}(\xi_j, \zeta_j) + \bar{v}_{y\,\mathrm{lib}}(\xi_j, \zeta_j) =$$
$$= -\frac{1}{\xi_j}\left[\frac{1-\zeta_j}{\sqrt{\xi_j^2 + (1-\zeta_j)^2}} + \frac{1+\zeta_j}{\sqrt{\xi_j^2 + (1+\zeta_j)^2}}\right] -$$

$$-\frac{1+\zeta_j}{(1+\zeta_j)^2}\left[1+\frac{\xi_j}{\sqrt{\xi_j^2+(1+\zeta_j)^2}}\right]-$$
$$-\frac{1}{(1+\zeta_j)^2}\left[1+\frac{\xi_j}{\sqrt{\xi_j^2+(1+\zeta_j)^2}}\right].$$

Les valeurs $\bar{v}_y = f(\xi, \zeta)$ sont calculées et peuvent être déterminées au moyen des graphiques (fig. XII.30), selon les coordonnées connues ξ et ζ du point calculé donné.

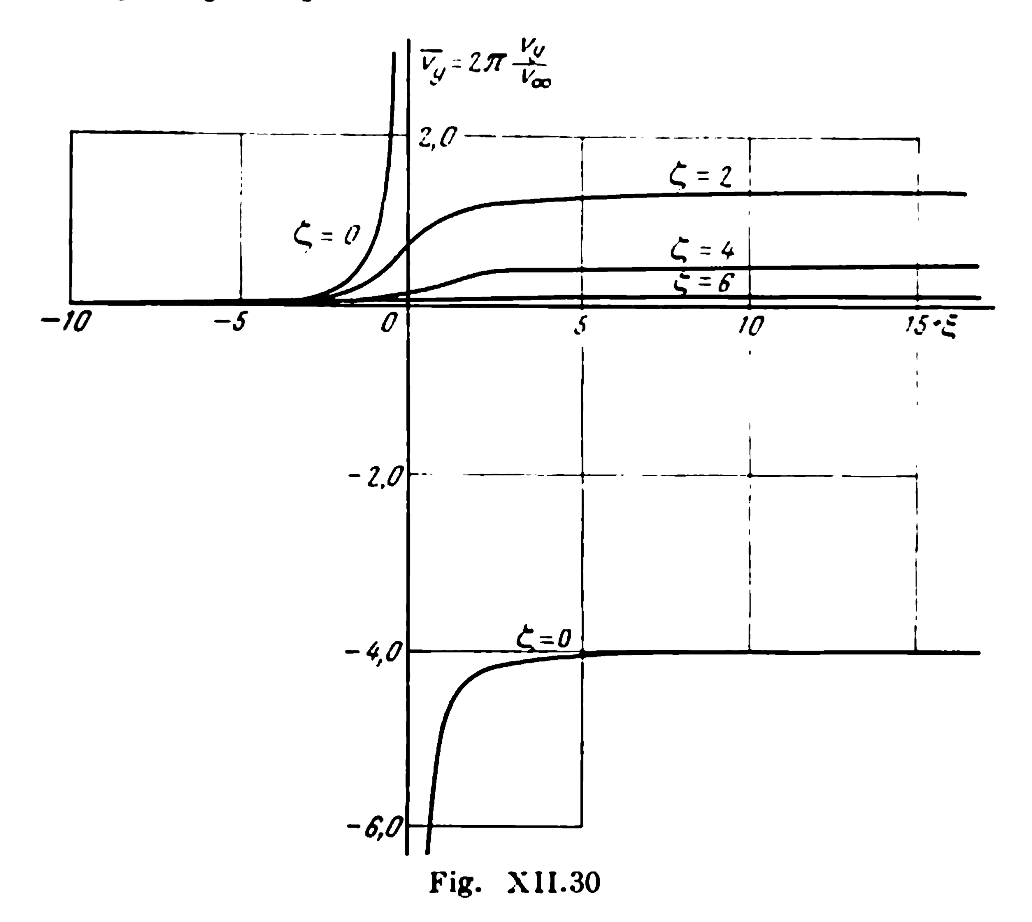


Fig. XII.30

En sommant les vitesses v_y imposées par n tourbillons en fer à cheval et en les égalisant à la composante respective de la vitesse à l'infini, nous obtenons l'équation

$$\frac{v_\infty}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i^*\bar{v}_{yij}+v_{nj}=0, \qquad \text{(XII.179)}$$

dans laquelle s'introduiront sous la forme de valeurs inconnues les valeurs n des circulations permanentes sans dimensions des tourbillons du système Γ_i^*. Il est évident que l'on peut composer n telles équations en écrivant la condition d'imperméabilité pour chaque point calculé j.

Ce système se résout par la méthode de Gauss (méthode d'élimination). Mais il est plus efficace d'utiliser des ordinateurs rapides pour lesquels on obtient par la méthode énoncée un programme de calculs suffisamment simple.

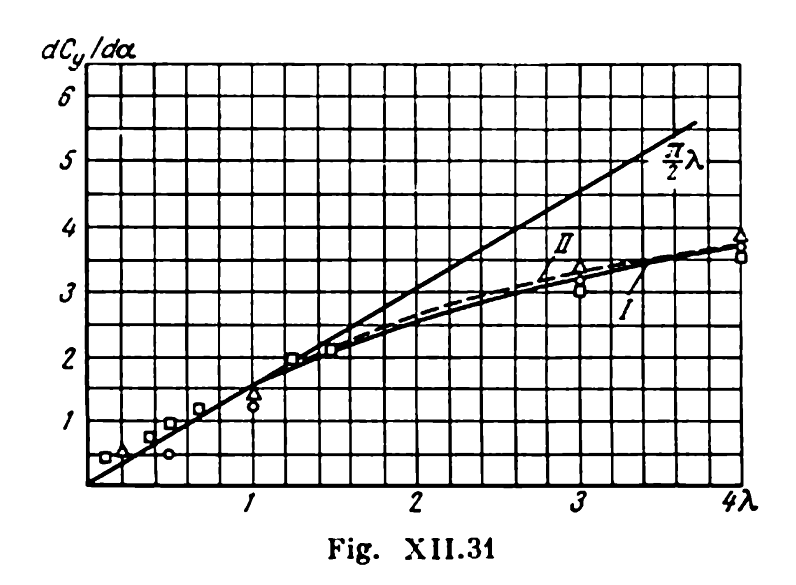


Fig. XII.31

Les valeurs trouvées de Γ_i^* permettent de déterminer les valeurs des dimensions de la circulation Γ_i sur les tranches

$$\Gamma_i = v_\infty m \Gamma_i^*,$$

et suivant le théorème de Joukovski, la portance de l'élément de surface tourbillonnaire

$$R_{yi} = \rho v_{xi} m \Gamma_i.$$

où R_{yi} est la portance de l'i-ème tourbillon élémentaire attaché; v_{xi} la composante longitudinale de la vitesse du fluide à l'endroit de la disposition du tourbillon élémentaire attaché.

La portance de toute l'aile

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} R_{yi}.$$

En multipliant R_{yi} par le bras de levier correspondant et en sommant ces produits, on peut obtenir le moment de la portance de l'aile par rapport à l'axe choisi.

Actuellement on possède un grand nombre de valeurs des coefficients de portance et du moment des ailes de faible allongement calculées théoriquement et obtenues par la méthode décrite ainsi que par d'autres méthodes de calcul. Etant donné que les dépendances des coefficients C_y et m_z de l'angle d'incidence selon la théorie qui est à la base de ces méthodes sont linéaires, on adopte généralement pour les caractéristiques hydrodynamiques des ailes

les coefficients angulaires des droites $C_y = f(\alpha)$ et $m_z = f(\alpha)$. Ces coefficients angulaires représentent les dérivées de la portance et du moment d'après l'angle d'incidence.

Sur la fig. XII.31 on donne les valeurs, calculées suivant la théorie linéaire (courbe *I*), de la dérivée de la portance $dC_y/d\alpha$

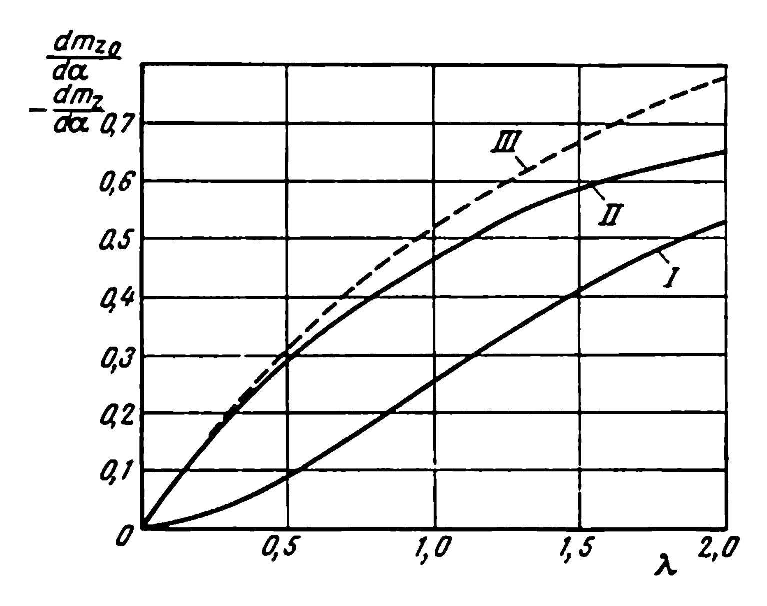


Fig. XII.32

d'une aile mince rectangulaire en fonction de l'allongement avec les points expérimentaux. Pour la courbe $dC_y/d\alpha = f(\lambda)$ on peut proposer une formule empirique (courbe *II*)

$$\frac{dC_y}{d\alpha} = \frac{2\pi\lambda}{\sqrt{\lambda^2+4}+2}. \tag{XII.180}$$

Sur la fig. XII.32 sont indiquées les courbes de la dépendance de la dérivée du coefficient du moment $dm_z/d\alpha$ par rapport aux bords avant (courbe *I*) et $dm_{z_0}/d\alpha$ par rapport au milieu des cordes (courbe *II*) de la valeur λ. Sur cette même figure sont indiqués les résultats des calculs (courbe *III*) $dm_{z_0}/d\alpha$ par rapport au milieu de la corde d'après la formule empirique

$$\frac{dm_{z_0}}{d\alpha} = \frac{\pi}{2\left(1+\frac{2}{\lambda}\right)}.$$

Comme on le voit, une coïncidence suffisante des résultats des calculs effectués d'après cette formule avec le calcul exact a lieu seulement pour $\lambda < 0{,}5$.

S. Biélotserkovski [2] a étendu la méthode des tourbillons en fer à cheval au mouvement variable.

Considérons le cas particulier du mouvement de l'aile suivant une trajectoire circulaire avec un angle d'incidence nul au milieu de l'aile. Ce mouvement correspond à l'oscillation harmonique de l'aile par rapport à l'angle d'incidence nul avec le nombre de Strouhal tendant vers zéro.

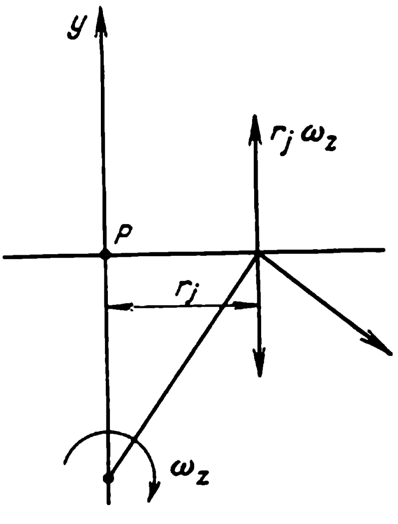


Fig. XII.33

Si dans le mouvement de translation de l'aile avec un angle d'incidence α l'équation (XII.179) s'écrit pour n'importe quel point calculé de la façon suivante :

$$\frac{v_\infty}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\bar{v}_{yij}=-v_\infty\sin\alpha\approx -v_\infty\alpha,$$

alors pour le mouvement de l'aile suivant une trajectoire circulaire avec un angle d'incidence nul, la vitesse v_{nj} dépendra de la distance du point calculé j au pôle P près duquel l'angle d'incidence local est nul (fig. XII.33). En désignant cette distance par r_j et la vitesse angulaire par ω_z nous obtenons la vitesse $v_{nj} = r_j\omega_z$. Par conséquent, l'équation (XII.179) pourra s'écrire sous la forme suivante

$$\frac{v_\infty}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\bar{v}_{yij}=-r_j\omega_z.$$

§ 87. THÉORIES NON LINÉAIRES DE L'AILE DE FAIBLE ALLONGEMENT

Les valeurs de la portance et du moment longitudinal de l'aile de faible allongement, obtenues suivant la théorie linéaire de l'aile comme surface portante, diffèrent sensiblement de celles obtenues par l'expérience. Comme il résulte de la fig. XII.34,*a* et *b*, où sont indiquées les courbes C_y (α) pour les ailes rectangulaires minces avec un allongement λ = 1,0 et λ = 0,35, le coefficient de portance de l'aile de faible allongement est une fonction non linéaire de l'angle d'incidence. Les dépendances analogues pour le coefficient du moment par rapport au bord avant de l'aile (fig. XII.35,*a* et *b*) montrent que la non-linéarité du moment est beaucoup plus importante que la non-linéarité de la portance. Par suite, avec l'augmentation de l'angle d'incidence de l'aile de faible allongement la position du centre de poussée change brusquement.

D'après la théorie linéaire, les résultats de calcul représentés sur la fig. XII.34 et XII.35 sous la forme de droites en pointillé étant obtenus d'après cette théorie, la position du centre de poussée

sur l'aile ne doit pas dépendre de l'angle d'incidence. Cependant, en réalité avec l'augmentation de l'angle d'incidence le centre de

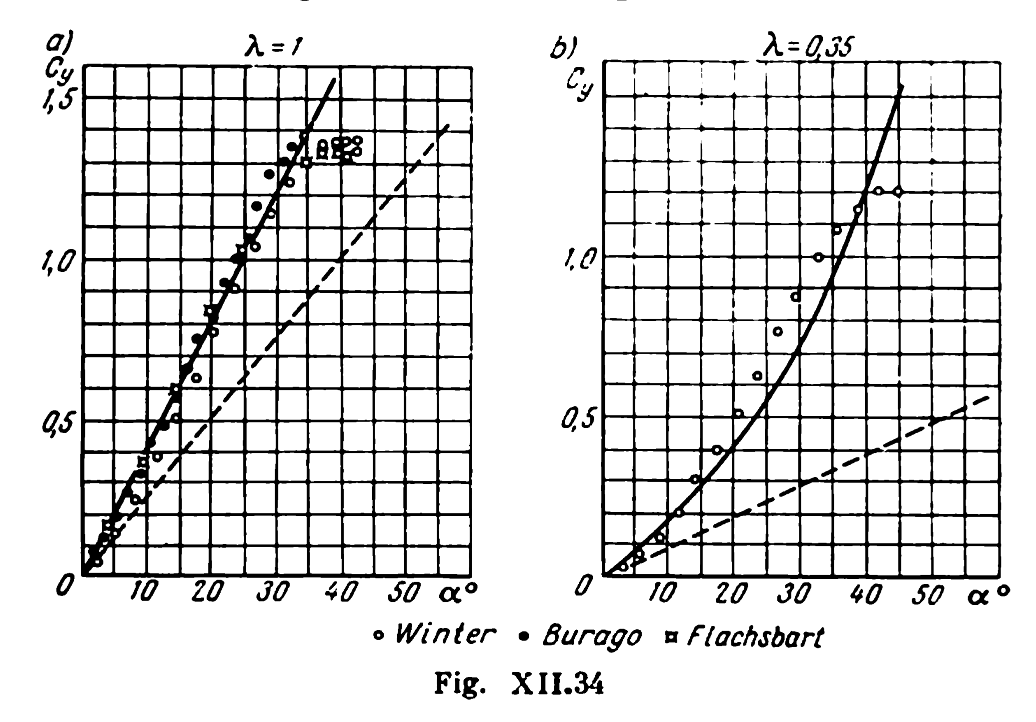


Fig. XII.34

poussée se déplace vers le bord de fuite. Il résulte de la comparaison des coefficients C_y et m_z qui se rapportent aux ailes de différents

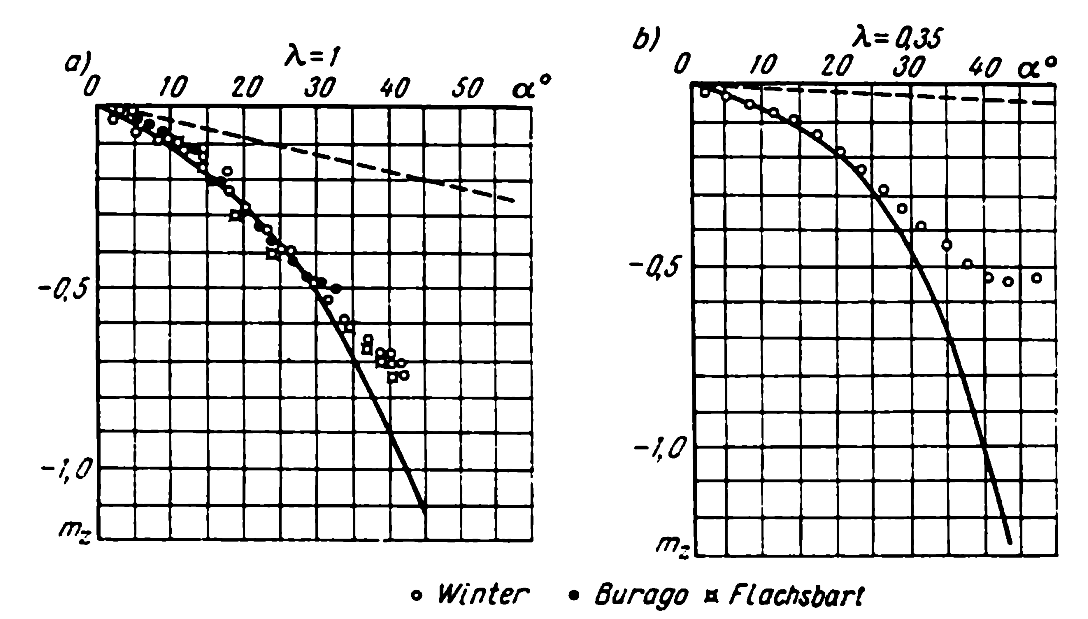


Fig. XII.35

allongements qu'avec la diminution de l'allongement la différence entre les données de la théorie linéaire et les données expérimentales augmente, la non-linéarité des courbes C_y et m_z s'accroît.

La théorie non linéaire de l'aile d'envergure finie a été créée par Tchaplyguine sur la base du schéma d'un tourbillon en fer à cheval proposé par lui en 1910-1913. A la théorie de l'aile de faible allongement sont consacrés plusieurs ouvrages de V. Goloubev [6] qui a élaboré dans cette théorie une direction originale, basée sur la prise en compte de l'écoulement autour des bords latéraux lequel se décrit en faisant appel à la notion de la circulation transversale.

On sait qu'en première approximation on peut considérer la circulation même autour d'une plaque carrée comme étant invariable le long de son envergure. Cela facilite la construction de la théorie non linéaire.

Dans la théorie non linéaire de l'aile de faible allongement il existe trois directions: la première est celle qui utilise la méthode

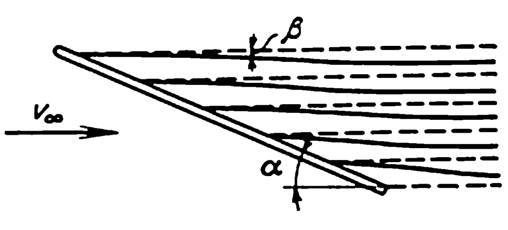


Fig. XII.36

de la théorie du potentiel[1]; la deuxième est basée sur le remplacement de l'aile par un système de tourbillons d'envergure finie avec une certaine densité de leur distribution inconnue; la troisième est basée sur le schéma de l'écoulement avec circulation et décollement. La théorie de l'écoulement avec circulation et décollement occupe une place particulière car elle représente un schéma semi-empirique de la prise en compte de la non-linéarité.

Dans les théories de la deuxième direction, pour obtenir la non-linéarité des caractéristiques de l'aile, on part de ce que les tourbillons libres qui se détachent de l'aile ne restent pas dans son plan, mais forment avec celui-ci un certain angle, généralement parlant, variable suivant la corde. Comme le montrent de nombreuses expériences, la déviation des tourbillons libres β sur les ailes de faible allongement (fig. XII.36) pour des angles d'incidence sensibles, due à l'interaction des tourbillons libres, n'est pas si importante pour qu'on puisse considérer les tourbillons libres comme disposés dans le plan de l'aile. Pour cette raison il faut tenir compte de l'angle de blocage des tourbillons libres $\alpha - \beta$, variable suivant la corde; ceci complique sensiblement la théorie, puisque parmi les facteurs inconnus, outre la distribution de la circulation sur l'aile, il y a aussi les angles de déflexion des tourbillons libres. Ces angles ne

[1] Les théories de cette direction ont été créées par N. Kotchine et autres chercheurs.

peuvent s'obtenir qu'après la détermination de la densité des tourbillons. De cette façon, le problème ne peut être résolu que par la méthode des approximations successives.

Pour simplifier la résolution, plusieurs auteurs ont eu recours à certaines relations entre l'angle de déflexion des tourbillons libres β et l'angle d'incidence α. Ainsi, par exemple, dans la théorie proposée par G. Burago en 1944 on recommande de compter $\beta = 1/2\alpha$ et, par conséquent, l'angle de blocage

$$\alpha - \beta = \frac{1}{2}\alpha.$$

Dans les travaux de V. Goloubev ainsi que dans ceux de N. Poliakhov et A. Pastoukhov [23] on propose de prendre l'angle de déflexion des tourbillons libres $\beta = 0$ et, par conséquent, l'angle de blocage

$$\alpha - \beta = \alpha.$$

Les recommandations de Burago se rapportent aux ailes d'allongement extrêmement petit, où les tourbillons attachés jouent un rôle tellement insignifiant que l'angle de déflexion des tourbillons libres n'apparaît qu'à la suite de l'interaction des tourbillons libres.

Quant à la proposition de considérer l'angle de blocage comme étant approximativement égal à l'angle d'incidence, elle est, par contre, valable probablement pour les ailes d'allongement $\lambda = 1 \div 2$.

Dans la théorie de Burago, la surface tourbillonnaire est remplacée par un seul tourbillon portant; la condition aux limites d'imperméabilité est respectée suivant la corde en moyenne. Respectivement on détermine non pas les angles de déflexion en des points déterminés, mais seulement leurs valeurs moyennes pour la section donnée de l'aile. Ceci permet d'obtenir la formule du coefficient de la force normale sous la forme

$$C_n = \frac{2{,}7\lambda\alpha + 2\alpha^2}{1 + \frac{2{,}7}{\left(\frac{dC_y}{d\alpha}\right)_{\lambda=\infty}}},$$

d'où avec $\lambda \to 0$

$$C_y \approx C_n = 2\alpha^2. \qquad \text{(XII.181)}$$

La formule (XII.181) fournit de bons résultats lorsqu'on l'utilise pour les ailes d'allongement minimal et, comme il sera montré plus loin, peut être obtenue en partant d'autres considérations.

La médiation de l'angle de déflexion suivant la corde, utilisée par Burago, ne permet pas d'obtenir les expressions des caractéristiques des moments de l'aile.

Comme on le sait de ce qui venait d'être dit, le centre de poussée des ailes de faible allongement se déplace du bord d'attaque vers le bord de fuite quand l'angle d'incidence augmente. Sur la fig. XII.37 est montrée la variation du coefficient du centre de poussée C_D en fonction de l'angle d'incidence pour une aile rectangulaire mince d'allongement $\lambda = 1$. Du graphique on voit que dans la gamme de l'angle d'incidence de 0 à 20°, avec l'augmentation de l'angle de

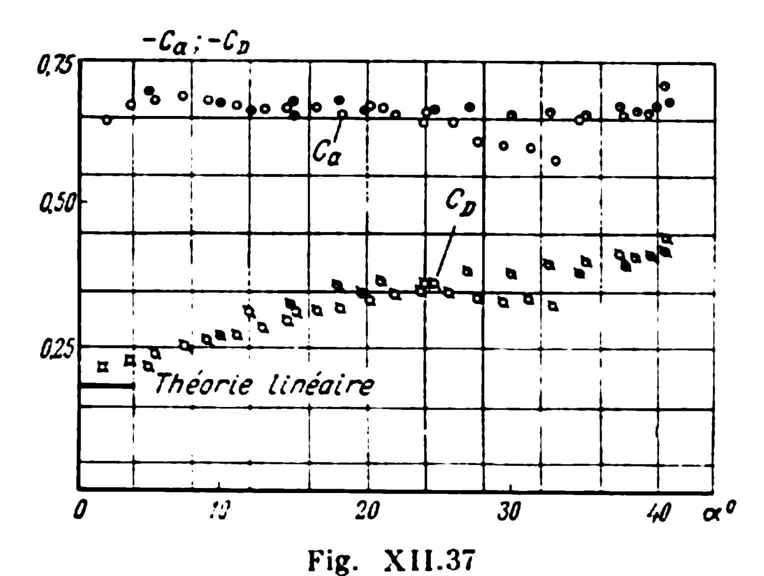


Fig. XII.37

1°, le centre de poussée se déplace d'environ à 1 % de la corde. On peut supposer qu'aucune théorie, qui ne tient pas compte du déplacement du centre de poussée avec la variation de l'angle d'incidence, ne peut assurer une coïncidence tant soit peu convenable avec l'expérience si on l'applique au calcul du coefficient de moment m_z.

Il est évident que pour bâtir une théorie qui ne s'appuie pas sur l'hypothèse de la constance du centre de poussée, il faut énoncer une hypothèse en principe nouvelle pour expliquer le déplacement du centre de poussée.

Si on retranche de la valeur déterminée expérimentalement du moment M_z le moment de nature d'inertie M_{zi}, c'est-à-dire le moment correspondant à l'écoulement potentiel sans circulation autour d'un corps, et on divise ensuite la différence par la force normale R_n, alors la coordonnée x_a du centre de poussée ainsi obtenue correspondra à un écoulement purement à circulation. Admettons le point avec une telle coordonnée comme centre du tourbillon attaché

$$x_a = \frac{M_z - M_{zi}}{R_n}.$$

Le coefficient sans dimensions du centre du tourbillon attaché sera

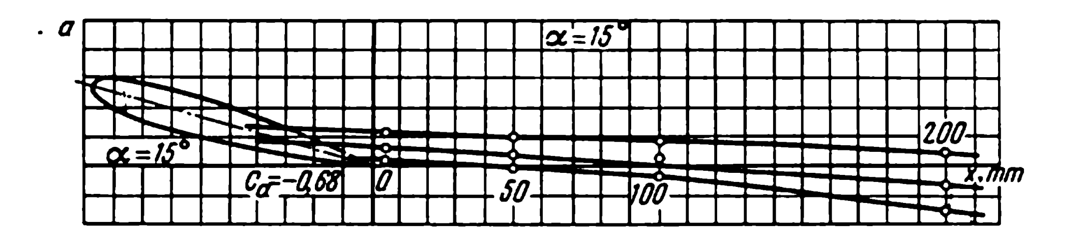
$$C_a = \frac{x_a}{b}.$$

Dans ces formules b est la corde de l'aile dans le plan xoy.

Comme on sait, en vertu de (VI.71)

$$M_{z1}=(k_{22}-k_{11})\frac{\rho v_\infty^2}{2}\sin 2\alpha,$$

où $k_{22}=\lambda_{22}/\rho$ et $k_{11}=\lambda_{11}/\rho$ sont des volumes de la masse virtuelle du fluide dans le cas du mouvement de l'aile respectivement dans les directions transversale et longitudinale.



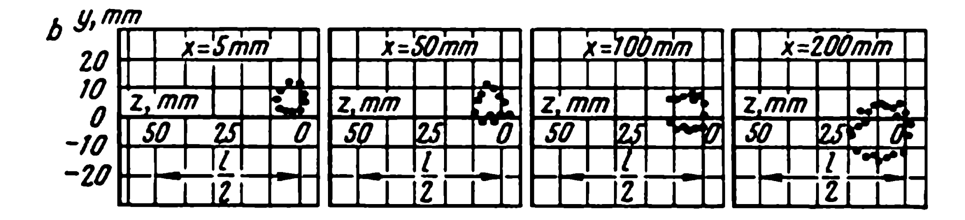


Fig. XII.38

Pour les profils d'ailes relativement minces, on peut poser $k_{11}\approx\approx 0$. Pour déterminer k_{22} pour les ailes de forme rectangulaire en plan, on peut utiliser les données expérimentales qui correspondent parfaitement à la formule de Pabst

$$k_{22}=\frac{\pi}{4}b^2l\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left(1-0,425\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

Finalement il se trouve possible de calculer la grandeur

$$C_a=C_{D\,\mathrm{exp}}-\frac{m_{z1}}{C_{n\,\mathrm{exp}}}. \qquad \text{(XII.182)}$$

Sur la fig. XII.37 sont montrées les données dépouillées relatives à tous les résultats publiés sur les expériences avec des plaques carrées ($\lambda=1$). Les valeurs du coefficient C_a, obtenues d'après ces données, témoignent de ce que, dans la gamme des angles d'incidence allant jusqu'à 40° le centre du tourbillon attaché se déplace sensiblement moins que le centre de poussée. La déduction concernant la stabilité relative du centre du tourbillon attaché est justifiée également lorsqu'on étudie l'écoulement derrière l'aile.

Dans ce but on a effectué une série d'expériences spéciales avec des ailes rectangulaires d'allongement 0,5; 1,0 et 1,5 et de profil NACA-0012.

Pour les angles d'incidence $\alpha = 5$, 10, 15, 20 et 25°, au moyen d'un moulinet proposé par E. Minski, on déterminait les régions de tourbillonnement dans les différentes sections derrière l'aile. La section la plus proche de l'aile était à une distance de 5 mm du bord de fuite de l'aile, c'est-à-dire à une distance de 5% de la corde, égale à 100 mm. Sur la fig. XII.38,*a* sont indiquées les frontières de la région de tourbillonnement suivant la verticale pour l'angle d'incidence $\alpha = 15°$ avec $\lambda = 1$. En extrapolant les courbes des milieux de la région de tourbillonnement verticalement jusqu'à l'intersection avec la corde de l'aile et en prenant cette intersection pour la position du tourbillon attaché, nous obtenons la valeur du coefficient C_a du tourbillon attaché, égale pour une aile carrée en moyenne à 0,68, ce qui s'accorde avec les données obtenues d'après la formule (XII.182). Sur la fig. XII.38,*b* sont montrés les contours des régions de tourbillonnement dans les différentes sections derrière l'aile avec $\lambda = 1$ pour $\alpha = 15°$. Le graphique montre que la nappe tourbillonnaire commence à s'enrouler en un tourbillon marginal déjà à une distance de 5 % de la corde derrière le bord de fuite.

Dans la théorie non linéaire approchée élaborée par K. Fédiaevski, on admet en tant que première hypothèse principale que la position du centre du tourbillon attaché pour la forme donnée de l'aile en plan ne dépend pas de l'angle d'incidence.

Déterminons la position du centre du tourbillon attaché, en utilisant les résultats de la théorie linéaire de l'aile à allongement réduit.

Sur la fig. XII.39 est montrée la répartition de la charge suivant les cordes d'une aile ronde en plan, calculée d'après la théorie linéaire et obtenue des expériences de Hansen. Comme il résulte des graphiques, pour un angle d'incidence égal à 4° la charge déterminée expérimentalement s'accorde suffisamment bien avec celle obtenue théoriquement pour les sections *I*, *II* et *III*. Néanmoins, dans la section *V* elle dépasse déjà la charge théorique, ce qui est dû à un courant secondaire allant de l'intrados vers l'extrados. Avec un angle d'incidence de 8°, la charge déterminée expérimentalement dans toutes les sections diffère sensiblement de celle théorique.

Ainsi, on peut considérer que les dérivées des coefficients de portance et du moment longitudinal suivant l'angle d'incidence, obtenues d'après la théorie linéaire, doivent être inférieures aux dérivées de ces mêmes coefficients obtenues par l'expérience, même pour un angle d'attaque nul. Quant à la position du centre de poussée, son détermination théorique fournit des valeurs quelque peu inférieures du numérateur et du dénominateur. Ceci laisse supposer que la valeur théorique du centre de poussée est proche de la valeur expérimentale avec l'angle d'attaque nul. L'hypothèse faite est justifiée par la fig. XII.37 d'où il ressort que le coefficient du centre de poussée, obtenu d'après la théorie linéaire pour une plaque carrée, correspond

bien au coefficient obtenu expérimentalement pour un angle d'incidence nul.

L'examen des charges dans la section d'emplanture, c'est-à-dire avec $z = 0$ (fig. XII.39), montre que la valeur de la dérivée du coefficient de portance dans cette section d'après la théorie linéaire doit être proche de celle obtenue expérimentalement pour un angle d'incidence nul. Pour cette raison, il paraît juste d'utiliser pour la détermination de la position du centre du tourbillon attaché les valeurs du

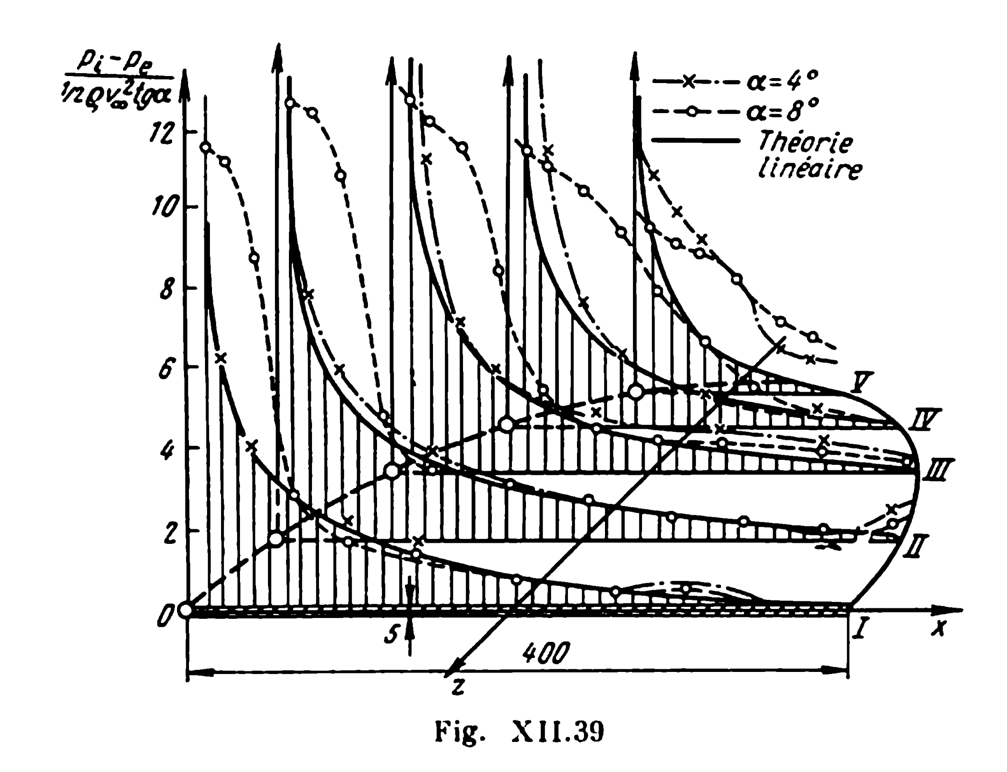


Fig. XII.39

coefficient du centre de poussée $C_{D\ \mathrm{t.l.}}$ et de la dérivée du coefficient de portance $dC_{y\mathrm{e}}/d\alpha$ dans la section d'emplanture, où $z = 0$, obtenues d'après la théorie linéaire.

En ouvrant l'indétermination dans le second membre de l'équation (XII.182), nous trouvons pour l'angle d'incidence nul

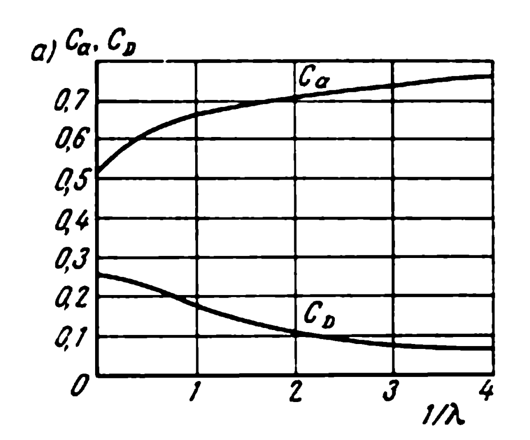
$$C_a = C_{D\ \mathrm{t.l.}} - \frac{\left(\frac{dm_{z1}}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}}{\left(\frac{dC_{ye}}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \frac{2rb}{S}},$$

où $2r$ est l'envergure du tourbillon attaché équivalent d'intensité constante.

La fig. XII.40 montre la variation, d'après la théorie linéaire, du coefficient du centre du tourbillon attaché et du coefficient du centre de poussée en fonction de l'allongement des ailes rectangulaires *a* et elliptiques *b*. Avec la diminution de l'allongement de l'aile,

le centre du tourbillon attaché se déplace vers le bord de fuite et le centre de poussée vers le bord avant.

En tant que deuxième hypothèse pour les ailes rectangulaire et elliptique en plan nous admettrons que l'envergure du tourbillon



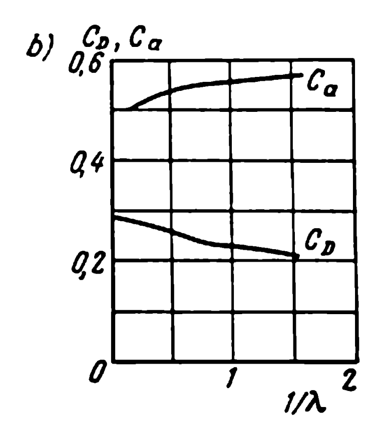


Fig. XII.40

attaché est égale à l'envergure géométrique moyenne de l'aile, c'est-à-dire

$$2r = \frac{S}{b}.$$

Les expériences effectuées en vue de déterminer la zone de tourbillonnement au voisinage des extrémités de l'aile vérifient cette hypothèse.

Nous considérerons ensuite que dans le plan de la symétrie de l'aile est justifié le postulat de Tchaplyguine-Joukovski relatif au détachement régulier des courants d'air sur le bord arrière du contour. Cette hypothèse signifie que la vitesse v_i, induite par le tourbillon attaché en U, est égale et de sens opposé à la composante normale de la vitesse à l'infini $v_\infty \sin \alpha$ (fig. XII.41) de sorte que

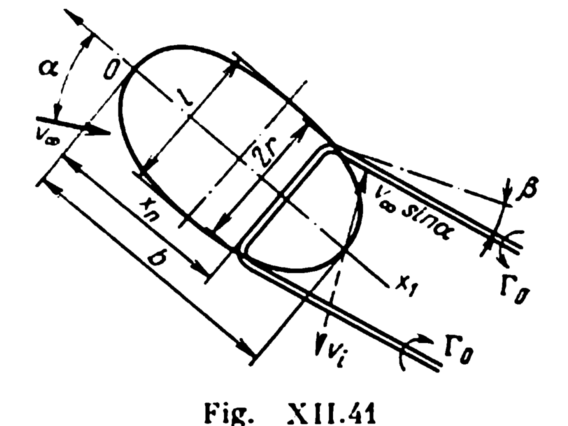


Fig. XII.41

$$v_i + v_\infty \sin \alpha = 0.$$

En déterminant au moyen de la formule de Biot-Savart les valeurs v_i au point arrière de l'aile, conditionnées par l'action d'un tourbillon attaché et de deux tourbillons marginaux semi-infinis, en sommant ensuite ces valeurs et en passant aux coefficients sans dimen-

sions, nous obtenons

$$v_i = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b}\left\{\frac{\bar{r}}{(1+C_a)\sqrt{(1+C_a)^2+\bar{r}^2}}+\frac{\bar{r}\cos(\alpha-\beta)}{(1+C_a)^2\sin(\alpha-\beta)+\bar{r}^2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[1+\frac{(1+C_a)\cos(\alpha-\beta)}{\sqrt{(1+C_a)^2+r^2}}\right]\right\}, \qquad \text{(XII.183)}$$

où $\bar{r} = r/b$ est la demi-envergure du tourbillon attaché, rapportée à la corde de la section moyenne.

En introduisant le coefficient d'intensité sans dimensions du tourbillon en U

$$C_{y0} = \frac{\Gamma_0}{\frac{1}{2}v_\infty b}$$

et en tenant compte que $v_i = -v_\infty \sin\alpha$, on trouve de l'expression (XII.183)

$$C_{y0} = \frac{4\pi\sin\alpha}{\frac{\bar{r}}{(1+C_a)\sqrt{(1+C_a)^2+\bar{r}^2}}+\frac{\bar{r}\cos(\alpha-\beta)}{(1+C_a)^2\sin^2(\alpha-\beta)+\bar{r}^2}\times\left[1+\frac{(1+C_a)\cos(\alpha-\beta)}{\sqrt{(1+C_a)^2+\bar{r}^2}}\right]}. \qquad \text{(XII.184)}$$

Pour déterminer l'angle de déflexion des tourbillons libres (fig. XII.42), notons qu'aux points de leur détachement, la composante verticale de la vitesse induite par un autre tourbillon libre sera $\frac{\Gamma_0}{8\pi r}\cos\beta$, et la composante horizontale $v_\infty - \frac{\Gamma_0}{8\pi r}\sin\beta$.

D'où

$$\beta \approx \operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{\Gamma_0\cos\beta}{8\pi r}}{v_\infty - \frac{\Gamma_0}{8\pi r}\sin\beta} \approx \frac{\frac{C_{y0}}{16\pi r}}{1-\frac{C_{y0}\beta}{16\pi r}}$$

ou

$$\beta \approx \frac{\Gamma_0}{8\pi r v_\infty} = \frac{C_{y0}}{16\pi\bar{r}}. \qquad \text{(XII.185)}$$

Le coefficient C_{y0} peut être déterminé graphiquement ou par la méthode des approximations successives. En approximation nulle C_{y0} se calcule d'après la formule (XII.184) avec $\beta = 0$. Ensuite il faut déterminer la valeur de l'angle β en première approximation, etc. Avec de très petits allongements, on peut admettre que les composantes des angles de déflexion des tourbillons libres, imprimées par ces tourbillons, jouent le rôle principal tandis que les déflexions dues aux tourbillons attachés sont négligeables. Dans ce cas l'angle

de déflexion des tourbillons libres dans la section de l'emplanture de l'aile doit être égal à l'angle d'incidence α, c'est-à-dire chacun des systèmes des tourbillons libres doit former l'angle de déflexion égal à $\alpha/2$. Aux extrémités de l'aile où se détachent des tourbillons libres, chaque système de tourbillons libres en agissant sur l'autre forme

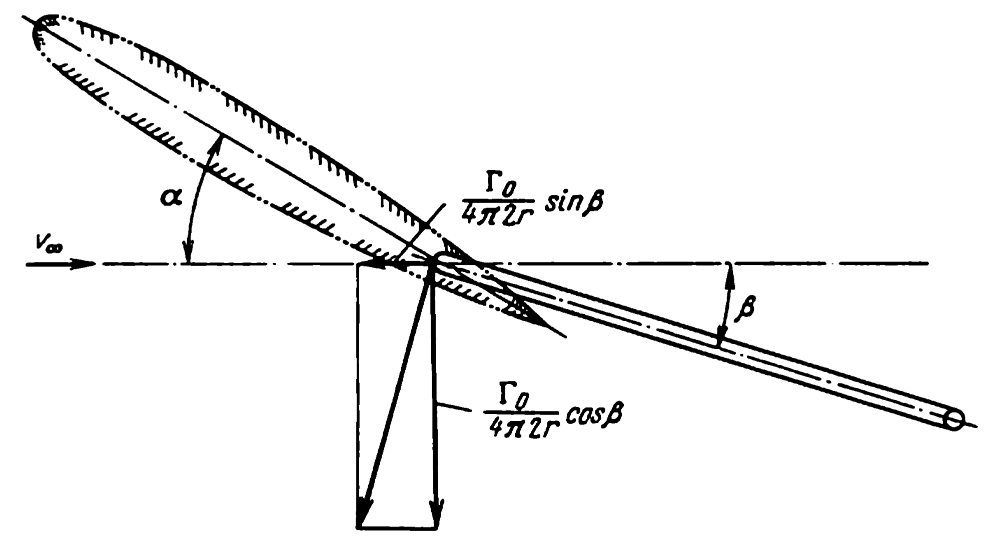


Fig. XII.42

l'angle de déflexion deux fois moindre, c'est-à-dire qu'à l'approximation d'ordre zéro on peut prendre

$$\beta \approx \frac{\alpha}{4}.$$

Pour déterminer la valeur de la force normale, utilisons le théorème de Joukovski

$$R_n = \rho\,[v_\infty \cos\alpha + v_{i\,\text{moy}} \sin(\alpha - \beta)]\,\Gamma_0 2r =$$
$$= \rho\,[v_\infty \cos\alpha + v_{i\,\text{moy}} \sin(\alpha - \beta)]\,C_{y0} b r v_\infty,$$

où

$$v_{i\,\text{moy}} \approx \frac{\Gamma_0}{\pi r} = \frac{C_{y0}}{2\pi}\,\frac{v_\infty}{\bar{r}}.$$

En passant au coefficient sans dimensions de la force normale, nous trouvons

$$C_n = C_{y0}\frac{2rb}{S}\left[\cos\alpha + \frac{C_{y0}}{2\pi\bar{r}}\sin(\alpha - \beta)\right]. \qquad \text{(XII.186)}$$

Pour les ailes minces, par suite du décollement de l'écoulement sur l'arête vive avant, la force d'aspiration n'apparaît pas; par suite, en projetant la force normale sur les axes des coordonnées on obtient les formules du coefficient de portance

$$C_y = C_n \cos\alpha \qquad \text{(XII.187)}$$

et de l'accroissement du coefficient de traînée dû à l'angle d'incidence

$$C_x - C_{x_{\alpha=0}} = C_n \sin\alpha. \qquad \text{(XII.188)}$$

Le coefficient de moment s'obtient comme la somme des coefficients des moments de nature tourbillonnaire et d'inertie

$$m_z = C_n C_a + \frac{k_{22}}{Sb}\sin 2\alpha. \qquad \text{(XII.189)}$$

Les résultats des calculs de la portance et du moment longitudinal pour une plaque rectangulaire avec $\lambda = 1$ et $\lambda = 0.35$. indiqués sur les fig. XII.34 et XII.35 par des lignes continues, assurent une bonne coïncidence avec l'expérience.

Elucidons les changements qu'il faut introduire dans la théorie approchée énoncée ci-dessus dans le cas du passage des plaques à des ailes épaisses d'allongement réduit.

Avant tout mettons en évidence l'influence qualitative de l'épaisseur de l'aile à allongement réduit sur sa force normale. Théoriquement on peut montrer qu'avec l'augmentation de l'épaisseur du profil le coefficient de la force normale C_n doit diminuer. En effet, l'expérience montre que la force normale des ailes épaisses ($\overline{t} = 12\text{-}20$ %) à allongement réduit est en moyenne de 15 % inférieure à la force normale des plaques pour la même forme en plan. Par suite, pour le calcul des ailes épaisses à allongement réduit nous admettrons

$$C_{n_{\overline{t}\neq 0}} = 0{,}85 C_n.$$

D'autre part, dans le cas des ailes épaisses il est indispensable de tenir compte de la force d'aspiration. Admettons que l'angle moyen de déflexion du courant pour l'aile est égal à la moitié de l'angle d'incidence. Si la force d'aspiration est complètement réalisée, c'est-à-dire si le vecteur de la force résultante hydrodynamique est dirigé perpendiculairement au vecteur de la vitesse en tenant compte de la déflexion du courant de l'aile, alors le coefficient de la force d'aspiration aura pour expression

$$C_{x\,\text{asp}} = C_{y_{\overline{t}\neq 0}} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0{,}85 C_n \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

En tenant compte de la projection de la force d'aspiration sur les axes des vitesses, nous obtiendrons les formules suivantes des coefficients de portance, de l'accroissement de la traînée et du moment longitudinal

$$C_y = C_{n_{\overline{t}\neq 0}} \cos\alpha + C_{x\,\text{asp}} \sin\alpha =$$

$$= 0{,}85 C_n \left(\cos\alpha + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\right); \qquad \text{(XII.190)}$$

$$C_x - C_{x_{\alpha=0}} = C_{n_{\overline{l \neq 0}}} \sin\alpha - C_{x\,\text{asp}} \cos\alpha =$$
$$= 0{,}85 C_n \left(\sin\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\right); \qquad \text{(XII.191)}$$

$$m_z = C_{n_{\overline{l \neq 0}}} C_{\text{a}} - \frac{k_{22} - k_{11}}{Sb} \sin 2\alpha \approx 0{,}85 C_n C_{\text{a}} + \frac{k_{22}}{Sb} \sin 2\alpha. \qquad \text{(XII.192)}$$

Sur la fig. XII.43,*a*, *b*, *c* sont indiquées les valeurs des coefficients des moments et des forces aérodynamiques d'une aile épaisse carrée $\lambda = 1{,}0$, calculées d'après les formules (XII.190)-(XII.192), ainsi que selon la théorie linéaire ; sur la même figure sont indiqués les points expérimentaux pour des ailes avec les profils Joukovski et NACA de différente épaisseur relative.

Ainsi que l'on voit d'après la figure, le calcul suivant la théorie approchée proposée assure une assez bonne coïncidence des valeurs théoriques des coefficients avec celles expérimentales jusqu'à des angles d'incidence proches de 30°.

Envisageons des théories plus simples relatives au mouvement de translation de l'aile, qui permettent de les étendre au cas de la rotation déterminée de l'aile suivant le cercle. A celles-ci se rapporte la théorie semi-empirique de l'écoulement à circulation et avec décollement. Elle explique la non-linéarité des caractéristiques hydrodynamiques par le fait que l'écoulement du fluide autour des bords latéraux de l'aile s'effectue avec décollement et provoque l'apparition d'une résistance. Cette résistance, dirigée suivant la normale à l'aile, crée une composante supplémentaire de la force normale, proportionnelle au carré du sinus de l'angle d'incidence. Betz a argumenté de la façon suivante la dépendance indiquée.

On peut négliger l'écoulement longitudinal autour d'une plaque rectangulaire dont la corde est très grande par rapport à l'envergure (théoriquement avec l'allongement tendant vers zéro) et considérer l'écoulement autour d'elle d'un courant transversal à deux dimensions avec une vitesse égale à la composante normale de la vitesse à l'infini (fig. XII.44). La force normale hydrodynamique, induite par l'écoulement transversal, s'écrira comme une force de la résistance induite par ce courant en écoulement avec décollement, c'est-à-dire

$$R_{n\,\text{rés}} = C_{x\,\text{pl}} \frac{\rho v_\infty^2}{2} \sin^2\alpha S, \qquad \text{(XII.193)}$$

où $C_{x\,\text{pl}}$ est le coefficient de résistance de la plaque en écoulement transversal autour d'elle.

Pour une aile avec un allongement tendant vers zéro, c'est-à-dire avec un rapport de la largeur de la plaque à la longueur tendant vers zéro, la valeur calculée théoriquement du coefficient de la résistance de la plaque à arêtes vives est $C_{x\,\text{pl}} = 2$. En réalité, il y a une certaine distribution des valeurs des coefficients $C_{x\,\text{pl}}$ suivant la

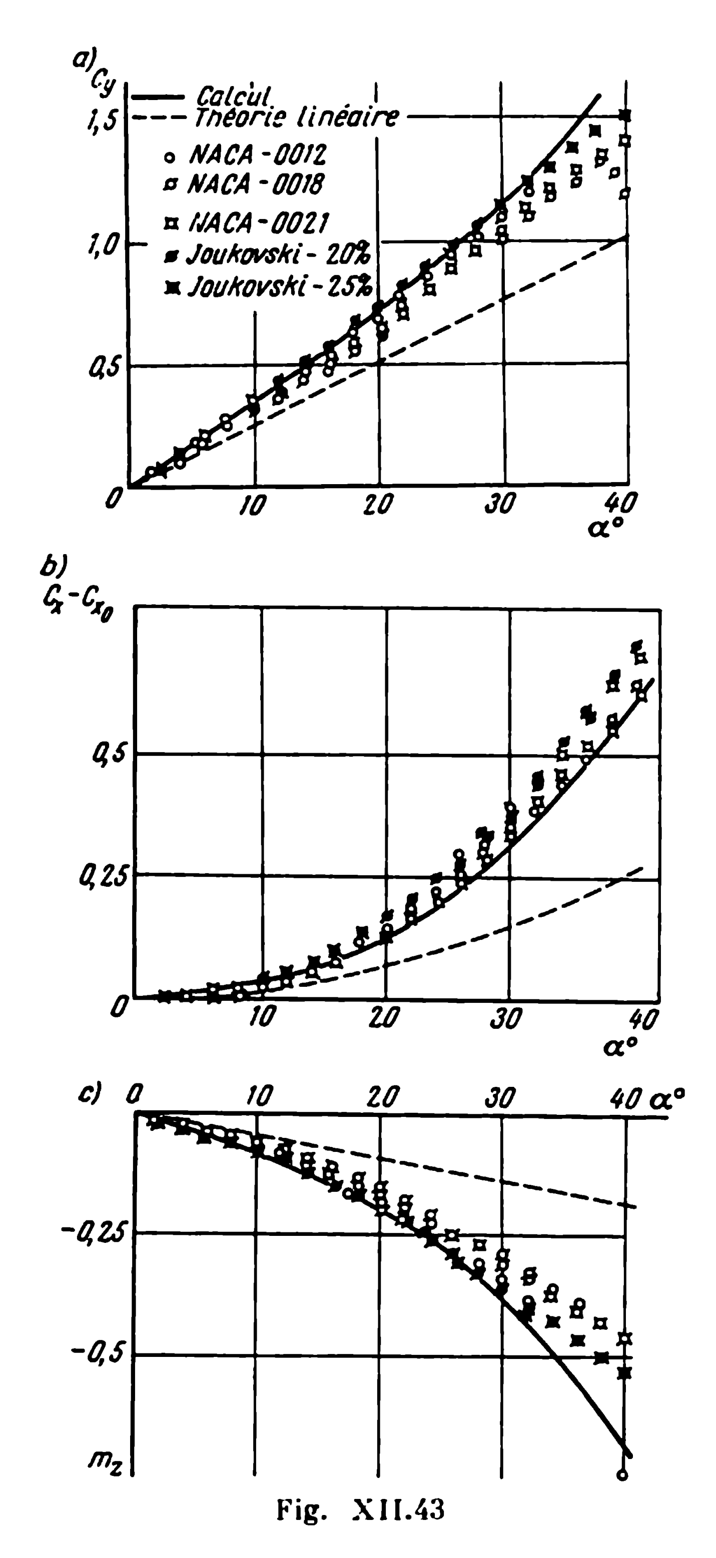


Fig. XII.43

corde. Par suite, la valeur $C_{x\ \mathrm{pl}} = 2$ doit être considérée comme une valeur moyenne. En substituant cette valeur du coefficient dans l'expression (XII.193) et en réduisant la force normale à la forme

d'un coefficient sans dimensions de la force normale, nous obtenons

$$C_{n\ \text{rés}}=\frac{R_{n\ \text{rés}}}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}S}=2\sin^2\alpha. \qquad \text{(XII.194)}$$

Par conséquent, le coefficient de la force portante est

$$C_{y\ \text{rés}}=C_{n\ \text{rés}}\cos\alpha=2\sin^2\alpha\cos\alpha, \qquad \text{(XII.195)}$$

et le coefficient d'accroissement de la résistance induite par le courant transversal

$$C_x-C_{x_{\alpha=0}}=C_{n\ \text{rés}}\sin\alpha=2\sin^3\alpha. \qquad \text{(XII.196)}$$

Il est évident que pour une telle approche du problème, la composante longitudinale de la vitesse ne peut engendrer que la compo-

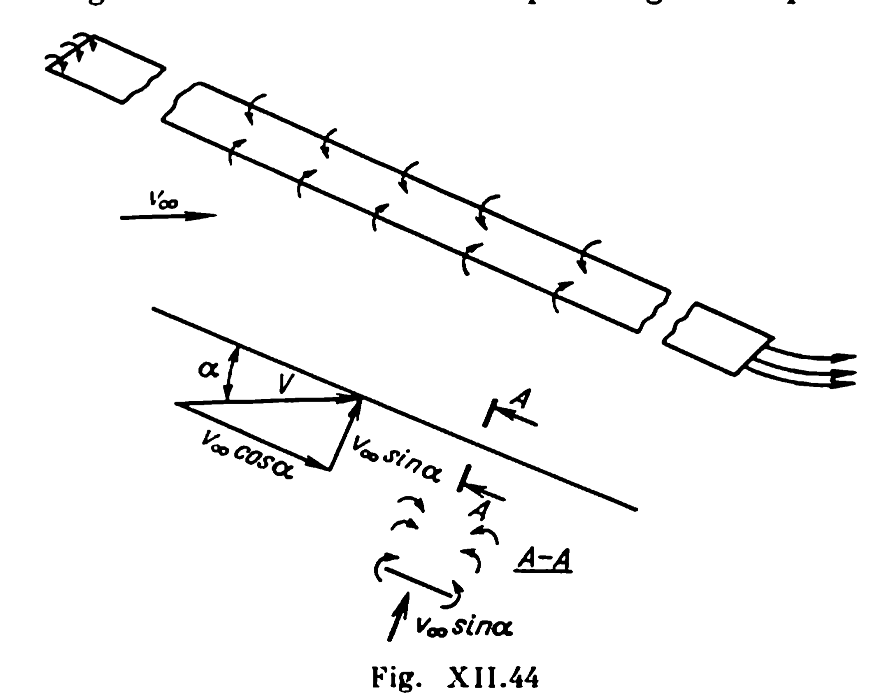


Fig. XII.44

sante longitudinale de la force hydrodynamique induite par le frottement. La force normale $R_{n\ \text{rés}}$ est évidemment appliquée au milieu de la corde, par conséquent le coefficient de son moment par rapport à son bord avant est

$$m_{z\ \text{rés}}=\frac{M_{z\ \text{rés}}}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}Sb}=\frac{R_{n\ \text{rés}}\frac{b}{2}}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}Sb}=\sin^2\alpha. \qquad \text{(XII.197)}$$

Le dépouillement de nombreuses données expérimentales montre que les différences entre les coefficients déterminés expérimentalement et les coefficients, calculés d'après la théorie linéaire, en première approximation ne dépendent pas de l'allongement de l'aile, ce qui a probablement conduit certains d'auteurs à penser que les

caractéristiques hydrodynamiques de l'aile à allongement réduit sont constituées de deux composantes: la première, déterminée par la circulation et calculée suivant la théorie linéaire et la seconde, déterminée par l'écoulement avec décollement autour des extrémités de l'aile.

La répartition de la charge sur la surface de l'aile d'allongement réduit peut en quelque sorte servir de justification d'un tel point de vue.

Sur la fig. XII.45, suivant les données de Winter, est montrée la répartition de la charge sur la moitié d'une plaque carrée avec un angle d'incidence $\alpha=8°$. Comme on le voit de la figure, la charge est concentrée surtout aux extrémités de la plaque. Et de plus, la charge sur le bord avant et au milieu de la plaque est

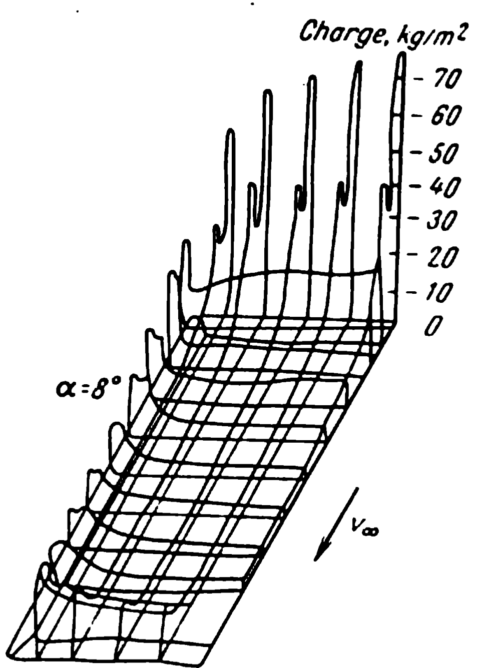


Fig. XII.45

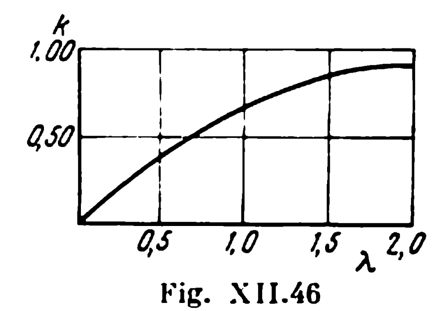


Fig. XII.46

proche de la charge qui est en écoulement avec circulation autour de l'aile, tandis qu'aux extrémités elle correspond à l'écoulement avec décollement autour d'une plaque plane normale à l'écoulement de vitesse $v_\infty \sin\alpha$. Ainsi, l'addition du coefficient obtenu d'après la théorie linéaire avec le coefficient obtenu d'après la théorie de l'écoulement avec décollement peut être considérée comme l'addition de la charge rapportée au bord avant et au milieu de l'aile avec la charge rapportée aux extrémités de l'aile.

En admettant les caractéristiques hydrodynamiques comme étant constituées des deux composantes indiquées, nous obtiendrons les formules suivantes

$$C_y = C_{y\,\text{t.l}} + 2\sin^2\alpha\cos\alpha = C^{\alpha}_{y\,\text{t.l}}\sin\alpha + 2\sin^2\alpha\cos\alpha\,; \qquad \text{(XII.198)}$$

$$C_x - C_{x_{\alpha=0}} = C_{xi\,\text{t.l}} + 2\sin^3\alpha = k\sin^2\alpha + 2\sin^3\alpha\,; \qquad \text{(XII.199)}$$

$$m_z = m_{z\,\text{t.l}} + \sin^2\alpha = m^{\alpha}_{z\,\text{t.l}}\sin\alpha + \sin^2\alpha. \qquad \text{(XII.200)}$$

Les valeurs des coefficients C^{α}_y, m^{α}_z et k, calculées par K. Wieghardt suivant la théorie linéaire, sont indiquées sur la fig. XII.31, XII.32 et XII.46. Les résultats des calculs effectués d'après les for-

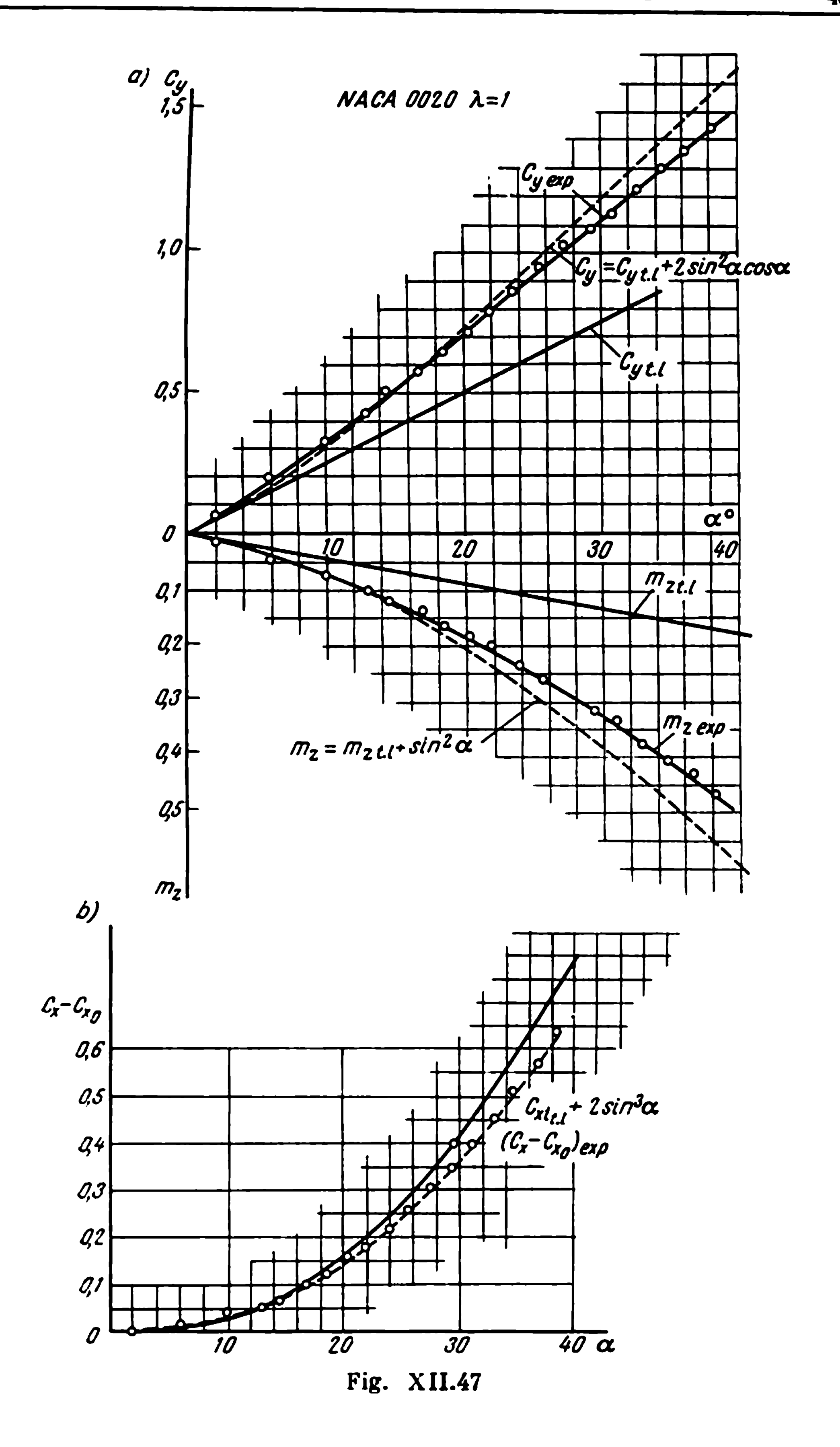
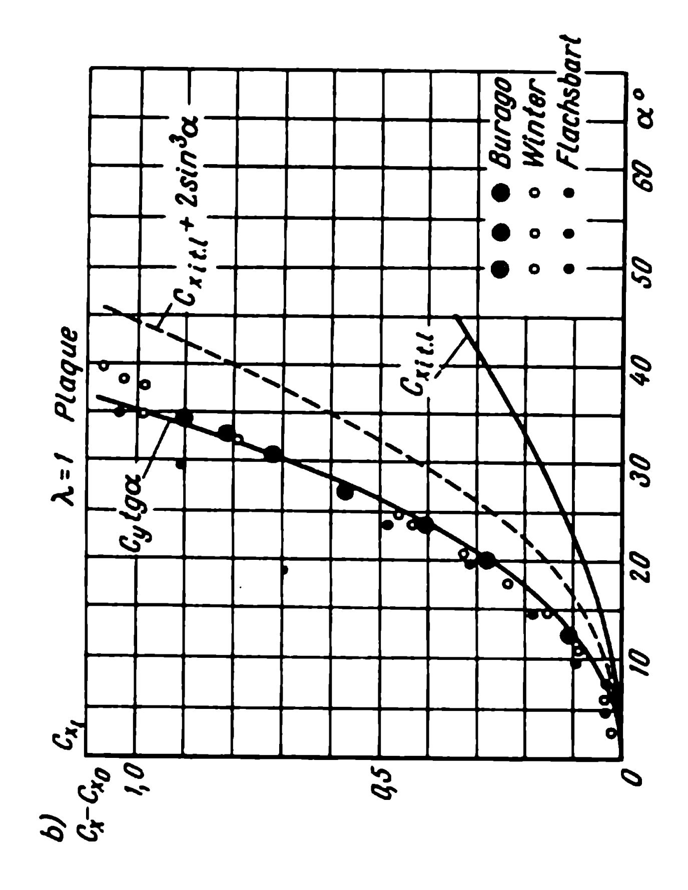

a)
C_y
NACA 0020 λ=1
$C_{y\,exp}$
$C_y = C_{y\,t.l} + 2\sin^2\alpha\cos\alpha$
$C_{y\,t.l}$
α°
$m_{z\,t.l}$
$m_{z\,exp}$
$m_z = m_{z\,t.l} + \sin^2\alpha$
m_z
b)
$C_x - C_{x0}$
$C_{xi\,t.l} + 2\sin^3\alpha$
$(C_x - C_{x0})_{exp}$
α

Fig. XII.47


b)
$C_x - C_{x0}$
C_{x_i}
1,0
0,5
0
10
20
30
40
50
60
α°
λ=1 Plaque
$C_{x\,i\,t.l} + 2\sin^3\alpha$
$C_y\,tg\alpha$
$C_{x\,i\,t.l}$
Burago
Winter
Flachsbart

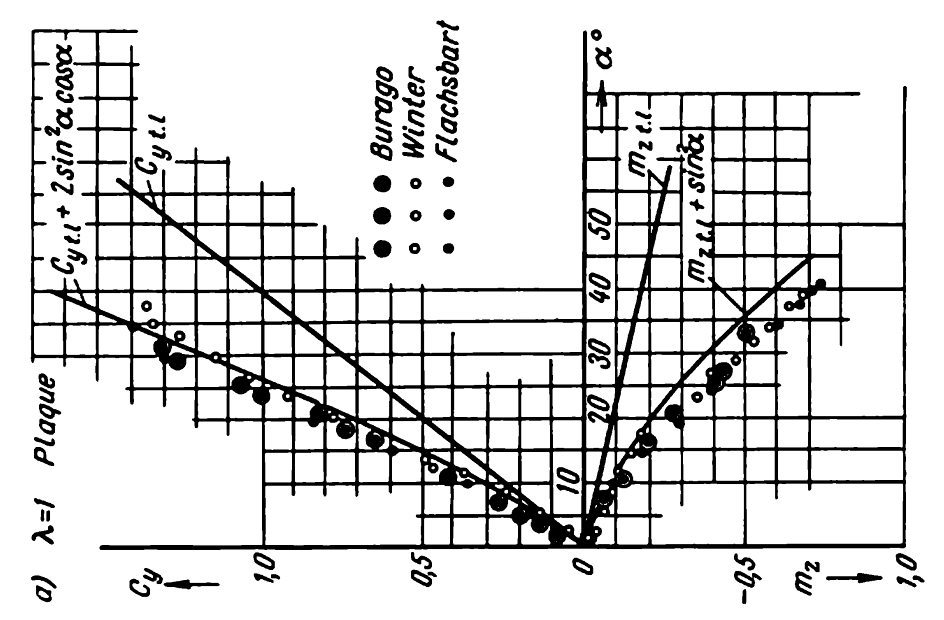

a) λ=1 Plaque
C_y
1,0
0,5
0
-0,5
m_z
1,0
10
20
30
40
50
α°
$C_{y\,t.l} + 2\sin^2\alpha\cos\alpha$
$C_{y\,t.l}$
$m_{z\,t.l}$
$m_{z\,t.l} + \sin^2\alpha$
Burago
Winter
Flachsbart

Fig. XII.48

mules (XII.198)-(XII.200) peuvent être comparés avec les données expérimentales sur les ailes profilées suivant les graphiques de la fig. XII.47,*a* et *b*. Sur cette figure sont données les courbes théoriques et expérimentales pour une aile carrée avec profil NACA-0020 d'après les expériences de G. Burago.

Les résultats expérimentaux pour une plaque plane carrée sont indiqués sur la fig. XII.48. Ils correspondent d'une manière satisfaisante aux formules de calcul respectives.

Il est à signaler que dans tous les cas considérés la coïncidence des données théoriques avec celles expérimentales est satisfaisante. Quant aux données relatives aux moments, elles coïncident moins bien. Il s'ensuit que les caractéristiques hydrodynamiques des gouvernails profilés à allongement réduit aux extrémités non arrondies peuvent être calculées en première approximation d'après les formules (XII.198)-(XII.200). Avec les extrémités arrondies, on ne peut déjà plus adopter le coefficient $C_{x\ \mathrm{pl}} = 2$.

Quant à l'accroissement de la résistance des gouvernails, qui sont des plaques planes, dû à l'angle d'incidence, la formule (XII. 199) s'avère être inutilisable pour sa détermination. La fig. XII.48,*b* représente une courbe construite d'après la formule (XII.199) pour une aile carrée. La diminution considérable de la résistance d'une plaque plane, obtenue d'après cette formule, s'explique par le fait qu'au voisinage du bord avant de la plaque, lors de l'écoulement autour d'elle, il se produit un décollement du courant et, par conséquent, la force d'aspiration ne peut apparaître. Dans ce cas, la résultante des pressions doit être dirigée suivant une normale à la plaque plane. Alors l'accroissement de la résistance peut être déterminé d'après la formule proposée par K. Fédiaevski

$$C_x - C_{x_{\alpha=0}} = C_y \operatorname{tg} \alpha = (C_{y\ \mathrm{t.l}} + 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha) \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{(XII.201)}$$

puisque, comme on le voit de la fig. XII.48,*a*, pour le calcul du coefficient de la force portante d'une plaque plane on peut toujours utiliser la formule (XII.198). Le calcul de l'accroissement de la résistance d'après la formule (XII.201) fournit une bonne coïncidence avec l'expérience.

CHAPITRE XIII

THÉORIE DES ONDES ET DES FORCES HYDRODYNAMIQUES ONDULATOIRES

§ 88. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ONDES

Les divers mouvements ondulatoires de fluide qui existent dans la nature sont provoqués par les perturbations extérieures et représentent le processus de la transmission de ces perturbations dans le milieu fluide. Suivant la nature des forces qui sont à l'origine du processus de la formation de la houle, les ondes peuvent être divisées en ondes de gravité, capillaires et élastiques.

Les ondes de gravité apparaissent par suite de ce que le fluide se trouve dans le champ d'action de la force de pesanteur. Les causes extérieures provoquent des perturbations de sa surface, qui engendrent les oscillations des particules de fluide autour de la position d'équilibre. Le processus de formation et de transmission de ces oscillations, dû à l'action de la force de pesanteur, est perçu par l'observateur comme une houle. On classe aux ondes de gravité les ondes dues au vent, ou celles provoquées par le mouvement des corps dans un fluide, ainsi que les ondes provoquées par les marées qui ont pour leur origine les perturbations créées par la Lune et le Soleil.

Les ondes capillaires sont dues à l'action des forces de la tension superficielle. Elles ont la forme de rides et sont aussi provoquées par le vent ou le mouvement d'un corps, mais se développent sous l'action des forces capillaires qui s'efforcent de rétablir la position de la surface du liquide.

Dans les conditions réelles, les ondes de gravité et les ondes capillaires peuvent se former simultanément. Leur formation s'effectue sur la surface libre d'un fluide ou sur la surface de séparation des fluides de différentes densités. Les ondes qui apparaissent dans ces conditions s'appellent ondes superficielles.

Les ondes élastiques, contrairement aux ondes superficielles, englobent toute la masse du fluide ; leur formation est liée aux phénomènes de compressibilité. A celles-ci se rapportent les ondes sonores et les ondes qui se forment au cours des explosions sous-marines ou aériennes.

Dans ce qui suit nous n'envisagerons que les ondes de gravité superficielles, comme présentant un intérêt particulier du point de vue de l'étude des ondes provoquées par le vent et des ondes de la houle. La formation des ondes de gravité sert également de cause à l'apparition des forces et des moments hydrodynamiques supplémentaires agissant sur les corps se déplaçant sur la surface libre du fluide ou au voisinage de celle-ci et provoquant sur elle la houle. Ces forces et ces moments s'appellent forces et moments de nature ondulatoire; ils peuvent sensiblement changer les caractéristiques

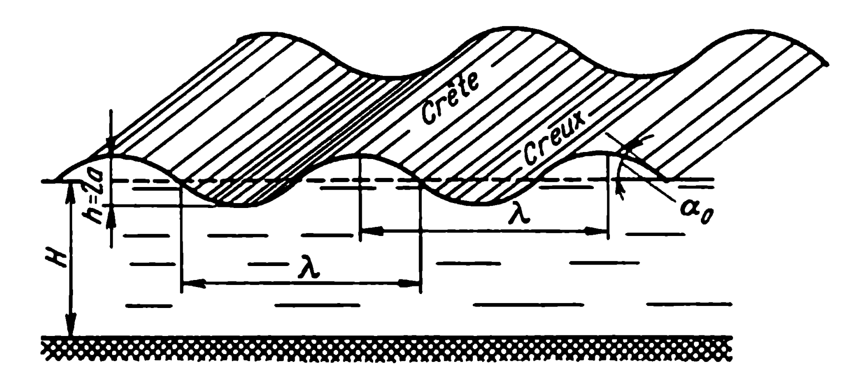


Fig. XIII.1

hydrodynamiques des corps par rapport à celles observées lors du mouvement des corps dans un fluide infini. En particulier, on rapporte à ces forces la résistance ondulatoire qui a une grande importance du point de vue du mouvement des navires.

Les ondes superficielles dont les caractéristiques se répètent périodiquement s'appellent régulières. Généralement les ondes dues au vent ou les ondes provoquées par le mouvement des corps dans un fluide sont à trois dimensions. Mais, parfois, par exemple dans le cas des ondes de la houle, l'image du mouvement ondulatoire est identique dans tous les plans correspondants avec la direction de la propagation des ondes et les génératrices de la surface houleuse sont des lignes droites. De telles ondes sont dites planes. Envisageons la section de la surface de l'eau couverte d'ondes régulières planes, montrée sur la fig. XIII.1. Les parties caractéristiques du profil ondulatoire formé par cette section, tracée dans le plan de la propagation des ondes, sont les crêtes et les creux des ondes et les principales caractéristiques des ondes sont leur longueur λ, leur hauteur h et la période τ.

On appelle longueur d'onde la distance entre les deux crêtes ou entre les deux creux voisins, mesurée dans le sens de leur propagation, et la hauteur d'onde, la distance h depuis le creux jusqu'à la crête. La moitié de la hauteur des ondes périodiques régulières s'appelle leur amplitude $a = h/2$ et le rapport h/λ, la hauteur relative de l'onde.

L'angle formé par la tangente au point donné du profil de l'onde avec la surface horizontale du fluide au repos est dit angle de pente de l'onde α_0. Sa valeur diffère suivant les points du profil. Dans l'étude des caractéristiques des ondes, on envisage ordinairement la valeur maximale de cet angle.

Les ondes peuvent être subdivisées en ondes progressives et stationnaires. Le profil des ondes progressives se déplace dans l'espace; parmi ces ondes il y a des ondes dues au vent et celles provoquées par le mouvement des corps dans un fluide. Le profil des ondes stationnaires ne se propage pas mais change seulement avec le temps ses ordonnées dans la région donnée de l'espace. Les ondes stationnaires peuvent se former par exemple grâce à l'interaction des ondes progressives lorsqu'elles se réfléchissent des rives et des ouvrages quelconques.

Imaginons qu'un observateur se trouve en un certain point immobile de l'espace. Alors par rapport à celui-ci, la période de l'onde représente un intervalle de temps entre le passage de deux crêtes ou de deux creux consécutifs par ce point. Si le point d'observation se déplace dans l'espace, alors la période, mesurée dans ce cas, s'appelle relative ou apparente. Le rapport $\sigma = 2\pi/\tau$ s'appelle fréquence des ondes. La vitesse, avec laquelle les crêtes des ondes progressives se déplacent dans l'espace, s'appelle célérité des ondes c, ou célérité de phase. La célérité c est la vitesse de déplacement du profil des ondes et il ne faut pas la confondre avec la vitesse de déplacement des particules qui prennent part au mouvement ondulatoire, qui est ordinairement faible.

En tenant compte que la célérité des ondes est constante, sa liaison avec la longueur et la période de lame aura pour expression

$$c = \frac{\lambda}{\tau}.$$

Généralement les ondes provoquées sur la surface de la mer par le vent représentent une houle irrégulière avec la hauteur, la longueur et la période de lame variant avec le temps. L'irrégularité et le caractère tridimensionnel de la houle marine sont dus aux rafales du vent, variables d'intensité et de direction, dont les impulsions, appliquées à la surface de l'eau, déterminent l'apparition des ondes de différentes grandeurs et formes et leur communiquent l'énergie. Pour cette raison, la houle due au vent est un processus aléatoire dont les caractéristiques sont obtenues par le traitement statistique des données sur les observations systématiques des ondes marines. Dans le cas général une telle houle peut être considérée comme un spectre qui s'obtient par la superposition de différentes ondes planes élémentaires.

Les ondes dues au vent, ainsi que celles provoquées par le mouvement des corps dans un fluide ou encore résultant de l'action d'une

impulsion de pression appliquée brusquement à la surface du fluide s'appellent ondes forcées. Outre les ondes forcées, on examine dans la théorie les ondes libres qui restent dans le fluide après que la cause qui les avaient provoquées a cessé d'agir. On peut considérer les caractéristiques de telles ondes comme ne dépendant pas de la durée de leur longévité. Par leurs propriétés, les ondes de la houle, par exemple, sont proches des ondes libres. Les observations montrent que le profil des ondes libres de la houle se rapproche de la trochoïde; le profil des ondes forcées dues au vent diffère du profil des ondes de la houle: sa pente du côté du vent est plus douce par rapport au côté sous le vent.

Pour justifier la théorie des ondes, il faut connaître les caractéristiques limites et moyennes des ondes réelles.

Les hauteurs limites des ondes dues au vent ne dépassent guère 20-30 m et les longueurs 400 m. Parmi les ondes mesurées les ondes les plus raides avaient le rapport $\frac{h}{\lambda} \approx \frac{1}{10} \div \frac{1}{8}$; pour les valeurs supérieures de ce rapport, il se produit la destruction des ondes. L'angle minimal au sommet des ondes, pour lequel il se produit le renversement et la destruction de la crête, est d'environ 130°. Cependant ces valeurs limites sont rarement observées. Plus caractéristiques sont les données consignées au tableau et qui se rapportent aux ondes les plus grandes observées avec diverses forces du vent.

Vent		Ondes				
Degrés	v_0, m/s	h, m	λ, m	h/λ	c, m/s	τ, s
4	8	1,2	25	1/21	6,2	4,0
5	10	2,6	39	1/15	7,8	5,0
6	13	4,0	87	1/22	11,8	7,4
7	16	5,8	129	1/22	14,2	9,1
8	19	8,4	138	1/18	14,7	9,4
9	22	11,5	180	1/16	16,8	10,7
10	25	12,6	285	1/23	21,1	13,5
11	27	14,5	376	1/26	24,4	15,5

Ces données montrent que la hauteur relative h/λ même des ondes très grandes est faible et, par conséquent, sont faibles les angles d'inclinaison de la surface sur l'horizontale. Les limites analogues des valeurs des hauteurs relatives sont caractéristiques également pour les ondes forcées provoquées par le mouvement d'un navire. Cela conduit à penser que la surface de l'eau, couverte d'ondes de gravité, se distingue peu d'un plan; la propriété indiquée est largement utilisée dans l'élaboration de la théorie des ondes. D'autre part, les observations montrent que la viscosité de

l'eau influe peu sur les phénomènes de la formation de la houle. Ceci explique justement le fait que la houle se conserve longtemps après que le vent cesse ou passe dans une autre région de la mer.

Une influence sensible sur les caractéristiques des ondes exerce le passage de l'eau profonde à l'eau peu profonde; il se produit alors la transformation de leur profil, ce qui peut amener à l'apparition des montées et près de la côte, des vagues déferlantes.

Une onde caractéristique sous la forme d'une intumescence se déplaçant solitairement se forme sur l'eau très peu profonde et dans les canaux. Ces ondes sont dites ondes solitaires.

§ 89. FORMULATION GÉNÉRALE DE LA THÉORIE DES ONDES PLANES LIBRES

Envisageons la théorie des ondes de gravité superficielles dans un fluide non visqueux limité par une surface libre et ayant une profondeur finie H. Nous considérerons le mouvement ondulatoire

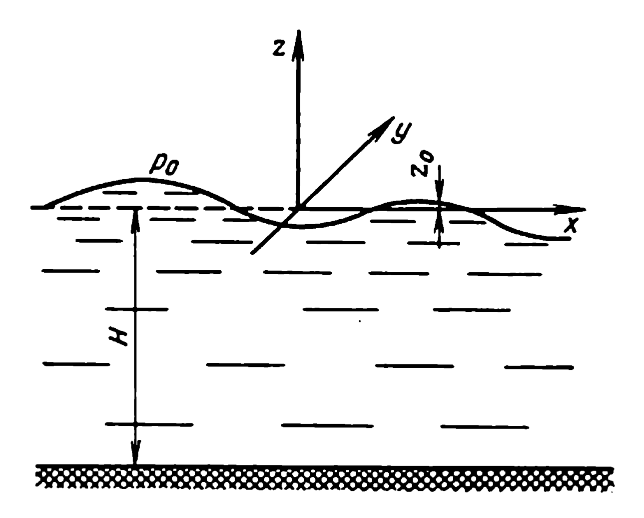


Fig. XIII.2

du fluide comme potentiel et cela, par suite de l'absence de tourbillons dans le fluide au repos au moment de la formation dans celui-ci des ondes sous l'action d'impulsion de pression appliquée à ce fluide. Alors, d'après le théorème de Thomson, le tourbillonnement n'aura pas lieu également dans le processus ultérieur du développement des ondes. L'hypothèse sur le caractère potentiel du mouvement ondulatoire permet de réduire le problème d'étude à la recherche du potentiel de la vitesse φ de ce courant, qui dans le cas donné représente une fonction des coordonnées des points de l'espace occupé par le fluide et du temps. Adoptons l'origine des coordonnées cartésiennes sur le plan coïncidant avec la surface du fluide au repos et dirigeons l'axe des z verticalement vers le haut (fig. XIII.2). Dans ce système de coordonnées, le potentiel $\varphi(x, y, z, t)$ satisfait

à l'équation de Laplace, qui traduit la condition de continuité du fluide,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \qquad \text{(XIII.1)}$$

La connaissance du potentiel φ permet de calculer toutes les caractéristiques du mouvement ondulatoire, le champ de la vitesse et les pressions.

Pour intégrer l'équation (XIII.1) il est indispensable de soumettre sa solution aux conditions aux limites. Comme on le sait, ces conditions peuvent être de deux types: cinématiques et dynamiques. On peut composer les conditions aux limites cinématiques pour la surface libre du fluide et pour les frontières solides du bassin. La surface libre des ondes a pour ordonnées z_0, déterminées par la relation

$$z_0=f(x,\ y,\ t), \qquad \text{(XIII.2)}$$

dont la forme n'est pas connue à l'avance et doit être déterminée au cours de la résolution du problème. Pour les particules du fluide disposées sur la surface libre, la projection de la vitesse de leur mouvement sur l'axe des z peut être calculée par la formule

$$v_z=\frac{dz_0}{dt}. \qquad \text{(XIII.3)}$$

En tenant compte de ce que d'après (XIII.2) z_0 représente une fonction complexe des coordonnées et de la variable indépendante t, la dérivée totale pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{dz_0}{dt}=\frac{\partial z_0}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z_0}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial z_0}{\partial t}.$$

Comme pour les points de la surface libre $dx/dt = v_x$ et $dy/dt = v_y$, alors en tenant compte qu'en mouvement potentiel $v_x = \partial\varphi/\partial x$, $v_y = \partial\varphi/\partial y$ et $v_z = \partial\varphi/\partial z$, on peut récrire la relation (XIII.3) sous la forme suivante

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial z_0}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial z_0}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial z_0}{\partial t}. \qquad \text{(XIII.4)}$$

Cette condition doit être observée sur la surface libre du fluide, c'est-à-dire avec $z = z_0$.

Sur les frontières solides du bassin doit se vérifier la condition d'imperméabilité et d'écoulement sans décollement. D'après cette condition, la composante de la vitesse du fluide, normale à ces frontières, doit être $v_n = 0$ ou par suite du mouvement potentiel $\partial\varphi/\partial n = 0$. Dans le cas où la frontière est un fond plan, cette condition d'après la fig. XIII.2 aura pour expression

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \text{ pour } z=-H. \qquad \text{(XIII.5)}$$

Passons à l'écriture de la condition aux limites dynamiques. On peut l'obtenir si l'on tient compte de ce que le long de la surface libre du fluide la pression est constante et égale à la pression atmosphérique, c'est-à-dire p_0. On sait qu'en mouvement potentiel variable, la pression se détermine au moyen de l'intégrale de Lagrange (IV.18)

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\rho v^2}{2} + \gamma z + p = C(t).$$

Posons dans cette équation $p = p_0$. Faisons introduire la constante p_0 et la fonction $C(t)$ dans le potentiel de la vitesse φ, en tenant compte de ce que ces valeurs, indépendantes des coordonnées, n'influent pas sur le champ de la vitesse $\overline{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Alors en vertu de l'intégrale de Lagrange, compte tenu que $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, nous obtenons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + g z_0 = 0 \text{ avec } z = z_0. \quad \text{(XIII.6)}$$

L'équation (XIII.1) combinée avec les conditions aux limites sur la surface libre (XIII.4) et (XIII.6) et à la condition sur le fond (XIII.5) constitue l'énoncé mathématique du problème sur les ondes de gravité libres de toute amplitude finie. Comme les conditions aux limites (XIII.4) et (XIII.6), remplies sur une surface curviligne ondulatoire qui n'est pas connue d'avance, comportent des produits et des carrés des dérivées des fonctions cherchées, le problème énoncé est non linéaire et sert de base à l'élaboration de la théorie non linéaire des ondes d'amplitude finie. Du point de vue mathématique, cette théorie est très compliquée.

Les difficultés mathématiques de la solution du problème des ondes de gravité peuvent être surmontées si l'on simplifie les conditions sur la surface libre. A cet effet, utilisons les propriétés des ondes, connues du § 88, suivant lesquelles leurs hauteurs relatives sont ordinairement petites. En définitive, les angles d'inclinaison de la surface ondulatoire se révèlent être petits, c'est-à-dire les dérivées $\partial z_0/\partial x$ et $\partial z_0/\partial y$ qui caractérisent ces angles. D'autre part, on peut considérer également comme petites les vitesses du mouvement des particules de fluide dans les ondes, c'est-à-dire les dérivées $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$ et $\partial\varphi/\partial z$. Cela permet de négliger dans les équations (XIII.4) et (XIII.6) les carrés et les produits des petites grandeurs et de transférer les conditions de la surface des ondes sur le plan xy, alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial z_0}{\partial t} \quad \text{avec } z = 0; \qquad \text{(XIII.7)}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g z_0 = 0 \quad \text{avec } z = 0. \qquad \text{(XIII.8)}$$

A partir de l'expression (XIII.8) on peut obtenir l'équation déterminant les ordonnées de la surface libre

$$z_0 = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x, y, o, t)}{\partial t}. \qquad \text{(XIII.9)}$$

En dérivant cette expression par rapport à t et en portant le résultat dans (XIII.7), nous obtenons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \quad \text{avec } z=0. \qquad \text{(XIII.10)}$$

Cette nouvelle condition aux limites, de même que la condition (XIII.5) et l'équation de Laplace, est linéaire par rapport à la fonction cherchée φ; ces conditions combinées avec l'équation (XIII.1) permettent d'énoncer le problème mathématique de la théorie linéaire des ondes ou, comme on l'appelle encore, de la théorie des ondes de gravité d'amplitude relativement faible.

En appliquant cette théorie au calcul de la pression dans un fluide, il convient également de négliger dans l'intégrale de Lagrange le carré de la vitesse induite, c'est-à-dire conformément à la remarque faite précédemment relative à l'inclusion de $C(t)$ dans le potentiel de la vitesse, calculer la surpression en n'importe quel point du fluide d'après la formule

$$p - p_0 = -\gamma z - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \qquad \text{(XIII.11)}$$

La linéarité de la théorie des ondes d'amplitude relativement faible permet d'employer pour la recherche du potentiel le principe de la superposition des solutions élémentaires qui satisfont à l'équation de Laplace. Cette méthode est largement utilisée pour la résolution des problèmes linéaires sur les mouvements ondulatoires du fluide.

§ 90. ONDES PLANES STATIONNAIRES

L'une des propriétés importantes des ondes est leur périodicité. Adressons-nous aux équations de la théorie linéaire des ondes et déterminons la forme du potentiel φ qui correspond à cette propriété. Ce potentiel doit satisfaire à l'équation de Laplace et, comme on sait des mathématiques [21], pour résoudre cette équation on peut se servir de la méthode de Fourier de la division des variables, c'est-à-dire chercher la fonction $\varphi(x, y, z, t)$, sous la forme du produit des fonctions dans lesquelles les variables sont divisées

$$\varphi = \varphi_1(t)\,\varphi_2(x, y, z). \qquad \text{(XIII.12)}$$

Introduisons cette expression dans l'équation (XIII.10)

$$\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = -\frac{1}{g}\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}\varphi_2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi_1''}{\varphi_1} = -\frac{g}{\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}. \qquad \text{(XIII.13)}$$

Le premier membre de cette équation représente la fonction seulement du temps t et le deuxième, seulement des coordonnées. Cette égalité n'est possible que dans le cas où ces deux membres sont identiquement égaux à une grandeur constante, laquelle nous désignerons par $\pm\sigma^2$. En définitive, nous obtenons une équation différentielle homogène ordinaire de la fonction φ_1

$$\varphi_1'' \pm \sigma^2\varphi_1 = 0. \qquad \text{(XIII.14)}$$

Les racines de l'équation caractéristique correspondante

$$k^2 \pm \sigma^2 = 0$$

ont la forme dans le premier cas $k_{1.2} = \pm i\sigma$ avec le signe plus et dans le second cas $k_{1.2} = \pm\sigma$ avec le signe moins dans l'équation (XIII.14). Au premier cas correspond la solution

$$\varphi_1 = A_1e^{i\sigma t} + A_2e^{-i\sigma t}, \qquad \text{(XIII.15)}$$

et au second cas

$$\varphi_1 = A_1e^{\sigma t} + A_2e^{-\sigma t},$$

où A_1 et A_2 sont des constantes.

Dans le second cas la fonction φ_1 croît d'une façon illimitée avec l'augmentation du temps, et la périodicité du processus, ainsi que le caractère fini du champ des vitessses ne sont pas assurés dans ce cas, c'est-à-dire que cette solution ne satisfait pas aux conditions du problème.

La solution (XIII.15) décrit la fonction φ_1, périodique et finie dans le temps, satisfaisant aux conditions requises. En remplaçant A_1 et A_2 par de nouvelles constantes A et ε_0 et en tenant compte de ce que le potentiel de la vitesse est une valeur réelle, on peut écrire cette fonction sous la forme suivante

$$\varphi_1 = A\cos(\sigma t + \varepsilon_0).$$

En utilisant cette expression de φ_1, on peut écrire le potentiel pour n'importe quels mouvements ondulatoires périodiques dans l'espace sous sa forme générale

$$\varphi = A\cos(\sigma t + \varepsilon_0)\,\varphi_2(x, y, z). \qquad \text{(XIII.16)}$$

Par une substitution de (XIII.16) dans l'équation de Laplace et dans l'expression (XIII.10), on détermine aisément que la fonction φ_2 satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2} = 0, \qquad \text{(XIII.17)}$$

ainsi qu'à la relation

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}=\frac{\sigma^2}{g}\varphi_2 \quad \text{pour} \quad z=0. \tag{XIII.18}$$

Passons maintenant au mouvement ondulatoire plan s'effectuant dans le plan xz. Dans ce cas φ_2 représente la fonction seulement de x et de z, limitée dans tout le volume de fluide. Pour sa détermination, utilisons à nouveau la méthode de la division des variables

$$\varphi_2=X(x)\,Z(z). \tag{XIII.19}$$

La substitution de cette expression dans l'équation (XIII.17) conduit à la relation suivante:

$$X''Z+XZ''=0$$

ou

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Z''}{Z}. \tag{XIII.20}$$

La réalisation de cette égalité n'est également possible que dans le cas où les premier et deuxième membres sont identiquement égaux à une grandeur constante que nous désignerons par $\pm k^2$. Envisageons l'équation

$$\frac{X''}{X}=\pm k^2. \tag{XIII.21}$$

L'analyse de cette équation est analogue à l'analyse des solutions de l'équation (XIII.14). Nous obtiendrons des solutions limitées pour toute valeur de x, si dans le deuxième membre (XIII.21) la constante est affectée de signe moins. Finalement, la résolution de cette équation sera de la forme

$$X=B_1e^{ikx}+B_2e^{-ikx}=B\cos(kx-\varepsilon_1), \tag{XIII.22}$$

où B_1, B_2 et B, ε_1 sont des constantes.

En tenant compte du signe adopté de la constante dans l'équation (XIII.21) et en substituant cette valeur dans le premier membre (XIII.20), nous obtenons l'équation pour la détermination de la fonction Z

$$Z''-k^2Z=0.$$

La résolution de cette équation, vu que les racines de l'équation caractéristique qui lui correspond sont réelles $\pm k$, aura pour expression

$$Z=D_1e^{kz}+D_2e^{-kz}. \tag{XIII.23}$$

Pour déterminer les constantes D_1 et D_2, utilisons la condition aux limites sur le fond du bassin (XIII.5), qui, compte tenu de

(XIII.12) et de (XIII.19), pourra s'écrire ainsi:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi_1 X Z' = 0 \quad \text{avec } z = -H.$$

Comme généralement parlant, les fonctions φ_1 et X ne sont pas nulles, cette condition sera de la forme

$$\frac{dZ}{dz} = 0 \quad \text{avec} \quad z = -H.$$

En y substituant la relation (XIII.23), nous obtenons

$$k(D_1 e^{-kH} - D_2 e^{kH}) = 0.$$

Possédant une équation, nous pouvons exprimer les deux constantes inconnues D_1 et D_2 pour toute valeur de k par une nouvelle constante que nous désignerons par $D/2$

$$D_1 e^{-kH} = D_2 e^{kH} = \frac{D}{2}.$$

Finalement nous aurons

$$Z = \frac{D}{2} e^{kH} e^{kz} + \frac{D}{2} e^{-kH} e^{-kz} = D \operatorname{ch} k(z+H). \qquad \text{(XIII.24)}$$

En tenant compte des expressions (XIII.16), (XIII.22) et (XIII.24) nous obtenons finalement l'expression générale suivante du potentiel de la vitesse du mouvement ondulatoire

$$\varphi = ABD \cos(\sigma t - \varepsilon_0) \cos(kx - \varepsilon_1) \operatorname{ch} k(z+H).$$

Désignons le produit des constantes $ABD = C$ et tenons compte de ce qu'en changeant le commencement du compte du temps, on peut parvenir à ce que $\varepsilon_0 = 0$ et en transférant l'origine des coordonnées le long de l'axe des x, on peut obtenir $\varepsilon_1 = \pi/2$. Cela permet d'utiliser le potentiel pour l'analyse ultérieure sous la forme

$$\varphi = C \cos \sigma t \sin kx \operatorname{ch} k(z+H). \qquad \text{(XIII.25)}$$

Dans les formules (XIII.25) et (XIII.26), les constantes σ et k ne sont pas indépendantes. La liaison entre elles peut être établie au moyen de l'équation (XIII.18) encore non utilisée. En y substituant la fonction φ_2 exprimée par X et Z, nous obtiendrons

$$k \cos(kx - \varepsilon_1) \operatorname{sh} k(z+H) = \frac{\sigma^2}{g} \cos(kx - \varepsilon_1) \operatorname{ch} k(z+H).$$

En admettant ici $z = 0$, nous déterminons la liaison cherchée entre σ et k

$$\sigma^2 = gk \operatorname{th} kH. \qquad \text{(XIII.26)}$$

Déterminons maintenant la forme du profil de l'onde. A cet effet, utilisons la relation (XIII.9) ; en y substituant (XIII.25), nous trou-

vons

$$z_0 = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x, o, t)}{\partial t} = \frac{C\sigma \operatorname{ch} kH}{g} \sin\sigma t \sin kx. \quad \text{(XIII.27)}$$

Le facteur constant des fonctions trigonométriques représente ici l'amplitude de l'onde

$$a = \frac{C\sigma \operatorname{ch} kH}{g}. \quad \text{(XIII.28)}$$

A l'instant donné, par exemple pour $t = \pi/2\sigma$, l'équation de la surface du fluide représente une sinusoïde

$$z_0 = a \sin kx$$

de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$.

De cette façon, la constante k est liée avec la longueur des ondes et s'appelle fréquence de forme de l'onde. Elle montre le nombre de longueurs d'ondes contenu dans le segment de longueur 2π.

Il résulte de la formule (XIII.27) que les abscisses des points d'intersection du profil ondulatoire avec l'axe des x, où $x = \frac{m\pi}{k}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), ne changent pas leur position dans le temps; ces points sont dits nœuds d'ondulation. Par conséquent, le profil de l'onde ne se déplace pas le long de l'axe des x mais oscille seulement par rapport à cet axe, c'est-à-dire à la surface non perturbée de l'eau. Dans les intervalles entre les nœuds, il y a des oscillations de la surface dans le temps suivant une loi sinusoïdale de fréquence σ. Ces tronçons du profil des ondes s'appellent intumescences et les ondes mêmes, ondes de gravité stationnaires planes.

La période d'oscillation τ se détermine par la relation

$$\tau = \frac{2\pi}{\sigma}$$

ou, si l'on tient compte de la formule (XIII.26) et de la liaison entre k et λ,

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}}}. \quad \text{(XIII.29)}$$

Etudions les trajectoires des particules du fluide dans les ondes stationnaires. Pour cela, remarquons que suivant les formules de la cinématique les points $v_x = dx/dt$; $v_z = dz/dt$.

Au moyen du potentiel de la vitesse (XIII.25), on peut déterminer les projections de la vitesse des particules, en obtenant finalement,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ck \cos\sigma t \cos kx \operatorname{ch} k(z+H); \\ \frac{dz}{dt} &= Ck \cos\sigma t \sin kx \operatorname{sh} k(z+H). \end{aligned}\right\} \quad \text{(XIII.30)}$$

Ces relations peuvent être considérées comme des équations différentielles déterminant les coordonnées x et z de la particule dans le temps. Lors de leur intégration, en admettant pour raison de la petitesse des amplitudes des ondes les déplacements des particules petits, remplaçons les coordonnées courantes x et z dans le deuxième membre par les valeurs x_0 et z_0 correspondantes à la position d'équilibre de la particule donnée. Compte tenu de ce remplacement, en divisant les variables et en intégrant, nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{Ck}{\sigma} \sin \sigma t \cos kx_0 \operatorname{ch} k (z_0 + H) + C_1 ; \\ z &= \frac{Ck}{\sigma} \sin \sigma t \sin kx_0 \operatorname{sh} k (z_0 + H) + C_2 . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII.31)}$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 avec $t = 0$ s'obtiennent de la condition qu'au moment donné $x = x_0$ et $z = z_0$, c'est-à-dire $C_1 = x_0$ et $C_2 = z_0$.

En éliminant de ces équations le temps, nous trouvons l'équation des trajectoires des particules

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = \operatorname{tg} kx_0 \operatorname{th} k (z_0 + H), \qquad \text{(XIII.32)}$$

qui représente une famille de segments des droites inclinées de paramètres x_0 et z_0. Pour les particules disposées à la surface libre ($z_0 = 0$) et qui coïncident avec les nœuds ($x_0 = m\pi/k$) suivant (XIII.31)

$$x = \frac{Ck}{\sigma} \sin \sigma t \operatorname{ch} kH ; \quad z = 0.$$

Ceci montre qu'elles effectuent des oscillations le long du segment horizontal de l'axe des x avec une amplitude $\frac{Ck}{\sigma} \operatorname{ch} kH = \frac{a}{\operatorname{th} kH}$.

Les équations du mouvement des particules au centre des intumescences ($x_0 = m\pi/2k$) ont pour expression

$$x = 0 ;$$

$$z = \frac{Ck}{\sigma} \sin \sigma t \operatorname{sh} kH,$$

c'est-à-dire qu'elles oscillent suivant des segments des droites verticales avec une amplitude $a = \frac{Ck}{\sigma} \operatorname{sh} kH$. L'aspect des trajectoires des particules est montré sur la fig. XIII.3. Si l'on pose $H \to \infty$, alors à la limite, les formules déduites décriront les ondes stationnaires sur la surface du fluide de profondeur infinie.

En remplaçant dans (XIII.25) la valeur de C par l'amplitude de l'onde a suivant (XIII.28) et en tenant compte que

$$\lim_{H \to \infty} \frac{\operatorname{ch} k (z + H)}{\operatorname{ch} kH} = e^{kz},$$

nous obtiendrons le potentiel des ondes stationnaires pour un liquide de profondeur infinie sous la forme

$$\varphi=\frac{ag}{\sigma}\cos\sigma t\sin kx\,e^{kz}. \qquad \text{(XIII.33)}$$

Les ordonnées du profil ondulatoire se déterminent toujours par la formule

$$z_0=a\sin\sigma t\sin kx.$$

Les trajectoires des particules, compte tenu que dans (XIII.32)

$$\lim_{H\to\infty}\operatorname{th}k(z+H)=1, \qquad \text{(XIII.34)}$$

sont toujours des segments de droites

$$\frac{z-z_0}{x-x_0}=\operatorname{tg}kx_0,$$

mais avec un angle d'inclinaison changé.

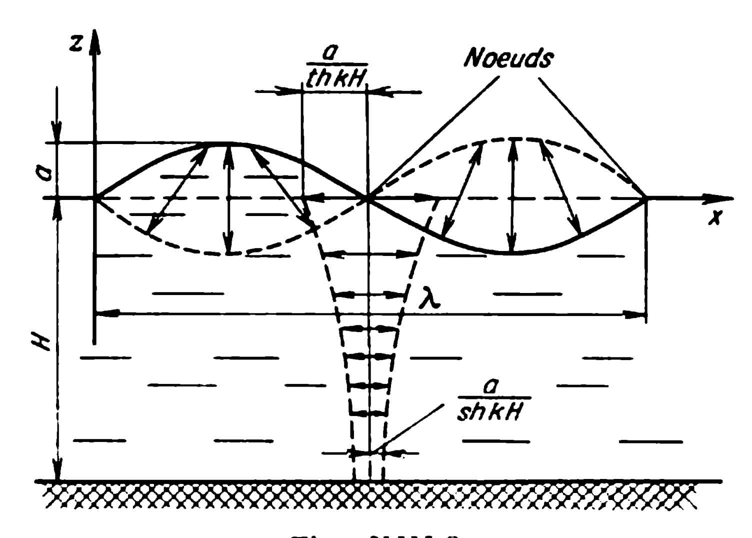


Fig. XIII.3

En tenant compte de la formule (XIII.29) et le passage à la limite (XIII.34), nous trouvons la liaison entre la période et la longueur d'onde sous la forme

$$\tau=\sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} \qquad \text{(XIII.35)}$$

ou

$$\sigma^2=gk. \qquad \text{(XIII.36)}$$

L'étude du problème spatial permet de montrer la possibilité de l'existence des ondes circulaires en plan stationnaires tridimensionnelles, mais dans les ondes stationnaires spatiales, contrairement aux ondes planes, l'amplitude s'amortit à mesure qu'on s'éloigne de l'origine des coordonnées.

§ 91. ONDES PLANES PROGRESSIVES

Le trait typique des ondes progressives est le déplacement de leur profil dans l'espace avec le temps. Etudions ces ondes dans un fluide de profondeur limitée H. Pour obtenir le potentiel de ce mouvement ondulatoire, faisons appel au principe de la superposition des solutions simples de l'équation de Laplace, qui satisfont aux conditions aux limites linéaires imposées sur la surface libre du fluide (XIII.10) et sur le fond du bassin (XIII.5). Pour ce faire, additionnons deux potentiels d'ondes stationnaires (XIII.25), qui diffèrent par leur phase d'oscillation de la valeur $\varepsilon_0 = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire

$$\varphi = C\left[\cos\sigma t \sin kx + \cos\left(\sigma t + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(kx + \frac{\pi}{2}\right)\right] \operatorname{ch} k(z+H).$$

En tenant compte que $\cos\left(\sigma t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\sigma t$; $\sin\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) = \cos kx$, en employant la formule du sinus de la différence des angles et en remplaçant la valeur de C par l'amplitude suivant (XIII.28), nous obtenons

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma \operatorname{ch} kH} \sin(kx - \sigma t) \operatorname{ch} k(z+H). \qquad \text{(XIII.37)}$$

Etudions l'aspect de la surface libre en utilisant la formule (XIII.9)

$$z_0 = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x, o, t)}{\partial t} = a\cos(kx - \sigma t). \qquad \text{(XIII.38)}$$

Les positions des crêtes et des creux des ondes correspondent aux abscisses pour lesquelles $\cos(kx - \sigma t) = 1$, c'est-à-dire

$$kx - \sigma t = m\pi \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

On en déduit que

$$x = \frac{m\pi}{k} + \frac{\sigma}{k} t, \qquad \text{(XIII.39)}$$

c'est-à-dire que l'abscisse de la crête (ou du creux) comportant l'indice m se déplace le long de la direction positive de l'axe des abscisses à la vitesse constante

$$c = \frac{\sigma}{k}. \qquad \text{(XIII.40)}$$

Par conséquent, le mouvement examiné correspond aux ondes planes progressives d'amplitude relativement petite avec un profil cosinusoïdal de la surface. La longueur des ondes, pour t donné, s'obtient comme la différence des abscisses de deux crêtes ou creux

voisins, c.-à-d. d'après (XIII.39)

$$\lambda = x_{m+2} - x_m = \frac{2\pi}{k}. \qquad \text{(XIII.41)}$$

En utilisant la relation entre σ et k établie par la formule (XIII.26), on peut exprimer la célérité des ondes dans (XIII.40) par leur longueur

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th} kH} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}}. \qquad \text{(XIII.42)}$$

Cette relation atteste de la dépendance entre la vitesse des ondes de gravité et leur longueur. Cette propriété s'appelle dispersion des ondes.

Si la valeur $2\pi H/\lambda$ est petite, c'est-à-dire si, par exemple, la profondeur d'eau est petite, alors on peut admettre que

$$\operatorname{th} kH \approx kH.$$

Dans ce cas

$$c = \sqrt{gH}. \qquad \text{(XIII.43)}$$

et la célérité des ondes ne dépend pas de leur longueur. Sur l'eau peu profonde, elle est limite, et pour une profondeur donnée H, les ondes ne peuvent pas se propager à sa surface avec une vitesse plus grande.

L'angle de pente de l'onde α_0 des ondes progressives peut se trouver par la formule

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\partial z_0}{\partial x} = -ak \sin(kx - \sigma t).$$

Etant donné que les angles de pente de la surface des ondes sont petits, on peut admettre $\operatorname{tg} \alpha_0 = \alpha_0$ et alors la valeur maximale de cet angle sera (en radians)

$$\alpha_{0\,\max} = ak = \frac{2\pi a}{\lambda}. \qquad \text{(XIII.44)}$$

La période des ondes progressives se détermine toujours d'après la formule (XIII.29).

Les relations obtenues permettent de conclure que la particularité importante des ondes progressives est l'indépendance de leur célérité, des périodes et, par conséquent, des longueurs de l'amplitude; pour une amplitude donnée la longueur d'onde peut être quelconque. Cette propriété est caractéristique pour les ondes d'amplitude relativement faible et n'a pas lieu dans le cas des ondes d'amplitude finie, c'est-à-dire dans la théorie non linéaire des ondes.

La valeur de l'amplitude a ne peut pas être déterminée par la théorie linéaire, on ne peut la déterminer que si l'on tient compte

des conditions de la formation des ondes, c'est-à-dire des conditions initiales, ou de l'intensité des perturbations qui agissent sur le fluide.

Pour déterminer l'aspect des trajectoires des particules de fluide pour les ondes progressives, on doit utiliser le procédé décrit dans le paragraphe précédent. Ecrivons les équations de mouvement, en employant pour le calcul des vitesses des particules le potentiel (XIII.37), sous la forme

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{agk}{\sigma\,\mathrm{ch}\,kH}\cos(kx-\sigma t)\,\mathrm{ch}\,k(z+H);$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{agk}{\sigma\,\mathrm{ch}\,kH}\sin(kx-\sigma t)\,\mathrm{sh}\,k(z+H).$$

En remplaçant ici dans le deuxième membre x par $x=x_0$ et z par $z=z_0$, où x_0 et z_0 sont les coordonnées de la position d'équilibre des particules, nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{agk}{\sigma^2\,\mathrm{ch}\,kH}\sin(kx_0-\sigma t)\,\mathrm{ch}\,k(z_0+H)+x_0;\\ z&=\frac{agk}{\sigma^2\,\mathrm{ch}\,kH}\cos(kx_0-\sigma t)\,\mathrm{sh}\,k(z_0+H)+z_0.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(XIII.45)}$$

En tenant compte de ce que d'après (XIII.26)

$$\frac{gk}{\sigma^2\,\mathrm{ch}\,kH}=\frac{1}{\mathrm{sh}\,kH},$$

et éliminant de ces égalités le temps, nous trouvons l'équation des trajectoires du mouvement des particules

$$\left[\frac{x-x_0}{a\,\dfrac{\mathrm{ch}\,k(z_0+H)}{\mathrm{sh}\,kH}}\right]^2+\left[\frac{z-z_0}{a\,\dfrac{\mathrm{sh}\,k(z_0+H)}{\mathrm{sh}\,kH}}\right]^2=1,\qquad\text{(XIII.46)}$$

qui décrit des ellipses de demi-axes

$$a_1=\frac{a\,\mathrm{ch}\,k(z_0+H)}{\mathrm{sh}\,kH}\quad\text{et}\quad b_1=\frac{a\,\mathrm{sh}\,k(z_0+H)}{\mathrm{sh}\,kH}.$$

Les particules disposées au voisinage du fond, où $z_0=-H$, $a_1=a/\mathrm{sh}\,kH$ et $b_1=0$, se déplacent suivant les segments des droites horizontales le long du fond. Les particules se déplacent suivant des ellipses dans le sens de l'horloge et leur temps de révolution est égal à la période d'onde. Dans la région de la crête des ondes, elles se déplacent suivant la partie supérieure de l'arc de l'ellipse dans le sens de la propagation des ondes, tandis que dans la région du creux, dans le sens inverse.

Les résultats obtenus attestent que les trajectoires des particules pour les ondes progressives sont des courbes fermées, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de déplacement des masses de fluide dans la

direction de la propagation des ondes. Cette particularité est justifiée par les recherches expérimentales des ondes libres, du type ondes de houle.

Envisageons le cas d'un fluide de profondeur infinie, en effectuant dans les formules obtenues le passage à la limite pour $H \to \infty$.

Avec cela tenons compte du fait que

$$\lim_{H\to\infty} \frac{\operatorname{sh} k(z+H)}{\operatorname{ch} kH} = \lim_{H\to\infty} \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{ch} kH} = e^{kz}. \tag{XIII.47}$$

Alors suivant (XIII.37)

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma} \sin(kx - \sigma t)\, e^{kz}. \tag{XIII.48}$$

Les projections de la vitesse du mouvement des particules sur les axes de coordonnées pour l'eau profonde sont

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{agk}{\sigma} \cos(kx - \sigma t)\, e^{kz}; \\ v_z &= \frac{agk}{\sigma} \sin(kx - \sigma t)\, e^{kz}, \end{aligned}\right\} \tag{XIII.49}$$

et la vitesse totale de leur mouvement

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \frac{agk}{\sigma} e^{kz}$$

ou en tenant compte de la liaison entre σ et k, déterminée dans le cas de l'eau profonde par la relation (XIII.36)

$$v = a\sigma e^{kz} = \frac{2\pi a}{\tau} e^{\frac{2\pi z}{\lambda}}. \tag{XIII.50}$$

La formule (XIII.50) montre que la vitesse du mouvement des particules diminue intensément avec la profondeur de leur immersion sous la surface libre. Ceci explique le fait bien connu qu'en cas d'une immersion peu profonde d'un sous-marin pendant la tempête, son équipage ne ressent pas de ballottement. La pression dans le fluide en mouvement ondulatoire se détermine par la formule (XIII.11), c'est-à-dire en cas d'ondes sur l'eau profonde

$$p - p_0 = \gamma z + \rho a g \cos(kx - \sigma t)\, e^{kz}.$$

La célérité des ondes en eau profonde en vertu de la formule (XIII.42), étant donné que

$$\lim_{H\to\infty} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda} = 1,$$

se calcule par la relation

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{XIII.51}$$

Il en résulte que le rapport des célérités des ondes de longueur identique dans l'eau de profondeur limitée c_H et en eau profonde c_∞ a la forme

$$\frac{c_H}{c_\infty}=\sqrt{\operatorname{th}\frac{2\pi H}{\lambda}}.$$

Cela signifie qu'en passant à l'eau peu profonde, les ondes de longueur constante ralentissent leur célérité.

Le rapport de la vitesse v du mouvement des particules, disposées sur la surface libre (avec $z_0 = 0$), à la célérité c des ondes en vertu de (XIII.50), si l'on tient compte que $\sigma^2 = gk$, est

$$\frac{v}{c}=\frac{a\sigma}{\frac{\sigma}{k}}=ak=\frac{2\pi a}{\lambda},$$

c'est-à-dire pour les ondes d'amplitude relativement petite $v \ll c$. Les trajectoires du mouvement des particules en cas d'eau profonde s'obtiennent d'après (XIII.46), en tenant compte des passages à la limite

$$\lim_{H\to\infty} a_1=\lim_{H\to\infty} b_1=ae^{kz_0}.$$

Les trajectoires ont la forme de cercles dont l'équation est

$$(x-x_0)^2+(z-z_0)^2=a^2e^{2kz_0}.$$

Les rayons de ces cercles

$$r_0=ae^{kz_0}$$

que possèdent les particules disposées à la surface (avec $z_0 = 0$) sont égaux à l'amplitude de l'onde et diminuent rapidement au fur et à mesure de l'augmentation de la profondeur d'immersion. Ainsi, à la profondeur z_0, égale à la longueur d'onde, le rayon du cercle est 535 fois plus petit que l'amplitude de l'onde.

Les formules, déduites pour les caractéristiques des ondes progressives en eau profonde, peuvent être employées avec un degré de précision suffisant également en cas d'eau de profondeur limitée, si elle dépasse la moitié de la longueur d'onde.

§ 92. ÉNERGIE DES ONDES

Envisageons le problème de calcul de l'énergie d'un fluide qui prend part au mouvement ondulatoire. Son énergie totale E se compose de la somme des énergies cinétique T et potentielle Π. Calculons cette somme pour le volume de fluide $ABCD$ limité par la longueur d'onde (fig. XIII.4). Pour la détermination de l'énergie cinétique, utilisons la formule (VI.32) qui fournit sa valeur en mou-

vement potentiel du fluide

$$T = \frac{\rho}{2} \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Ici la région d'intégration S est limitée en cas d'ondes planes par le fond du bassin DC, les deux sections transversales AD et BC qui se trouvent aux endroits de la disposition des crêtes des ondes, et par le tronçon de la surface libre AB. Le symbole n désigne la direction de la normale extérieure vers le volume de fluide examiné.

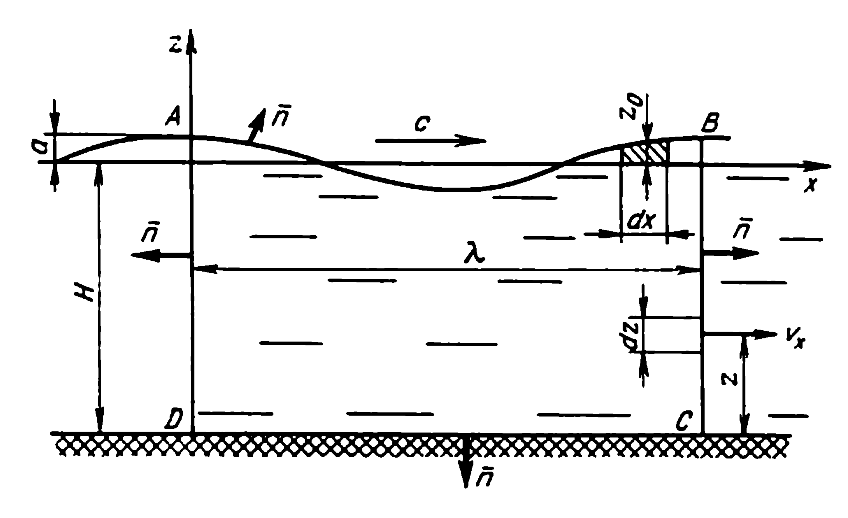


Fig. XIII.4

Sur le fond du bassin est vérifiée la condition d'imperméabilité, suivant laquelle

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{avec} \quad z = -H,$$

c'est-à-dire la partie respective de l'intégrale s'annule. Les intégrales le long des segments verticaux AD et BC donnent en somme également zéro, car les phases du mouvement des particules et, par conséquent, les valeurs de la fonction sous le signe somme sur ces tronçons sont identiques et les normales extérieures (fig. XIII.4) ont des directions contraires. En tenant compte de ces remarques nous trouvons que

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{S_{AB}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

En admettant que la surface des ondes diffère peu de la surface horizontale, nous pouvons écrire que dans cette formule

$$dS = dx, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{avec} \quad z = 0.$$

En utilisant le potentiel (XIII.37), en calculant sa dérivée par rapport à z et enfin en admettant dans la fonction φ et dans sa dérivée $\partial\varphi/\partial z$ $z=0$, après la substitution du résultat obtenu dans l'expression de l'énergie cinétique, on trouve

$$T=\frac{\rho}{2}\int_0^\lambda \frac{a^2g^2}{\sigma^2 \operatorname{ch} kH}\sin^2(kx-\sigma t)\,k \operatorname{sh} kH\,dx.$$

En tenant compte que

$$\int_0^\lambda \sin^2(kx-\sigma t)\,dx=\int_0^\lambda \frac{1-\cos^2(kx-\sigma t)}{2}\,dx=\frac{\lambda}{2},$$

ainsi que d'après (XIII.26)

$$\operatorname{th} kH=\frac{\sigma^2}{kg},$$

nous obtenons

$$T=\frac{\rho g a^2}{4}\lambda. \qquad \text{(XIII.52)}$$

Calculons l'énergie potentielle Π comme excédentaire par rapport à l'énergie potentielle du fluide au repos. Pour le tronçon d'onde de longueur dx, l'énergie potentielle en excédent est égale au produit du poids du volume élémentaire $\gamma z_0 dx$ par la hauteur d'élévation de son centre de gravité $z_0/2$; alors pour un tronçon de longueur λ

$$\Pi=\frac{\gamma}{2}\int_0^\lambda z_0^2\,dx.$$

En utilisant pour z_0 son expression (XIII.38), nous obtenons

$$\Pi=\frac{\rho g a^2}{2}\int_0^\lambda \cos^2(kx-\sigma t)\,dx.$$

La valeur de cette intégrale est égale à l'intégrale du carré du sinus, calculée ci-dessus, c'est-à-dire $\lambda/2$, par conséquent

$$\Pi=\frac{\rho g a^2}{4}\lambda. \qquad \text{(XIII.53)}$$

Comme il suit des formules (XIII.52) et (XIII.53), les énergies cinétique et potentielle des ondes progressives d'amplitude relativement petite sont égales entre elles. L'énergie totale des ondes rapportée à un tronçon de longueur égale à la longueur d'onde est

$$E=T+\Pi=\frac{\rho g a^2}{2}\lambda, \qquad \text{(XIII.54)}$$

c'est-à-dire l'énergie des ondes est proportionnelle au carré de leur amplitude aussi bien pour une profondeur finie que pour une profondeur infinie du fluide. On peut montrer que la formule (XIII.54) est valable également en cas des ondes stationnaires.

Examinons le processus de transfert de l'énergie par les ondes progressives dans un fluide de profondeur limitée. A cet effet, calculons le flux d'énergie E transféré par le fluide pendant la période de l'onde τ à travers une section immobile BC (fig. XIII.4).

Pendant l'intervalle de temps dt par l'élément dz de la section BC est transféré un volume de fluide égal à $dzv_x dt$. L'énergie contenue dans ce volume est égale à la somme des énergies spécifiques cinétique et potentielle $\rho v^2/2 + \gamma z$, multipliée par la valeur du volume transféré. En intégrant cette énergie sur le temps et sur la hauteur, nous déterminerons le flux total

$$E = \int_0^\tau \int_{-H}^0 \left(\frac{\rho v^2}{2} + \gamma z\right) v_x \, dt \, dz. \qquad \text{(XIII.55)}$$

Nous effectuerons les calculs pour un fluide de profondeur infinie, quand $H = \infty$.

Remplaçons dans cette relation la vitesse v du mouvement des particules par sa valeur suivant (XIII.50) et la valeur v_x, suivant (XIII.49). Exprimons la coordonnée z au moyen de la relation (XIII.45) en y tenant compte du passage à la limite (XIII.47). Finalement, nous obtenons

$$E = \int_0^\tau \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\rho}{2} a^2\sigma^2 e^{2kz} + \gamma \frac{agk}{\sigma^2} \cos(kx - \sigma t) e^{kz_0} + z_0\right] \times$$
$$\times \frac{agk}{\sigma} \cos(kx - \sigma t) e^{kz} \, dt \, dz.$$

En tenant compte que

$$\int_0^\tau \cos(kx - \sigma t) \, dt = 0,$$

et

$$\int_0^\tau \cos^2(kx - \sigma t) \, dt = \frac{\tau}{2},$$

nous trouvons

$$E = \gamma \frac{a^2 g^2 k^2 \tau}{\sigma^3} \frac{\tau}{2} \int_{-\infty}^0 e^{2kz} \, dz = \frac{\gamma a^2}{2} \sigma \int_{-\infty}^0 e^{2kz} \, dz.$$

mais

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2kz}\,dz = \left|\frac{e^{kz}}{2k}\right|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2k},$$

par conséquent, en partant de ce que $\sigma/k = c$, nous obtenons

$$E = \frac{\gamma a^2}{2}\,\frac{c}{2}\,\tau.$$

Le facteur $\gamma a^2/2$ dans cette expression représente l'énergie rapportée à l'unité de la longueur d'onde et le produit $c\tau/2$ joue le rôle du chemin de transfert de l'énergie. Ce chemin correspond au transfert de l'énergie à la vitesse

$$u = \frac{c}{2}, \qquad \text{(XIII.56)}$$

c'est-à-dire en eau profonde la vitesse de transfert de l'énergie par les ondes progressives est deux fois moindre que leur célérité

$$E = \frac{\gamma a^2}{2}\,u\tau. \qquad \text{(XIII.57)}$$

A l'aide de la formule (XIII.55) on peut effectuer des calculs identiques également pour les ondes dans un fluide de profondeur finie. La vitesse de transfert de l'énergie étant dans ce cas

$$u = \frac{c}{2}\left(\frac{2kH}{\operatorname{sh} 2kH} + 1\right). \qquad \text{(XIII.58)}$$

En admettant dans cette formule $H \to \infty$, nous passons à la relation obtenue précédemment (XIII.56).

Il est intéressant d'examiner également les cas d'eau de profondeur minimale quand kH est petit. Dans ce cas sh $2kH \approx 2\,kH$, c'est-à-dire $u = c$. Cela signifie qu'en eau peu profonde, lorsque la célérité des ondes $c = \sqrt{gH}$, la vitesse de transfert par celles-ci de l'énergie est égale à la célérité des ondes. Dans tous les autres cas $u < c$.

§ 93. TRAIN D'ONDES

Les ondes marines provoquées par le vent et autres ondes forcées sont généralement le résultat de la superposition des systèmes ondulatoires élémentaires aux caractéristiques proches. Ceci étant, envisageons le cas de la superposition de systèmes d'ondes planes aux amplitudes égales, mais de longueurs différentes et, par conséquent, de périodes différentes également. Admettons que l'ondulation à la surface d'un milieu fluide de profondeur finie résulte de la superposition de deux systèmes d'ondes progressives avec des longueurs proches $\lambda_1 \approx \lambda_2$, c'est-à-dire avec des fréquences proches $\sigma_1 \approx \sigma_2$.

En utilisant le principe de la superposition des potentiels, nous trouvons

$$\varphi = ag\left[\frac{\operatorname{ch} k_1(z+H)}{\sigma_1 \operatorname{ch} k_1 H}\sin(k_1x-\sigma_1 t)+\frac{\operatorname{ch} k_2(z+H)}{\sigma_2 \operatorname{ch} k_2 H}\sin(k_2x-\sigma_2 t)\right].$$

Le profil d'onde résultant, correspondant à ce potentiel, se détermine par la formule (XIII.9)

$$z_0 = a\left[\cos(k_1x-\sigma_1 t)+\cos(k_2x-\sigma_2 t)\right],$$

c'est-à-dire en utilisant la formule de transformation de la somme des cosinus, nous obtenons

$$z_0 = 2a\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}x-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}t\right). \tag{XIII.59}$$

Le résultat de la superposition représente un système d'ondes

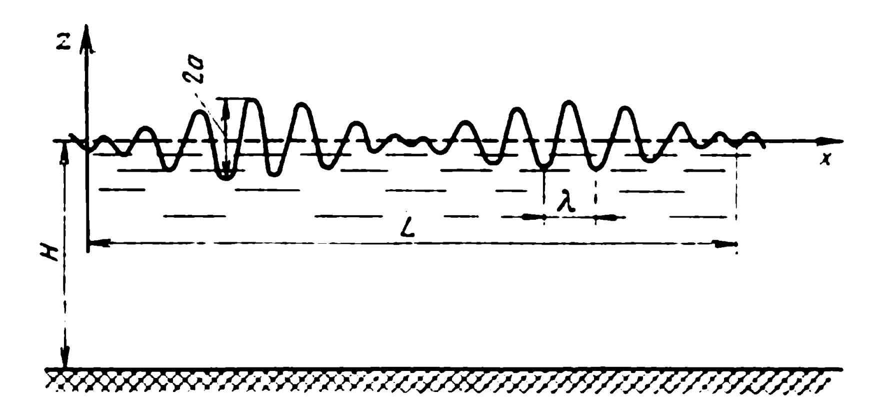


Fig. XIII.5

progressives. A l'instant donné, par exemple pour $t = 0$, le profil d'onde

$$z_0 = 2a\cos\frac{k_1+k_2}{2}x\cos\frac{k_1-k_2}{2}x$$

a son amplitude maximale $2a$. Ce profil, montré sur la fig. XIII.5, représente la superposition d'oscillations de longueur

$$\lambda = \frac{4\pi}{k_1+k_2}$$

sur une oscillation d'onde longue de longueur

$$L = \frac{4\pi}{k_1-k_2}.$$

Les ondes, situées sur un tronçon de l'axe des abscisses de longueur $x = L/2$, forment un groupe d'ondes à amplitude variable, ou ce que l'on appelle un train d'ondes. Dans l'intervalle entre les trains d'ondes, la surface libre du fluide n'est pratiquement pas perturbée.

Chaque onde faisant partie du train d'ondes se déplace avec une célérité

$$c=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{k_1+k_2},$$

et si l'on tient compte que $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma$ et $k_1 \approx k_2 \approx k$, alors la célérité des ondes dans le train se déterminera par la formule ordinaire

$$c=\frac{\sigma}{k}.$$

La célérité c_1 du train d'ondes est

$$c_1=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{k_1-k_2}$$

ou compte tenu que les fréquences sont voisines

$$c_1=\frac{d\sigma}{dk}. \qquad \text{(XIII.60)}$$

La grandeur c_1 est dite célérité de groupe. Déterminons la relation qui existe entre la célérité de groupe et la célérité de phase, en se servant de la formule des ondes dans un fluide de profondeur finie. En partant de la relation (XIII.26) liant σ et k, nous trouvons

$$c_1=\frac{d}{dk}\left(\sqrt{gh\,\mathrm{th}\,kH}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k\,\mathrm{th}\,kH}}\left(\mathrm{th}\,kH+\frac{kH}{\mathrm{ch}^2\,kH}\right)$$

ou

$$c_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\,\mathrm{th}\,kH}{k}}\left(1+\frac{2kH}{\mathrm{sh}\,2kH}\right).$$

Comme la célérité des ondes à la surface du fluide de profondeur finie est

$$c=\sqrt{\frac{g\,\mathrm{th}\,kH}{k}},$$

donc

$$c_1=\frac{c}{2}\left(1+\frac{2kH}{\mathrm{sh}\,2kH}\right). \qquad \text{(XIII.61)}$$

Etant donné que $2kH < \mathrm{sh}\,2kH$, alors il est clair que la célérité de groupe c_1 est généralement inférieure à la célérité des ondes composant le train. Il semble à un observateur que les ondes se forment au bord du train, parcourent vers l'autre bord dans le sens du mouvement du train, mais à une vitesse plus grande, et s'amortissent là-bas.

Dans le cas de l'eau profonde

$$\lim_{H\to\infty}\frac{2kH}{\mathrm{sh}\,2kH}=0$$

et

$$c_1=\frac{c}{2}. \qquad \text{(XIII 62)}$$

En comparant les valeurs données de c_1 avec les valeurs de la vitesse u de transfert de l'énergie dans les ondes (XIII.56) et (XIII.58), nous voyons qu'elles coïncident, c'est-à-dire pour les ondes de même longueur $c_1 = u$. Cela veut dire que l'énergie contenue dans le train d'ondes est transportée avec ce train et il n'y a pas de transmission d'énergie entre des trains d'ondes séparés.

§ 94. ONDES D'AMPLITUDE FINIE

La théorie des ondes d'amplitude relativement petite est construite sur l'hypothèse de la petitesse de la valeur du rapport $\frac{2a}{\lambda}$; cette hypothèse a permis de linéariser la condition aux limites sur la surface du fluide et d'obtenir la solution du problème qui décrit suffisamment bien plusieurs espèces d'ondes de gravité. Cependant, on rencontre souvent des types d'ondes tels pour la description exacte des particularités desquelles il est indispensable d'employer la théorie non linéaire des ondes, c'est-à-dire la théorie dite théorie des ondes d'amplitude finie.

L'élaboration de la théorie non linéaire des ondes représente un problème mathématique extrêmement compliqué, dont la résolution sous la forme générale ne peut jusqu'à présent être considérée comme achevée.

Abordons maintenant le problème des ondes planes d'amplitude finie se propageant avec une célérité c et dont la forme du profil à la surface du fluide est invariable dans le temps.

Pour simplifier la solution et éliminer le temps t du nombre des variables, on peut considérer le mouvement du fluide dans le système de coordonnées x, y comme étant égal à la célérité des ondes. Par rapport à un tel système, le profil des ondes sera immobile. En revanche, la vitesse du fluide à une grande profondeur sera non pas nulle, mais égale à c (fig. XIII.6). En définitive le potentiel de la vitesse φ et la fonction de courant ψ de l'écoulement irrotationnel plan considéré seront fonction seulement des coordonnées des points du fluide, c'est-à-dire

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Le potentiel de la vitesse et la fonction de courant sont des fonctions harmoniques satisfaisant à l'équation de Laplace et aux conditions de Cauchy-Riemann.

Les conditions aux limites du problème envisagé consistent en ceci. Le profil de l'onde dans le système de coordonnées adopté est une ligne de courant immobile. Alors, en vertu de la propriété des lignes de courant il faut poser pour ce profil, qui constitue la frontière de l'écoulement,

$$\psi = 0 \quad \text{avec } y = y_0, \tag{XIII.63}$$

où y_0 sont les ordonnées inconnues de la surface de l'onde.

Ensuite, en admettant la pression à la surface libre constante égale à p_0, nous pouvons, en utilisant l'intégrale d'Euler, écrire que le long du profil de l'onde est réalisée la condition

$$\frac{\rho v^2}{2}+\gamma y_0=C, \qquad \text{(XIII.64)}$$

où v est la vitesse du fluide en des points du profil ondulatoire dans le mouvement ondulatoire transformé.

A une grande profondeur avec $y \to -\infty$ la vitesse du fluide tend vers la célérité transformée des ondes, c'est-à-dire

$$v \to c \quad \text{avec } y \to -\infty, \qquad \text{(XIII.65)}$$

et

$$\psi \to -\infty.$$

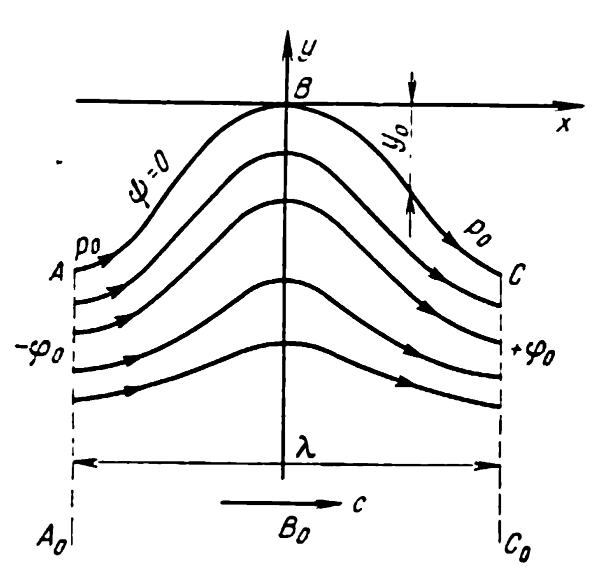


Fig. XIII.6

En outre, l'image de l'écoulement est périodique, c'est-à-dire se répète à la variation de l'abscisse x de la valeur λ. La complexité du problème réside dans le fait que les conditions (XIII.63) et (XIII.64) déterminant la fonction $w(z)$ sont données sur une surface curviligne inconnue à l'avance. Pour éliminer partiellement ces difficultés, on peut recourir au procédé suivant.

Introduisons un nouveau plan de la variable complexe $w(\varphi, \psi)$ avec des axes réel φ et imaginaire ψ (fig. XIII.7). Alors à un point quelconque $D(x, y)$ de l'écoulement dans le plan z avec les valeurs de φ et ψ données correspondra univoquement un certain point $D(\varphi, \psi)$ dans le plan de la nouvelle variable complexe w. Les lignes φ = const et ψ = const dans le plan z passeront dans le plan w sous la forme de droites parallèles aux axes. On peut donc considérer que la fonction $w(z)$ réalise la représentation conforme de la région de l'écoulement, s'effectuant dans le plan physique z, sur le plan w. Mais dans ce cas il doit alors exister sa fonction inverse $z = f(w)$, c'est-à-dire $z = f(\varphi, \psi)$ qui réalise univoquement la représentation inverse. La recherche de cette fonction inverse $f(w)$ dans plusieurs cas, y compris le cas examiné, se trouve plus simple que la résolution directe du problème. Le procédé indiqué trouve un large emploi dans la résolution de nombreux problèmes de la mécanique des fluides.

Considérons la région représentée de l'écoulement, limitant une longueur d'onde de $x = \frac{\lambda}{2}$ jusqu'à $x = -\frac{\lambda}{2}$ (fig. XIII.6) dans

le plan w (fig. XIII.7). Au tronçon de la surface de l'onde ABC correspond une valeur $\psi = 0$. Le potentiel φ le long de ce tronçon varie d'une façon monotone en augmentant de A à C. Comme dans les sections AA_0, BB_0 et CC_0 les vitesses de l'écoulement sont parallèles à l'axe des x, les droites de ces sections sont les lignes d'égal potentiel. Si l'on admet que dans la section BB_0 $\varphi = 0$ alors dans les sections AA_0 et CC_0 par raison de symétrie il faut poser $\varphi = -\varphi_0$ et $\varphi = \varphi_0$. En définitive, au tronçon ABC sur le plan w correspond le segment d'axe réel $A_1B_1C_1$, à la section AA_0, la droite A_1A_{01} et à la section CC_0, la droite C_1C_{01}, c'est-à-dire à la zone d'écoulement limitée par la longueur d'onde correspond dans le plan w la région à l'intérieur d'une bande semi-infinie. Maintenant la condition aux limites complexe (XIII.64) doit se vérifier sur le segment de droite A_1C_1.

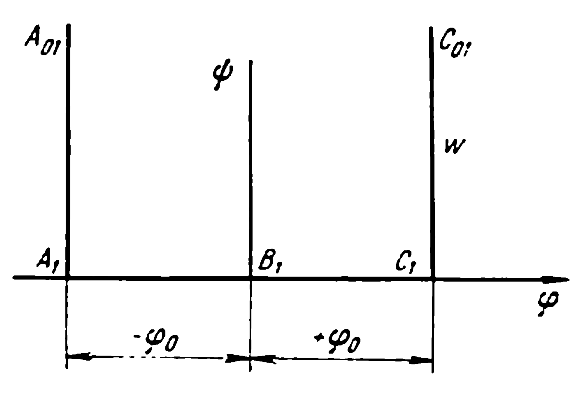


Fig. XIII.7

Pour réduire cette condition aux limites à une forme commode pour les calculs, exprimons la vitesse complexe de l'écoulement

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y$$

par de nouvelles variables τ et θ

$$\frac{dw}{dz} = ce^{\tau - i\theta}, \tag{XIII.66}$$

c'est-à-dire posons que le module de la vitesse au point donné

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = v = ce^{\tau}, \tag{XIII.67}$$

où θ est l'angle d'inclinaison du vecteur de la vitesse sur l'axe des x.

Les nouvelles variables τ et θ, de même que z, sont des fonctions de w, c'est-à-dire en fin de compte de φ et ψ, et pour elles, comme pour les fonctions de la variable complexe, sont valables les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = \frac{\partial\tau}{\partial\psi}; \quad \frac{\partial\theta}{\partial\psi} = -\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}. \tag{XIII.68}$$

Introduisons dans la condition (XIII.64) de nouvelles variables en tenant compte qu'elle est remplie le long de la ligne de courant $\psi = 0$. Par conséquent, le long de cette ligne, dont l'élément d'arc est ds, les valeurs v, θ et τ sont des fonctions seulement de φ. Dérivons

cette condition par rapport à s

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \gamma \frac{\partial y_0}{\partial s} = 0. \qquad \text{(XIII.69)}$$

Maintenant tenons compte qu'en vertu de (XIII.67)

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = ce^{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi}.$$

La dérivée $\frac{\partial y_0}{\partial s}$ est égale au sinus de l'angle d'inclinaison de la tangente sur la ligne de courant $\psi = 0$ par rapport à l'axe des x, c'est-à-dire dans le cas donné $\sin\theta$, et $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = v$. En substituant ces dépendances dans (XIII.69), nous obtenons

$$\rho v^2 ce^{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} + \gamma \sin\theta = \rho v^3 \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} + \gamma \sin\theta = 0.$$

En utilisant maintenant la seconde des conditions (XIII.68) ainsi que la relation (XIII.67), nous trouvons que

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = \frac{g}{c^3} e^{-3\tau} \sin\theta \text{ avec } \psi = 0. \qquad \text{(XIII.70)}$$

Les fonctions θ et τ doivent satisfaire non seulement à cette condition aux limites, mais suivant (XIII.65) également à la condition

$$\theta = 0 \text{ avec } \psi = -\infty, \qquad \text{(XIII.71)}$$

ainsi qu'aux conditions dans les sections verticales AA_0, BB_0 et CC_0, d'après lesquelles

$$\theta = 0 \text{ avec } \varphi = 0 \text{ et } \varphi = \pm\varphi_0. \qquad \text{(XIII.72)}$$

Le problème de la recherche de la fonction périodique harmonique $\tau - i\theta$ de période $2\varphi_0$ et respectant les conditions (XIII.70)-(XIII.72) permet, en utilisant par la suite la relation (XIII.66), d'étudier les propriétés des ondes d'amplitude finie sur la surface d'un fluide de profondeur infinie.

En cas de la profondeur finie du fluide, toutes les conditions restent les mêmes, sauf (XIII.71), qui en eau peu profonde doit être remplie pour $y = -H$, c'est-à-dire pour une certaine valeur $\psi = -\psi_1 = \text{const}$; l'image de l'écoulement dans le plan w est un rectangle fermé.

La position de problème ainsi énoncée reste valable également pour l'onde solitaire. Pour une telle onde, qui ne possède qu'une seule intumescence, la condition de périodicité n'a aucune importance et est remplacée par la condition

$$v = c \text{ avec } x = \pm\infty,$$

c'est-à-dire

$$\tau + i\theta = 0 \text{ avec } \varphi = \pm\infty.$$

Cependant, jusqu'à ces derniers temps on n'est pas encore parvenu à obtenir la solution exacte de l'équation (XIII.70) sous la forme générale. Dans les travaux exécutés par Stokes, A. Nékrassov, Levi-Civita, Davis et autres [5], [22] la résolution s'effectuait au moyen de méthodes approchées très difficiles qui avaient permis de se faire une idée sur les particularités des ondes d'amplitude finie. Les résultats de ces solutions se trouvent en accord avec les données des observations des ondes.

La particularité caractéristique des ondes d'amplitude finie consiste non seulement en ce que leur vitesse de propagation est liée à la longueur d'onde, comme il a été établi par la théorie linéaire des ondes, mais aussi à leur hauteur. Ainsi, par exemple, en eau profonde la célérité des ondes peut être déterminée par la formule de L. Sréteuski

$$c=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\left[1+\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4+\dots\right]},$$

qui pour $\frac{2a}{\lambda}\to 0$ se transforme en formule connue de la théorie linéaire des ondes.

L'aspect du profil d'onde peut approximativement être représenté par la formule de Stokes

$$y_0=\frac{\pi a^2}{\lambda}+a\cos\frac{2\pi}{\lambda}x-\left(\frac{\pi a^2}{\lambda}+\frac{17}{6}\frac{\pi^2a^3}{\lambda^2}\right)\cos 2\frac{2\pi}{\lambda}x+$$
$$+\frac{3}{2}\frac{\pi^2a^3}{\lambda^2}\cos 3\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{8}{3}\frac{\pi^3a^4}{\lambda^3}\cos 4\frac{2\pi}{\lambda}x\dots$$

Ce profil rappelle une trochoïde; son contour, par rapport aux ondes cosinusoïdales, est plus aigu aux sommets et plus doux dans la région du creux. A partir de cette relation pour $\frac{a}{\lambda}\to 0$, on obtient la formule du profil d'onde de faible amplitude.

Dans les ondes considérées, on observe le transfert de fluide du côté de déplacement de l'onde. Ceci montre que les trajectoires des particules, au lieu de cercles fermés, représentent des courbes non fermées. La vitesse de l'écoulement ondulatoire superficiel peut se calculer par la formule

$$v=a^2e^{\frac{4\pi y}{\lambda}}\sqrt{g\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3}.$$

Comme on le voit d'après cette formule, la vitesse de déplacement des particules, en diminuant intensément au fur et à mesure que la profondeur augmente $-y$, a la plus grande valeur dans la couche superficielle avec $y=0$.

L'étude de la condition de continuité de l'écoulement montre que les ondes permanentes de type considéré ne peuvent exister

que lorsque l'angle à la crête de leur profil dépasse 120°. Avec des sommets plus aigus il se produit la destruction des crêtes, qui est l'origine du moutonnement des vagues. La valeur théorique maxi male des hauteurs relatives des ondes qui se détruisent est $\frac{2a}{\lambda} = 0{,}142$; cette valeur constitue la hauteur relative limite de l'onde.

Les valeurs des énergies cinétique T et potentielle Π se trouvent également autres que pour les ondes de faible amplitude sur le tronçon égal à la longueur d'onde

$$T = \frac{\gamma a^2}{4}\left(1 - 5\pi^2 \frac{a^2}{\lambda^2}\right)\lambda;$$

$$\Pi = \frac{\gamma a^2}{4}\left(1 - 7\pi^2 \frac{a^2}{\lambda^2}\right)\lambda,$$

c'est-à-dire dans le cas donné $\Pi \neq T$; leur égalité devient possible seulement pour $\frac{a}{\lambda} \to 0$.

Une onde solitaire représentant une intumescence se déplaçant à la surface d'un fluide de profondeur finie peut être examinée dans le cadre de la théorie non linéaire énoncée ci-dessus comme le cas limite de l'onde progressive dont la longueur tend vers l'infini. L'équation du profil de l'onde solitaire par rapport à l'origine des coordonnées, située à la surface du fluide au repos, a pour expression

$$y_0 = \frac{a}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2H}\sqrt{\frac{3a}{H+a}}\right)},$$

où a est la hauteur de l'onde solitaire. Cette hauteur est toujours inférieure à la profondeur du bassin H, puisque avec $a \gg H$ l'onde devient instable et se détruit, l'angle au sommet atteignant 120°. La célérité de l'onde se détermine par la formule

$$c = \sqrt{g(H+a)}$$

qui pour $a \ll H$ correspond à la formule de la célérité limite des ondes d'amplitude relativement petite en eau peu profonde.

Lors du passage d'une onde solitaire, les trajectoires des particules ne sont pas fermées et sont proches des arcs des paraboles avec des sommets tournés vers le haut. La voie de déplacement des particules est $\frac{S_0}{H}$ où S_0 est la surface du profil d'onde au-dessus du niveau primitif du liquide. La vitesse du déplacement horizontal des particules dans le sens de propagation de l'onde est

$$v_x = \frac{ca}{H} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2H}\sqrt{\frac{3a}{H+a}}\right)}.$$

Le transfert de l'énergie par les ondes solitaires s'effectue avec une vitesse égale à leur célérité.

§ 95. POSITION GÉNÉRALE DU PROBLÈME DE LA HOULE LORS D'UN ÉCOULEMENT AUTOUR DES CORPS AU VOISINAGE DE LA SURFACE D'UN FLUIDE

Lorsqu'un corps se déplace dans un fluide au voisinage ou sur la surface libre, sur celle-ci apparaissent des ondes forcées. L'image de cette houle a un caractère compliqué. Les vitesses supplémentaires de fluide induites par la houle influent sur la loi de la répartition de la pression à la surface du corps. Il en résulte que sur un corps commencent à agir des forces et des moments hydrodynamiques de nature ondulatoire. La détermination de ces forces, ainsi que de l'aspect des ondes forcées suivant la forme du corps, la vitesse et autres conditions de son mouvement est un problème important de l'hydrodynamique, ayant une grande importance pour l'étude du mouvement des navires, des sous-marins, des bateaux à aile sous-marine, etc. A l'étude de ce problème, on admet dans la théorie des ondes, comme toujours, que le mouvement du fluide est potentiel.

Etudions le cas du mouvement d'un corps avec une vitesse constante v_∞ sous la surface d'un fluide. Les hauteurs des ondes forcées, provoquées par le mouvement du corps, seront supposées petites devant leur longueur. Ceci permettra par la suite de considérer comme petites les vitesses induites par le mouvement ondulatoire et, en négligeant les carrés des petites valeurs, d'obtenir la théorie linéaire des ondes forcées. L'hypothèse faite sur la petite hauteur relative des ondes est valable pour un corps de forme quelconque s'il se déplace profondément au-dessous de la surface libre, ainsi que pour les corps qui se déplacent à la surface, si leur forme est telle que les vitesses des particules de fluide induites par eux peuvent être considérées petites; une telle forme est caractéristique pour des corps allongés ou minces.

Pour réduire le problème à l'étude du mouvement permanent, utilisons le principe d'inversion, c'est-à-dire nous examinerons l'écoulement autour d'un corps immobile disposé au-dessous de la surface libre d'un fluide dont la vitesse à l'infini en aval est v_∞. Choisissons un système de coordonnées fixe x, y, z dont l'origine se trouve à la surface libre non perturbée (fig. XIII.8). Le problème de l'écoulement autour du corps et de la houle sera résolu si l'on arrive à déterminer le potentiel Φ_0 du mouvement relatif du fluide. Dans ce mouvement le potentiel ne dépend pas du temps, et les ondes forcées sont immobiles par rapport au système de coordonnées choisi.

Le potentiel Φ_0 satisfait à l'équation de Laplace et se compose de la somme des potentiels de l'écoulement parallèle et du potentiel φ des vitesses induites, y compris les vitesses des particules dans le mouvement ondulatoire

$$\Phi_0 = -v_\infty x + \varphi(x, y, z). \tag{XIII.73}$$

Cette relation montre que le potentiel inconnu φ doit également satisfaire à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

Pour résoudre cette équation, il est indispensable de formuler les conditions aux limites auxquelles satisfait la fonction φ. Ces conditions aux limites se superposent à la fonction φ sur la surface du corps, sur la surface libre du fluide et à l'infini.

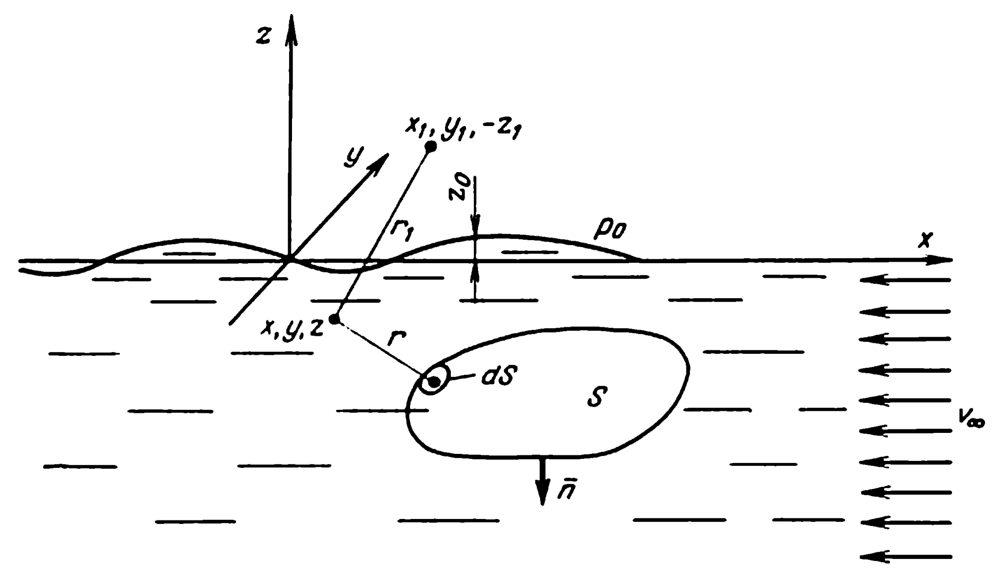


Fig. XIII.8

Le long de la surface solide S du corps est observée la condition d'imperméabilité et de l'écoulement sans décollement, d'après laquelle la vitesse doit être dirigée suivant une tangente à la surface S. Ceci signifie que le long de S

$$v_n=\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}=0,$$

et si l'on y substitue la valeur de Φ_0 et on tient compte que

$$\frac{\partial x}{\partial n}=\cos(n,\ x),$$

alors

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=v_\infty\cos(n,\ x). \qquad \text{(XIII.74)}$$

Sur la surface libre du fluide est observée la condition de la constance de la pression, c'est-à-dire $p=p_0$. En écrivant l'intégrale d'Euler pour les points situés sur la surface du fluide loin en aval du corps, où les ondes sont absentes, et à l'endroit de la disposition du

corps où $z = z_0$, nous obtenons

$$p_0 + \frac{\rho v_\infty^2}{2} = p_0 + \gamma z_0 + \frac{\rho v^2}{2}.$$

En tenant compte que $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ et d'après (XIII.73)

$$v_x = -v_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{XIII.75}$$

et en négligeant les carrés des vitesses induites, nous obtenons

$$z_0 = \frac{v_\infty}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{XIII.76}$$

Par raison de linéarité du problème, nous pouvons considérer cette condition comme étant réalisée non pour $z = z_0$, mais pour $z = 0$.

Sur la surface libre, qui sert de surface de courant, la composante v_z de la vitesse du mouvement des particules peut être calculée d'après les règles de la cinématique du point

$$v_z = \frac{dz_0}{dt} = \frac{\partial z_0}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z_0}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

En prenant en considération que pour une particule fluide $\frac{dx}{dt} = v_x$; $\frac{dy}{dt} = v_y$ et en tenant compte de l'expression (XIII.75) nous trouvons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial z_0}{\partial x}\left(-v_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial z_0}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

En admettant les angles d'inclinaison de la surface ondulatoire sur l'horizontale, c'est-à-dire les dérivées $\partial z_0/\partial x$ et $\partial z_0/\partial y$, petits et en négligeant dans cette relation les produits de petites valeurs, nous obtenons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -v_\infty \frac{\partial z_0}{\partial x}.$$

En calculant la dérivée $\partial z_0/\partial x$ par dérivation de (XIII.75) et en rapportant cette condition au plan $z = 0$, nous trouvons la condition pour le potentiel à la surface libre sous la forme

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{g}{v_\infty^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ avec } z = 0. \tag{XIII.77}$$

A une grande profondeur, c'est-à-dire pour $z = -\infty$, les vitesses induites v tendent vers zéro

$$\varphi = 0 \text{ avec } z = -\infty. \tag{XIII.78}$$

En cas d'un fluide de profondeur finie H cette condition est remplacée par la condition d'imperméabilité pour le fond du bassin

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \text{ avec } z=-H. \qquad \text{(XIII.79)}$$

Enfin, pour assurer l'unicité de la solution du problème, c'est-à-dire pour exclure la superposition à la solution des ondes libres, dont le potentiel satisfait également aux conditions (XIII.77) et (XIII.78), il faut exiger que loin en amont du corps les vitesses induites soient absentes, c'est-à-dire

$$\varphi=0 \text{ avec } x=+\infty. \qquad \text{(XIII.80)}$$

Dans ce cas la surface libre du fluide loin en amont du corps sera horizontale.

Par conséquent, la solution du problème de la houle en mouvement d'un corps se ramène à l'intégration de l'équation de Laplace pour la fonction φ avec l'observation des conditions aux limites (XIII.77), (XIII.78) et (XIII.80) en cas de l'eau profonde et (XIII.77), (XIII.79) et (XIII.80) en cas de liquide de profondeur limitée.

L'équation des ordonnées de la surface libre peut être trouvée au moyen de (XIII.76), la pression en tout point peut être déterminée en utilisant l'intégrale d'Euler.

Etant donné que l'équation de Laplace et les conditions aux limites sont linéaires, on peut utiliser pour la recherche de la fonction φ, de même qu'en écoulement autour des corps d'un fluide illimité, le principe de superposition des solutions simples. En particulier, dans l'étude de contournement des corps par un courant continu on utilisait largement la méthode de remplacement du corps dans l'écoulement par des sources, des dipôles, des tourbillons, c'est-à-dire par des singularités hydrodynamiques. Cette méthode est également applicable au cas examiné, mais à condition que le potentiel des singularités respectives satisfasse non seulement à l'équation de Laplace, mais aussi à toutes les conditions aux limites formulées ci-dessus. Ceci signifie qu'il faut préalablement résoudre les problèmes particuliers relatifs à l'écoulement autour d'un source ou d'un tourbillon au-dessous de la surface libre du fluide.

§ 96. PROBLÈME PLAN DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR DES CORPS SOUS LA SURFACE LIBRE D'UN FLUIDE

Le problème plan de la houle dans le cas de l'écoulement autour des corps se résout très efficacement par les méthodes basées sur l'utilisation des propriétés des fonctions de la variable complexe. Pour cela, il est commode de considérer le mouvement comme s'effectuant dans le plan de la variable complexe $z=x+iy$. Pour utiliser les équations obtenues dans le paragraphe précédent, nous admet-

trons que l'axe réel coïncide avec l'axe des x et l'axe imaginaire des y avec l'axe des z dans un système de coordonnées à trois dimensions. Dans le cas considéré, le potentiel des vitesses induites φ sera fonction de x et de y. En outre, dans l'écoulement plan il existe une fonction de courant $\psi(x, y)$ des vitesses induites et on peut composer une fonction caractéristique

$$w(z)=\varphi(x, y)+i\psi(x, y), \tag{XIII.81}$$

φ et ψ étant liés par les conditions de Cauchy-Riemann.

La vitesse complexe induite est

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{XIII.82}$$

Le problème de l'écoulement autour d'un contour plan sera résolu si l'on arrive à trouver la fonction $w(z)$ qui devra satisfaire à la condition (XIII.77) sur la surface libre. En tenant compte de ce que l'axe des y est maintenant l'axe vertical, on peut écrire cette condition pour le problème plan sous la forme

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{g}{v_\infty^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \text{ avec } y=0.$$

En comparant cette condition aux expressions (XIII.81) et (XIII.82) et en tenant compte également de la condition de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

remarquons que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\operatorname{Im}\frac{dw}{dz}; \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\operatorname{Im} i\frac{d^2w}{dz^2},$$

c'est-à-dire la condition sur la surface libre pour la fonction $w(z)$ peut s'écrire ainsi

$$\operatorname{Im}\left(i\frac{d^2w}{dz^2}-\frac{g}{v_\infty^2}\frac{dw}{dz}\right)=0 \text{ pour } y=0. \tag{XIII.83}$$

Récrivons les conditions (XIII.78) et (XIII.80) relatives à l'absence des vitesses induites de la manière suivante:

$$\frac{dw}{dz}=0 \text{ avec } y=-\infty; \tag{XIII.84}$$

$$\frac{dw}{dz}=0 \text{ avec } x=+\infty. \tag{XIII.85}$$

Les conditions aux limites (XIII.83)-(XIII.85) combinées avec (XIII.74) permettent de déterminer la fonction analytique $w(z)$ caractérisant le champ des vitesses induites de l'écoulement.

Une méthode assez générale de résolution des problèmes plans des ondes forcées, basée sur les propriétés des fonctions de la variable complexe, a été élaborée par M. Keldyche. Considérons cette méthode sur l'exemple de l'étude de l'écoulement autour d'un tourbillon plan avec circulation Γ, située sous la surface libre en un point de coordonnées $x = 0$, $y = -ih$ (fig. XIII.9). La solution du problème se ramène à la recherche de la fonction caractéristique $w(z)$ des vitesses induites par le tourbillon. Cette fonction, dans la région occupée par le fluide, c'est-à-dire dans le demi-plan inférieur de la variable complexe z, peut être représentée sous la forme

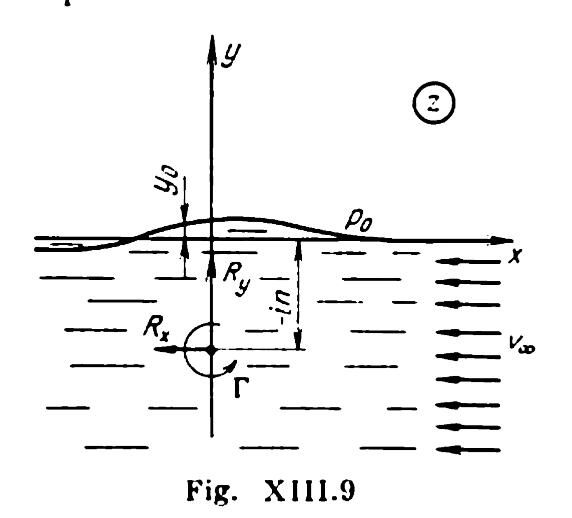


Fig. XIII.9

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + ih) + P(z). \quad \text{(XIII.86)}$$

Le premier terme correspond à un tourbillon dans un fluide illimité, disposé au point $z = -ih$, et le second terme représente une fonction holomorphe, c'est-à-dire n'ayant pas de points singuliers dans la région de l'écoulement.

M. Keldyche a proposé d'examiner dans tout le plan z une nouvelle fonction de la variable complexe

$$F(z) = i\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{g}{v_\infty^2}\frac{dw}{dz}. \quad \text{(XIII.87)}$$

Si l'on substitue dans cette fonction l'expression de (XIII.86), on peut obtenir

$$F(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{(z+ih)^2} - \frac{g\Gamma}{v_\infty^2 2\pi i}\frac{1}{z+ih} +$$

$$+ iP''(z) + \frac{g}{v_\infty^2}P'(z). \quad \text{(XIII.88)}$$

De cette expression il résulte que la fonction $F(z)$ possède un point singulier avec $z = -ih$ et les deux derniers termes sont holomorphes dans toute la région de l'écoulement. Suivant la condition aux limites (XIII.83), la fonction de Keldyche $F(z)$ a une valeur réelle sur l'axe des x. Cette condition permet, par raison du principe de symétrie de Schwartz, de prolonger la fonction $F(z)$ sur le demi-plan supérieur. Les valeurs de la fonction en des points du demi-plan supérieur, symétriques par rapport à l'axe des x, se déterminent comme des valeurs conjuguées complexes. D'après ce principe, dans le demi-plan supérieur la fonction $F(z)$ aura un

point singulier pour $z = ih$ avec des singularités conjuguées complexes correspondant à la formule (XIII.88). En définitive, pour tout le plan z la fonction $F(z)$ peut être représentée sous la forme d'une somme (XIII.88) et de sa valeur conjuguée complexe

$$F(z)=i\frac{d^2w}{dz^2}-\frac{g}{v_\infty^2}\frac{dw}{dz}=-\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z+ih)^2}-$$
$$-\frac{g\Gamma}{v_\infty^2 2\pi i}\frac{1}{z+ih}-\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z-ih)^2}+\frac{g\Gamma}{v_\infty^2 2\pi i}\frac{1}{z-ih}+$$
$$+iP''(z)-\frac{g}{v_\infty^2}P'(z)-i\bar{P}''(z)-\frac{g}{v_\infty^2}\bar{P}'(z). \quad \text{(XIII.89)}$$

La somme des quatre derniers termes représente une fonction qui n'a pas de points singuliers dans l'écoulement, et peut caractériser les ondes libres. On doit poser cette somme nulle, étant donné que les ondes libres doivent être, d'après (XIII.85), éliminées de la solution.

Maintenant la relation (XIII.89) peut être considérée comme une équation différentielle hétérogène ordinaire par rapport à la fonction $w(z)$

$$w''-\frac{g}{v_\infty^2 i}w'=\frac{\Gamma}{2\pi i}\times$$
$$\times\left[-\frac{1}{(z+ih)^2}-\frac{1}{(z-ih)^2}-\frac{g}{iv_\infty^2}\frac{1}{z+ih}+\frac{g}{iv_\infty^2}\frac{1}{z-ih}\right]. \quad \text{(XIII.90)}$$

L'équation caractéristique, correspondant à une équation différentielle homogène, s'écrit

$$k^2-\frac{g^2}{iv_\infty^2}k=0$$

avec des racines $k_1 = 0$ et $k_2 = g/iv_\infty^2$.

Par conséquent, on peut écrire que

$$w(z)=A+Be^{-\frac{igz}{v_\infty^2}}. \quad \text{(XIII.91)}$$

Pour obtenir l'intégrale de l'équation hétérogène (XIII.90) employons la méthode de Lagrange de variation des constantes arbitraires, c'est-à-dire posons que A et B sont des fonctions inconnues de z. Finalement nous obtenons le système d'équations suivant:

$$\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}e^{-\frac{igz}{v_\infty^2}}=0,$$
$$-\frac{dB}{dz}\frac{ig}{v_\infty^2}e^{-\frac{igz}{v_\infty^2}}=\frac{\Gamma}{2\pi i}\times$$
$$\times\left[-\frac{1}{(z+ih)^2}-\frac{1}{(z-ih)^2}-\frac{g}{iv_\infty^2}\left(\frac{1}{z+ih}-\frac{1}{z-ih}\right)\right].$$

Lors de l'intégration de ce système, introduisons la variable t et calculons les intégrales avec limite supérieure variable de $+\infty$ à z. La limite inférieure, l'infinité, est choisie pour éviter les vitesses induites avec $z=+\infty$.

Ici les intégrales se ramènent aux trois types suivants:

$$\int \frac{dt}{t \pm ih} = \ln (t \pm ih)\,; \quad \int \frac{dt}{(t+ih)^2} = -\frac{1}{t \pm ih}\,;$$

$$\int \frac{e^{\frac{igt}{v_\infty^2}}\,dt}{(t \pm ih)^2} = -\frac{e^{\frac{igt}{v_\infty^2}}}{t \pm ih} + \frac{ig}{v_\infty^2} \int \frac{e^{\frac{igt}{v_\infty^2}}\,dt}{t \pm ih}\,.$$

Finalement. en substituant les limites, nous trouvons

$$A = -\frac{\Gamma v_\infty^2}{2\pi g}\left(\frac{1}{z+ih} + \frac{1}{z-ih}\right) - \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln \frac{z+ih}{z-ih}\,;$$

$$B = \frac{\Gamma v_\infty^2}{2\pi g}\left(\frac{e^{\frac{igz}{v_\infty^2}}}{z+ih} + \frac{e^{\frac{igz}{v_\infty^2}}}{z-ih} - \frac{2ig}{v_\infty^2} \int\limits_\infty^z \frac{e^{\frac{igt}{v_\infty^2}}\,dt}{t-ih}\right).$$

En substituant ces expressions dans (XIII.91), nous obtenons

$$w(z) = -\frac{\Gamma i}{2\pi} \ln \frac{z+ih}{z-ih} - \frac{i\Gamma}{\pi} e^{-\frac{igz}{v_\infty^2}} \int\limits_\infty^z \frac{e^{\frac{igt}{v_\infty^2}}\,dt}{t-ih}\,. \quad \text{(XIII.92)}$$

La limite de cette fonction avec $z \to +\infty$ est nulle, c'est-à-dire les vitesses induites sont absentes à l'infini et l'unicité de la solution est assurée.

La fonction caractéristique complète de l'écoulement autour du tourbillon $w_0(z)$ pourra maintenant s'écrire

$$w_0(z) = -v_\infty z + w(z).$$

La vitesse complexe d'écoulement autour du tourbillon se détermine par dérivation par rapport à z de la fonction $w_0(z)$. En dérivant le dernier terme. il faut tenir compte dans la fonction $w(z)$ de la règle de calcul des dérivées des intégrales avec limite supérieure variable

$$\frac{dw_0}{dz} = -v_\infty - \frac{\Gamma i}{2\pi}\left(\frac{1}{z+ih} - \frac{1}{z-ih}\right) -$$

$$-\frac{\Gamma g}{\pi v_\infty^2} e^{-\frac{igz}{v_\infty^2}} \int\limits_\infty^z \frac{e^{\frac{igt}{v_\infty^2}}\,dt}{t-ih}\,. \quad \text{(XIII.93)}$$

Calculons les composantes de la réaction hydrodynamique s'exerçant sur le tourbillon en utilisant la formule du théorème de

Joukovski (XII.46). D'après ce théorème, la réaction hydrodynamique conjuguée

$$R_x - iR_y = i\rho\Gamma(v_{x_1} - iv_{y_1}),$$

c'est-à-dire

$$R_x = \rho\Gamma v_{y_1};$$
$$R_y = -\rho\Gamma v_{x_1},$$

où $v_{x_1} - iv_{y_1} = dw_1/dz$ est la vitesse complexe d'un écoulement hétérogène à l'endroit de la disposition du tourbillon. Dans notre cas

$$\frac{dw_1}{dz} = \frac{dw_0}{dz} - \frac{\Gamma i}{2\pi}\frac{1}{z+ih} \quad \text{avec} \quad z = -ih,$$

c'est-à-dire compte tenu de (XIII.93)

$$\frac{dw_1}{dz} = v_{x_1} - iv_{y_1} = -v_\infty + \frac{\Gamma}{4\pi h} - \frac{\Gamma g}{\pi v_\infty^2} e^{-\frac{gh}{v_\infty^2}} \int_\infty^{ih} \frac{e^{\frac{igt}{v_\infty^2}} dt}{t - ih}.$$

En remplaçant la variable $u_0 = \frac{ig}{v_\infty^2}(t - ih)$ et en employant le théorème des résidus de Cauchy, on peut représenter l'intégrale figurant dans le dernier terme sous la forme suivante

$$\int_\infty^{ih} \frac{e^{\frac{igt}{v_\infty^2}} dt}{t - ih} = e^{-\frac{gh}{v_\infty^2}} \int_{-\infty}^{\frac{2gh}{v_\infty^2}} \frac{e^{u_0}\,du_0}{u_0} = e^{-\frac{gh}{v_\infty^2}} \times$$
$$\times\left[Ei_1\left(\frac{2gh}{v_\infty^2}\right) - \pi i\right]. \qquad \text{(XIII.94)}$$

La fonction

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{e^{u_0}\,du_0}{u_0} = Ei(z)$$

s'appelle fonction exponentielle intégrale et $Ei_1(x) = \text{Reel } Ei(z)$ partie réelle de cette fonction. Par suite, l'expression pour dw_1/dz peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dw_1}{dz} = -v_\infty + \frac{\Gamma}{4\pi h} + \frac{i\Gamma g}{v_\infty^2} e^{-\frac{2gh}{v_\infty^2}} -$$
$$-\frac{\Gamma g}{\pi v_\infty^2} Ei_1\left(\frac{2gh}{v_\infty^2}\right) e^{-\frac{2gh}{v_\infty^2}}. \qquad \text{(XIII.95)}$$

En portant cette valeur de la vitesse dans la formule du théorème de Joukovski et en séparant les parties réelle et imaginaire, nous

trouvons

$$R_x = -\frac{\rho g \Gamma^2}{v_\infty^2} e^{-\frac{2gh}{v_\infty^2}}; \qquad \text{(XIII.96)}$$

$$R_y = \rho \Gamma v_\infty - \rho \frac{\Gamma^2}{4\pi h} + \frac{\rho g \Gamma^2}{\pi v_\infty^2} e^{-\frac{2gh}{v_\infty^2}} Ei_1\left(\frac{2gh}{v_\infty^2}\right). \qquad \text{(XIII.97)}$$

La composante R_x (fig. XIII.9) dans le cas donné représente la résistance ondulatoire du tourbillon et la composante R_y la force portante du tourbillon, calculée compte tenu de l'influence exercée sur sa valeur par la surface libre du fluide. Le premier terme dans la formule (XIII.97) correspond à la force portante du tourbillon dans le fluide illimité, le second terme tient compte de l'influence de la surface comme paroi solide et le troisième, l'influence de la houle.

Maintenant, en utilisant la formule (XIII.76) que l'on doit récrire dans le cas donné sous la forme

$$y_0 = \frac{v_\infty}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{v_\infty}{g} \operatorname{Reel}\left(\frac{dw}{dz}\right) \text{ avec } y = 0,$$

on peut obtenir l'équation des ordonnées de la surface libre.

Considérons l'aspect de la surface libre à l'infini en aval du tourbillon, c'est-à-dire pour $z \to -\infty$. Ses ordonnées, d'après la formule (XIII.93), se déterminent par la relation

$$y_0 = \frac{v_\infty}{g} \operatorname{Reel}\left[\frac{\Gamma i}{2\pi}\left(\frac{1}{z+ih} + \frac{1}{z-ih}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma g}{\pi v_\infty^2} e^{-\frac{igz}{v_\infty^2}} \int\limits_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{\frac{igt}{v_\infty^2}} dt}{t-ih} \right] \text{ avec } y = 0. \qquad \text{(XIII.98)}$$

En appliquant le théorème des résidus on peut montrer que

$$\int\limits_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{\frac{igt}{v_\infty^2}} dt}{t-ih} = -2\pi i e^{-\frac{gh}{v_\infty^2}}.$$

En substituant cette expression dans (XIII.98) et en posant $y = 0$, nous trouvons

$$y_0 = \frac{\Gamma}{v_\infty} \operatorname{Reel}\left(-2ie^{-\frac{igz}{v_\infty^2}} e^{-\frac{gh}{v_\infty^2}}\right),$$

c'est-à-dire

$$y_0 = \frac{2\Gamma}{v_\infty} e^{-\frac{gh}{v_\infty^2}} \sin \frac{gx}{v_\infty^2}. \qquad \text{(XIII.99)}$$

Par conséquent, loin en aval du tourbillon à la surface de l'eau restent des ondes sinusoïdales forcées d'amplitude

$$a=\frac{2\Gamma}{v_\infty}e^{-\frac{gh}{v_\infty^2}} \qquad \text{(XIII.100)}$$

et de fréquence de forme g/v_∞^2, c'est-à-dire de longueur

$$\lambda=\frac{2\pi v_\infty^2}{g}.$$

Cette longueur coïncide avec la longueur des ondes progressives se déplaçant à la vitesse $c = v_\infty$, c'est-à-dire la vitesse du mouvement des ondes forcées est égale à la vitesse de déplacement du tourbillon dans le fluide. En comparant les formules (XIII.96) et (XIII.100), nous trouvons que

$$|R_x|=\frac{\rho g a^2}{4}. \qquad \text{(XIII.101)}$$

Une méthode analogue d'étude peut être appliquée au problème de l'écoulement autour d'une source plane située au point $z = -ih$ de débit Q.

La vitesse complexe induite est dans ce cas

$$\frac{dw}{dz}=\frac{Q}{2\pi}\left(\frac{1}{z+ih}-\frac{1}{z-ih}\right)-i\frac{Q}{\pi}e^{-\frac{igz}{v_\infty^2}}\int_0^z\frac{e^{\frac{igt}{v_\infty^2}}dt}{t-ih}. \qquad \text{(XIII.102)}$$

La résistance de la source

$$R_x=\rho v_\infty Q-\frac{\rho g Q^2}{v_\infty^2}e^{-\frac{2gh}{v_\infty^2}},$$

où le premier terme représente la force de poussée (dans le cas d'un puits, où Q est négatif, la résistance du puits) et le second la résistance ondulatoire. La composante verticale de la réaction est

$$R_y=-\frac{\rho Q^2}{4\pi h}+\frac{\rho g Q^2}{\pi v_\infty^2}Ei_1\left(\frac{2gh}{v_\infty^2}\right)e^{-\frac{2gh}{v_\infty^2}}.$$

En superposant les solutions obtenues auparavant pour le tourbillon (XIII.93) et la source (XIII.102) sous la surface libre, disposés au point $z = -ih$, nous obtiendrons la vitesse induite complexe d'écoulement autour d'une source-tourbillon plane

$$\frac{dw}{dz}=\frac{Q-i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z+ih}-\frac{Q+i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z-ih}+$$
$$+\frac{Q+i\Gamma}{2\pi}2i\frac{g}{v_\infty^2}e^{-\frac{igz}{v_\infty^2}}\int_\infty^z\frac{e^{\frac{igt}{v_\infty^2}}dt}{t-ih}.$$

En désignant le débit spécifique de la source-tourbillon

$$B = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \quad \text{et} \quad \nu_1 = \frac{g}{v_\infty^2},$$

nous pouvons écrire l'expression de dw/dz pour toute coordonnée z_1 du centre de la source-tourbillon

$$\frac{dw}{dz} = \frac{B}{z - z_1} - \frac{\bar{B}}{z - \bar{z}_1} + \bar{B} 2 i \nu_1 e^{-i\nu_1 z} \int_\infty^z \frac{e^{i\nu_1 t}\, dt}{t - \bar{z}_1}, \quad \text{(XIII.103)}$$

où les symboles $\bar{B}$ et $\bar{z}_1$ désignent les valeurs conjuguées complexes des grandeurs correspondantes.

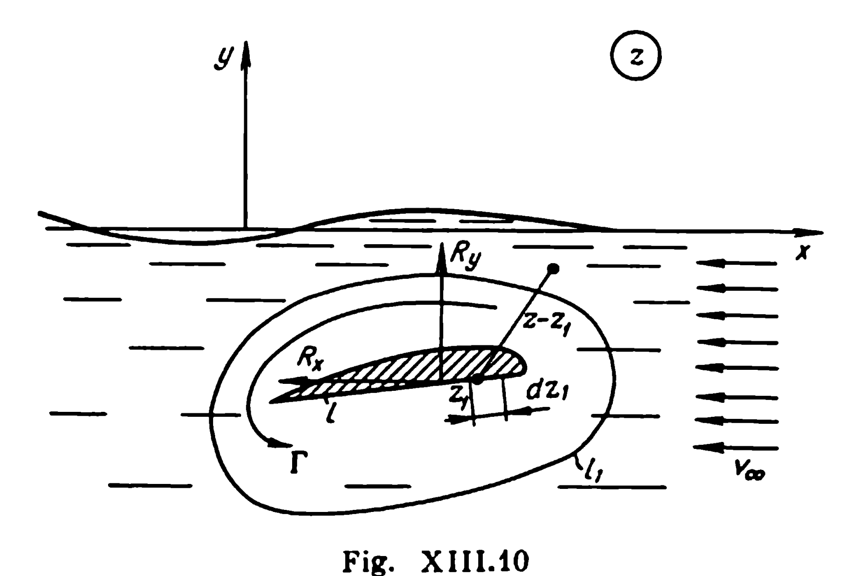


Fig. XIII.10

Nous obtiendrons l'équation des ordonnées des ondes loin en aval de la source-tourbillon en superposant les profils des ondes du tourbillon et de la source, c'est-à-dire

$$y_0 = \frac{2}{v_\infty} e^{\nu_1 y_1} [\Gamma \sin \nu_1 (x - x_1) + Q \cos \nu_1 (x - x_1)] =$$
$$= \operatorname{Im} \left[\frac{2(\Gamma + iQ)}{v_\infty} e^{i\nu_1 (x - z_1)} \right]. \quad \text{(XIII.104)}$$

Considérons maintenant l'écoulement autour d'un contour plan l disposé sous la surface libre du fluide, comme il est montré sur la fig. XIII.10. Lors de l'écoulement autour d'un tel contour d'un fluide sans surface libre, la vitesse induite complexe dw/dz représente une fonction analytique. Comme on le sait de la théorie des fonctions de la variable complexe, on peut, d'après la formule de Cauchy, représenter la fonction analytique en tout point du plan en dehors du contour l par les valeurs qu'elle prend aux frontières

de ce contour. Alors on peut écrire pour la vitesse complexe

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{\frac{dw(z_1)}{dz_1}dz_1}{z-z_1},$$

où z_1 sont les points du contour l.

On peut considérer cette expression comme décrivant une répartition continue le long du contour l des sources-tourbillons élémentaires. Le débit de ces sources-tourbillons, situées sur l'élément d'arc dz_1, est

$$B=\frac{dw(z_1)}{dz_1}\frac{dz_1}{2\pi i}, \qquad \text{(XIII.105)}$$

et la vitesse induite par celles-ci en un point de coordonnée complexe z

$$\frac{dw}{dz}=\frac{B}{z-z_1}.$$

Exigeons que chaque source-tourbillon élémentaire satisfasse aux conditions sur la surface libre pour $x=+\infty$ et $y=-\infty$. Alors pour sa vitesse complexe on doit employer l'expression (XIII.103). En y remplaçant B suivant (XIII.105) et en répartissant les singularités avec ce nouveau débit suivant le contour l, nous trouvons

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{dw(z_1)}{dz_1}\frac{dz_1}{z-z_1}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\overline{\frac{dw(z_1)}{dz_1}}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{z-\bar{z}_1}-2i\nu_1 e^{-i\nu_1 z}\int\limits_{\infty}^{z}\frac{e^{i\nu_1 t}\,dt}{t-\bar{z}_1}\right]d\bar{z}_1. \qquad \text{(XIII.106)}$$

Cette formule est obtenue par la superposition des solutions élémentaires satisfaisant aux conditions aux limites données sur la surface libre du fluide et à l'infini. Pour cette raison, on peut affirmer qu'elle donne la solution générale du problème du champ des vitesses induites en écoulement au voisinage de la surface libre autour d'un contour plan quelconque, par exemple, du profil montré sur la fig. XIII.10.

L'équation des ordonnées des ondes qui se forment à un grand éloignement en aval du contour peut se calculer comme le résultat d'intégration des ondes créées par les sources-tourbillons élémentaires B, réparties de façon continue sur la surface du contour l, c'est-à-dire en tenant compte de (XIII.104) et (XIII.106)

$$y_0=\operatorname{Im}\left[\frac{2}{v_\infty}\int\limits_{l}\frac{dw(z_1)}{dz_1}e^{i\nu_1 z_1}dz_1 e^{i\nu_1 x}\right].$$

L'amplitude de ces ondes se détermine par le facteur de $e^{i\nu_1 x}$, c'est-à-dire son module

$$|a| = \frac{2}{v_\infty} \left| \int_l \frac{dw(z_1)}{dz_1} e^{i\nu_1 z_1} dz_1 \right|. \qquad \text{(XIII.107)}$$

L'intégrale déterminant l'amplitude et représentant l'expression complexe

$$H(\nu_1) = \int_l \frac{dw(z_1)}{dz_1} e^{i\nu_1 z_1} dz_1, \qquad \text{(XIII.108)}$$

dépend de la loi de la répartition du débit des sources-tourbillons sur le contour du corps l. La fonction $H(\nu_1)$ qui dépend de la forme du corps a été introduite par N. Kotchine et porte son nom. Par l'intermédiaire de cette fonction, on détermine de nombreuses caractéristiques importantes des corps se déplaçant au voisinage et sur la surface libre du fluide; en particulier

$$a = \frac{2}{v_\infty} |H(\nu_1)|. \qquad \text{(XIII.109)}$$

Trouvons l'expression de la résistance ondulatoire du contour. A cet effet servons-nous de la formule (XIII.101) qui est valable pour tous les cas du problème plan. En y substituant les amplitudes des ondes à l'infini (XIII.109), nous obtenons

$$R_x = \frac{\rho g a^2}{4} = \frac{\rho g}{v_\infty^2} |H(\nu_1)|^2. \qquad \text{(XIII.110)}$$

En utilisant la formule de Tchaplyguine (VI.8), on peut obtenir l'expression générale également pour la force portante du contour sous la surface libre d'un fluide profond

$$R_y = \rho v_\infty \Gamma - \frac{\rho}{2\pi} \int_0^\infty |H(\lambda_1)|^2 d\lambda_1 + \frac{\rho \nu_1}{\pi} \times$$

$$\times \text{v.p.} \int_{-\infty}^{1} |H[\nu_1(1-\lambda_1)]|^2 \frac{d\lambda_1}{\lambda_1}. \qquad \text{(XIII.111)}$$

Ici λ_1 est le paramètre d'intégration

$$H(\lambda_1) = \int_l \frac{dw(z_1)}{dz_1} e^{-i\lambda_1 z_1} dz_1;$$

$$H[\nu_1(1-\lambda_1)] = \int_l \frac{dw(z_1)}{dz_1} e^{i\nu_1(1-\lambda_1) z_1} dz_1.$$

Le symbole v.p. signifie qu'il faut considérer l'intégrale impropre comme une limite pour $\varepsilon \to 0$ de l'expression

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{1} |H[\nu_1(1-\lambda_1)]|^2 \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\varepsilon} |H[\nu_1(1-\lambda_1)]|^2 \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} + \int_{\varepsilon}^{1} |H[\nu_1(1-\lambda_1)]|^2 \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \right\}.$$

En utilisant la formule (XIII.111), on doit tenir compte que la circulation Γ en mouvement d'un corps ayant la forme d'un profil d'aile sous la surface libre sera autre que dans le cas de son mouvement dans un fluide illimité. La surface libre influe sur la valeur de la circulation, et sa valeur réelle peut être déterminée en faisant appel au postulat de Tchaplyguine-Joukovski sur le caractère fini de la vitesse d'écoulement dw_0/dz sur le bord de fuite du profil.

La partie la plus compliquée du calcul de la réaction hydrodynamique est la détermination de la fonction H (ν_1). On peut, comme l'a montré N. Kotchine, obtenir une approximation suffisante si l'on admet la valeur de la vitesse complexe dw $(z_1)/dz_1$ dans cette fonction la même que lors du mouvement du contour donné dans un fluide illimité. Ce procédé a reçu une large extension.

Le calcul de la fonction de Kotchine peut parfois être sensiblement simplifié grâce à sa propriété suivant laquelle la valeur de H (ν_1) ne dépend pas du contour d'intégration, c'est-à-dire au lieu de l on peut prendre n'importe quel contour l_1 disposé sous la surface du fluide et entourant le contour étudié (fig. XIII.10). Cette propriété est conditionnée par le fait qu'entre les contours l et l_1 il n'y a pas de singularités hydrodynamiques dans l'écoulement.

Les relations (XIII.110), (XIII.111) et la formule du moment que l'on peut également obtenir en utilisant la seconde formule de Tchaplyguine (VI.9) servent de base pour l'élaboration de la théorie de l'aile d'envergure infinie se mouvant au voisinage de la surface d'un fluide.

§ 97. PROBLÈME SPATIAL DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR DES CORPS SOUS LA SURFACE LIBRE D'UN FLUIDE

Dans l'étude théorique de l'écoulement autour des corps spatiaux au voisinage de la surface libre ainsi que de l'écoulement dans un fluide illimité, on utilise la méthode de remplacement du corps par des sources et des puits. Pour cette raison, par analogie avec un problème plan, il est avantageux d'étudier préalablement l'écoulement autour des singularités spatiales hydrodynamiques, en particulier des sources disposées au voisinage de la surface libre d'un fluide profond.

Pour résoudre le problème de l'écoulement autour d'une source tridimensionnelle de débit Q, disposée au point de coordonnées x_1, y_1, z_1 sous la surface libre d'un fluide, il est indispensable de trouver le potentiel $\varphi(x, y, z)$ qui satisfait à l'équation de Laplace et aux conditions aux limites (XIII.77), (XIII.78) et (XIII.80). Dans le cas donné il n'est pas nécessaire de tenir compte de la condition aux limites sur la surface du corps (XIII.74). On sait que le potentiel de la source dans un fluide illimité est

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{r}=\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}.$$

Pour une source disposée sous la surface libre, le potentiel peut s'écrire sous la forme

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi}G(x, y, z), \tag{XIII.112}$$

où G est la fonction inconnue qui dans le cas d'un fluide illimité $G = 1/r$.

Pour trouver la fonction inconnue G, utilisons le principe de la superposition des solutions, dont l'emploi est possible grâce à la linéarité du problème, c'est-à-dire représentons-la sous la forme

$$G=\frac{1}{r}+G_1.$$

Il est évident que la fonction inconnue G_1 tient compte de l'influence de la surface libre et à son tour satisfait à l'équation de Laplace.

En substituant l'expression du potentiel dans les conditions aux limites, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=-\nu_1\frac{\partial G}{\partial z} \quad \text{pour } z=0;$$

$$G=0 \quad \text{pour } z=-\infty;$$

$$G=0 \quad \text{pour } x=+\infty.$$

Pour satisfaire à ces conditions aux limites, servons-nous de la méthode qui permettra d'utiliser pour l'obtention de la fonction cherchée G les résultats obtenus au § 96 à la résolution du problème de l'écoulement d'une source-tourbillon plane.

En mathématiques on démontre que la fonction $1/r$ peut être représentée sous la forme d'une intégrale déterminée suivant le paramètre sans dimensions θ avec $(z - z_1) > 0$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{i(x-x_1)\cos\theta+i(y-y_1)\sin\theta+z-z_1}.$$

Cette expression, en introduisant les notations

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= iz - x\cos\theta - y\sin\theta = \xi + iz\,; \\ \zeta_1 &= iz_1 - x_1\cos\theta - y_1\sin\theta = \xi_1 + iz_1\,; \\ B &= -\frac{1}{2\pi i}\,, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII.113)}$$

peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{r} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B}{\zeta - \zeta_1}\, d\theta. \qquad \text{(XIII.114)}$$

Finalement le potentiel de la source tridimensionnelle sera représenté sous la forme de la limite d'une somme de singularités

$$\frac{B}{\zeta - \zeta_1}\,, \qquad \text{(XIII.115)}$$

disposées dans les plans de la variable complexe ζ; pour chacun de de ces plans $\theta = \text{const}$.

Considérons les conditions aux limites qui seront pour les variables (ξ, z). A cet effet il suffit de tenir compte de ce que d'après (XIII.113)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2\theta \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\,,$$

c'est-à-dire la condition (XIII.77) pour $z = 0$ sera

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = -\frac{\nu_1}{\cos^2\theta}\frac{\partial G}{\partial z}\,. \qquad \text{(XIII.116)}$$

Imposons cette condition, ainsi que les conditions à l'infini, à chaque singularité plane de la forme (XIII.115) dans les plans $\theta = \text{const}$. Pour cela, il faut tenir compte de ce que par sa forme la formule (XIII.115) correspond à la formule de la vitesse complexe pour une source-tourbillon plane dans un fluide illimité. Suivant la formule (XIII.103), pour satisfaire aux conditions aux limites on doit ajouter à ce terme encore deux termes, en remplaçant dans le second terme ν_1 par $\nu_1/\cos^2\theta$, comme cela découle de la relation (XIII.116). Avec cela il faut tenir compte que pour $\cos\theta > 0$ et $x = +\infty$ en vertu de (XIII.113) $\xi = -\infty$ et si $\cos\theta < 0$ et $x = +\infty$, alors $\xi = +\infty$. Cette circonstance doit être prise en considération lors du choix de la limite inférieure de l'intégration dans le troisième terme de la formule du type (XIII.103).

Ainsi, l'équation pour les singularités planes satisfaisant aux conditions aux limites posées a pour expression

$$\frac{B}{\zeta - \zeta_1} - \frac{\bar{B}}{\zeta - \bar{\zeta}_1} + \bar{B} 2i \frac{\nu_1}{\cos^2\theta} e^{-\frac{i\nu_1\zeta}{\cos^2\theta}} \int_{\pm\infty}^{\zeta} \frac{e^{\frac{i\nu_1 t}{\cos^2\theta}}\, dt}{t - \bar{\zeta}_1}\,, \qquad \text{(XIII.117)}$$

le signe de la limite inférieure de l'intégrale dépendant du signe de cos θ.

En utilisant le théorème des résidus, on peut démontrer que

$$\int_{-\infty}^{\zeta} \frac{e^{\frac{i\nu_1 t}{\cos^2\theta}}\,dt}{t-\bar{\zeta}_1} = 2\pi i + \int_{\infty}^{\zeta} \frac{e^{\frac{i\nu_1 t}{\cos^2\theta}}\,dt}{t-\bar{\zeta}_1}.$$

Par conséquent, le terme $2\pi i$ ne doit être pris en compte que pour les valeurs des angles θ qui ont $\cos\theta > 0$, c'est-à-dire $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Ceci détermine les limites de l'intégrale correspondante dans (XIII.114). En définitive, en remplaçant dans (XIII.114) les valeurs $B/\zeta - \zeta_1$ par la valeur (XIII.117), nous obtenons la fonction cherchée

$$G = \text{Reel} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{B}{\zeta-\zeta_1} - \frac{\bar{B}}{\zeta-\bar{\zeta}_1} + B2i \frac{\nu_1}{\cos^2\theta} e^{-\frac{i\nu_1\zeta}{\cos^2\theta}} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\infty}^{\zeta} \frac{e^{\frac{i\nu_1 t}{\cos^2\theta}}\,dt}{t-\bar{\zeta}_1} \right) d\theta - \text{Reel} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\pi\bar{B} \frac{\nu_1}{\cos^2\theta} e^{-\frac{i\nu_1\zeta}{\cos^2\theta}}\,d\theta,$$

où l'on prend la partie réelle, étant donné que le potentiel G est une valeur réelle.

Ce potentiel satisfait à toutes les conditions aux limites adoptées ci-dessus pour G, car il est obtenu par la méthode de superposition des solutions élémentaires du type (XIII.117), qui à leur tour satisfont à des conditions analogues.

En remplaçant ici ζ et B d'après (XIII.113) et en calculant l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\zeta-\bar{\zeta}_1} = -\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z+z_1)^2}} = -\frac{1}{r_1},$$

ainsi qu'en effectuant certaines transformations dans l'intégrale double, nous obtiendrons la formule du potentiel de la source située sous la surface libre d'un fluide profond sous la forme proposée par N. Kotchine

$$G = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + \frac{\nu_1}{\pi} \text{Reel} \int_{-\pi}^{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{1} \frac{e^{i\varepsilon^*(\lambda_1-1)}\,d\lambda_1}{\lambda_1} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} +$$

$$+ 2\nu_1 \text{Reel}\, i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-i\varepsilon^*}\,d\theta}{\cos^2\theta}, \qquad \text{(XIII.118)}$$

où

$$\varepsilon^* = \frac{\nu_1}{\cos^2\theta}\left[i(z+z_1) - (x-x_1)\cos\theta - (y-y_1)\sin\theta\right],$$

et λ_1 est le paramètre d'intégration.

De cette façon, le potentiel Φ_0 de l'écoulement autour de la source sous la surface d'un fluide suivant (XIII.73) et (XIII.112) sera

$$\Phi_0 = -v_\infty x + \frac{Q}{4\pi} G.$$

Comme le potentiel du dipôle unitaire de direction arbitraire de l'axe des n peut être obtenu à partir du potentiel de la source unitaire $1/r$ dans un fluide illimité suivant la relation

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cos(r, n),$$

alors le potentiel du dipôle disposé sous la surface libre du fluide peut être trouvé en utilisant la relation

$$\varphi = \frac{\partial G}{\partial n}.$$

On peut montrer que pour les grandes vitesses de mouvement, c'est-à-dire pour

$$\nu_1 = \frac{g}{v_\infty^2} \to 0,$$

$$\lim_{\nu_1 \to 0} G = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}.$$

Dans l'autre cas limite, où les vitesses de mouvement sont faibles, $\nu_1 \to \infty$ et

$$\lim_{\nu_1 \to \infty} G = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1},$$

la surface de l'eau ne se déforme pas et joue le rôle d'une paroi solide ; $1/r_1$ représente le potentiel de la source, reflété par rapport à cette paroi.

La solution du problème de l'écoulement autour d'un corps sous la surface libre du fluide peut maintenant être obtenue en remplaçant l'action du corps par des sources avec des potentiels unitaires G. Dans le cas général d'un corps de forme quelconque (fig. XIII.8), ces sources, en vertu des recommandations énoncées au § 27, doivent être distribuées sur la surface S du corps, c'est-à-dire on cherchera à obtenir la fonction Φ_0 sous la forme

$$\Phi_0 = -v_\infty x + \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma^* (x_1, y_1, z_1) G(x, y, z) \, dS, \quad \text{(XIII.119)}$$

où x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées des points de la surface S du corps et σ^* (x_1, y_1, z_1) le débit des sources.

Pour déterminer ce débit, il faut observer la condition aux limites (XIII.74) d'imperméabilité sur la surface du corps, c'est-à-dire

$$v_\infty \cos(n, x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma^* \frac{\partial G}{\partial n} dS,$$

où n est la direction de la normale extérieure sur la surface.

En écrivant le deuxième membre de cette équation, on doit tenir compte qu'en des points de la surface S est possible l'annulation de la valeur $1/r$ faisant partie de la fonction G. L'étude du passage à la limite, analogue à celui effectué au § 27 (V.102), montre que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma^* \frac{\partial G}{\partial n} dS = -\frac{\sigma^*}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma^* \frac{\partial G}{\partial n} dS.$$

Ainsi, pour la détermination de la fonction σ^*, nous obtenons finalement l'équation intégrale de Fredholm du 2-ème genre:

$$v_\infty \cos(n, x) = -\frac{\sigma^*}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma^* \frac{\partial G}{\partial n} dS. \qquad \text{(XIII.120)}$$

Pour sa résolution, qu'il est impossible d'obtenir sous la forme générale, on utilise différentes méthodes approchées. La plus effective est l'utilisation des ordinateurs électroniques.

La première approximation dans la solution de cette équation peut être obtenue en négligeant le second terme de son deuxième membre, c'est-à-dire en admettant que

$$\sigma^* \approx -2v_\infty \cos(n, x).$$

Ce procédé est souvent utilisé pour l'étude de l'écoulement autour des corps minces, c.-à-d. des corps allongés. Pour de tels corps, symétriques par rapport au plan xoz, dont les ordonnées de la surface S sont décrites par l'équation

$$y = f(x, z),$$

on peut écrire que

$$\cos(n, x) \approx \frac{\partial f}{\partial x}$$

et, par conséquent,

$$\sigma^* \approx -2v_\infty \frac{\partial f}{\partial x},$$

c'est-à-dire

$$\Phi_0 = -v_\infty x - \frac{v_\infty}{2\pi} \int_S \frac{\partial f}{\partial x} G\, dS. \qquad \text{(XIII.121)}$$

Par S on entend dans ce cas le plan de symétrie d'un corps (ou d'un navire), sur lequel sont disposées des sources.

La réaction hydrodynamique qui s'exerce sur un corps peut être calculée en utilisant la formule générale

$$\bar{R} = -\int_S p\bar{n}\,dS,$$

où la pression doit être déterminée d'après l'intégrale d'Euler. La vitesse figurant dans cette intégrale doit être calculée en employant le potentiel (XIII.119). Les calculs respectifs ont été effectués par N. Kotchine qui a obtenu des formules pour les composantes de la réaction hydrodynamique $\bar{R}$. En cas d'un corps de forme quelconque, mais symétrique par rapport au plan xoz, ces formules ont la forme suivante

$$R_x = -\frac{\rho\nu_1^2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left|H\left(\frac{\nu_1}{\cos^2\theta}, \theta\right)\right|^2 \frac{d\theta}{\cos^3\theta}; \qquad \text{(XIII.122)}$$

$$R_z = \gamma V - \frac{\rho}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} k\,|H(k, \theta)|^2\,d\theta\,dk +$$

$$+\frac{\rho\nu_1^2}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{1}\left|H\left[\frac{\nu_1(1-\lambda_1)}{\cos^2\theta}, \theta\right]\right|^2 \frac{1-\lambda_1}{\lambda_1}\,d\lambda_1\,\frac{d\theta}{\cos^4\theta}. \qquad \text{(XIII.123)}$$

Ici k et λ_1 sont les paramètres d'intégration, V le volume du corps, et

$$H\left(\frac{\nu_1}{\cos^2\theta}, \theta\right) = -\int_S \sigma^* e^{\frac{\nu_1(z_1+ix_1\cos\theta+iy_1\sin\theta)}{\cos^2\theta}}\,dS$$

représente la fonction de Kotchine pour un problème spatial.

Cette fonction dépend de la distribution des sources $\sigma^*(x_1, y_1, z_1)$ qui remplaçent l'action du corps sur l'écoulement et, par conséquent, tient compte de l'influence de la forme du corps sur la valeur des forces hydrodynamiques apparaissantes.

Les formules (XIII.118), (XIII.119) et (XIII.121)-(XIII.123) servent de base à l'élaboration de la théorie de la résistance ondulatoire, de la houle, à l'étude des champs de pressions et de beaucoup d'autres problèmes de l'hydrodynamique navale.

En cas d'un fluide de profondeur finie, le mouvement d'un corps peut être étudié par des méthodes analogues, mais en tenant compte des conditions aux limites (XIII.79) au lieu de (XIII.78). Les solutions et les formules de calcul correspondantes ont été obtenues dans leurs travaux par M. Keldyche, L. Sédov, L. Srétenski et M. Khaskind [5], [12].

CHAPITRE XIV

GLISSEMENT, CAVITATION ET CHOC SUR LA SURFACE D'UN FLUIDE

§ 98. GLISSEMENT

Lorsqu'on étudie les problèmes de l'hydromécanique d'un navire, il apparaît nécessaire de tenir compte d'un certain nombre de phénomènes spécifiques, tels que le glissement, la cavitation lors du mouvement des corps à de grandes vitesses, ainsi que le phénomène du choc d'un corps sur la surface d'un fluide. Malgré la différence extérieure des images des mouvements de fluide qui en résultent, dans leur étude théorique on peut observer quelques traits communs, ce qui permet d'employer des méthodes uniques pour leur étude.

Comme le montrent les résultats des expériences, lorsqu'on étudie les phénomènes examinés, on néglige généralement l'influence de la viscosité du fluide sur la structure de l'écoulement. Ceci permet d'appliquer les méthodes de la mécanique des fluides non visqueux et de considérer les écoulements apparaissant comme potentiels. Ces phénomènes se caractérisent par le fait que plusieurs d'entre eux apparaissent à de grandes vitesses, quand les nombres de Froude sont grands. Physiquement cela signifie que les forces d'inertie dans l'écoulement dépassent considérablement les forces de pesanteur dont l'influence sur la structure de l'écoulement correspondant et les forces hydrodynamiques qui y apparaissent peuvent parfois être négligées. Plusieurs de ces écoulements peuvent être considérés comme les écoulements avec formation de filets libres de fluide. Ceci permet, lors de leur étude, d'utiliser les méthodes de la théorie des filets de fluide parfait élaborées par Kirchhoff et Joukovski, ainsi que certaines données obtenues dans la théorie de l'aile.

A ce groupe d'écoulements se rapporte le glissement qui est un mouvement des corps sur la surface d'un liquide s'effectuant à grande vitesse. Le trait caractéristique de ce régime de mouvement consiste en ce que le poids d'un corps est pratiquement totalement équilibré par la force de soustentation hydrodynamique et le rôle de la poussée d'Archimède dans la création de la force portante est insignifiant, ce qui permet de négliger son influence.

L'écoulement autour de la surface de glissement rappelle bien l'image d'écoulement autour d'une aile, mais il y a quelques particularités qui distinguent ces écoulements.

Lorsqu'une plaque plane glisse sur la surface d'un fluide (fig. XIV.1), il se forme devant elle un jet d'embruns dirigé sous un angle dans le sens de son mouvement. Ce jet conditionne l'apparition sur la plaque d'une force de réaction dirigée en sens contraire du mouvement et qui s'appelle résistance d'embruns.

Sur le bord arrière de la plaque glissante on observe un détachement régulier des jets d'eau et la vitesse du liquide a ici une valeur finie. La même chose a lieu en écoulement autour du bord de fuite aigu d'une aile. La longueur mouillée l de la plaque varie avec la variation de la vitesse de son mouvement et de l'angle d'incidence α, c'est-à-dire elle est une des paramètres hydrodynamiques variables du glissement. Derrière la plaque, sur la surface du liquide, se forment des ondes. On peut les considérer généralement comme des ondes d'amplitude relativement faible.

Le passage de la navigation au glissement se détermine pour les corps suivant le nombre de Froude Fr_D dans le calcul duquel la dimension caractéristique est la grandeur $\sqrt[3]{\frac{D}{\gamma}}$, où D est le poids du corps,

$$\mathrm{Fr}_D = \frac{v_\infty}{\sqrt{g\sqrt[3]{\frac{D}{\gamma}}}}.$$

Les études du glissement ont montré que le rôle de la force d'Archimède dans la création de la force portante devient insignifiant pour $\mathrm{Fr}_D > 5$. Cependant, pratiquement on peut considérer que le glissement commence à une vitesse du mouvement d'un corps telle où $\mathrm{Fr}_D > 3$.

Considérons les relations qui existent entre les forces agissant sur une plaque glissante (fig. XIV.1) dont le poids D est équilibré par la force hydrodynamique R_y. Utilisons la formule (XII.5) qui établit la relation entre les composantes de la réaction dans le système de coordonnées aérodynamiques et sa composante tangentielle

$$R_t = R_x \cos\alpha - R_y \sin\alpha.$$

D'après cette formule, la résistance au mouvement de la plaque est

$$R_x = \frac{R_t}{\cos\alpha} + R_y \operatorname{tg}\alpha, \qquad \text{(XIV.1)}$$

où la composante R_t s'exerçant dans le plan de la plaque représente la résultante des contraintes tangentielles, c'est-à-dire la force de frottement agissant dans un fluide visqueux, et le premier terme la

force R_f de la résistance de frottement. Le second terme dans cette formule représente une partie de la force de résistance due aux pressions qui s'exercent sur la surface inférieure de la plaque. Physiquement, cette partie est le résultat de l'action réactive du jet d'embruns, ainsi que de l'action de la houle provoquée par le glissement sur la distribution des pressions sur la surface de la plaque.

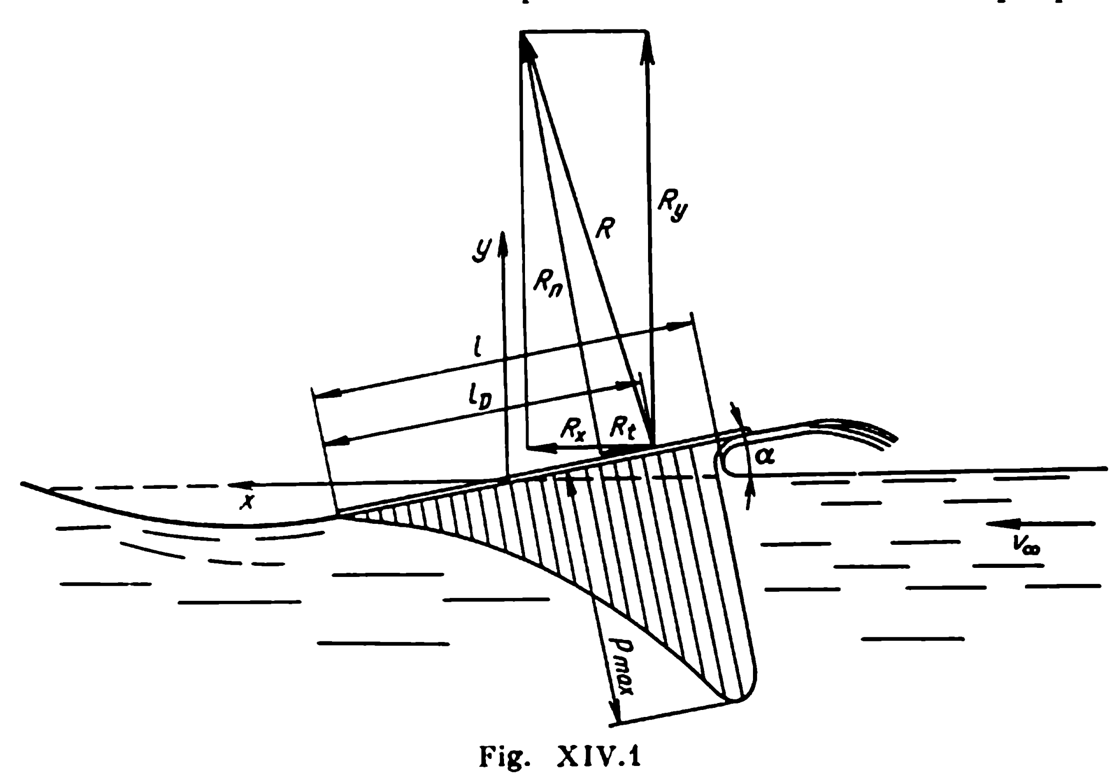


Fig. XIV.1

Par conséquent, ce terme représente la somme des résistances des embruns et des ondes.

Si l'on tient compte que d'après l'équation d'équilibre de la plaque

$$R_y = D,$$

la formule (XIV.1) pourra s'écrire sous la forme

$$R_x = R_f + R_y \operatorname{tg} \alpha = R_f + D \operatorname{tg} \alpha. \qquad \text{(XIV.2)}$$

Pour de faibles angles d'incidence $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$

$$R_x = R_f + D\alpha. \qquad \text{(XIV.3)}$$

Cette formule est valable pour le calcul de la résistance au mouvement de glissement sur la surface d'un fluide visqueux. La force R_t et, par conséquent, R_f, peut être calculée au moyen des méthodes de la théorie de la couche limite, si l'on connaît la distribution de la pression sur la face inférieure de la plaque. Une épure typique de la distribution de la pression est montrée sur la fig. XIV.1. En un

certain point de cette épure $p = p_{max} = \frac{\rho v_\infty^2}{2}$, c'est-à-dire que ce point de la plaque est critique. Il est intéressant de noter que puisque le point critique où s'effectue la ramification des lignes de courant de l'écoulement est disposé sur la surface inférieure à une certaine distance du bec de la plaque, la vitesse d'écoulement est dirigée sur une partie de cette surface dans le sens du mouvement. Sur ce tronçon les contraintes tangentielles engendrent une faible force de traction qui diminue quelque peu sa résistance de frottement, cette diminution étant assez manifeste pour $\alpha > 6°$. Dans un fluide non visqueux $R_f = 0$, par suite la force de résistance est

$$R_x = R_y \operatorname{tg} \alpha = D\alpha.$$

Comme la longueur mouillée de la plaque l ne reste pas constante, le moment M de la réaction R en glissement est calculé non pas par rapport au bord avant, comme pour les ailes, mais par rapport au bord arrière de la plaque

$$M = R_n l_D,$$

où l_D est la distance du centre de poussée au bord arrière de la surface de glissement.

Lorsqu'on étudie le phénomène de glissement, il est indispensable de disposer d'une certaine dimension caractéristique linéaire constante, dont la valeur ne dépend pas de la vitesse du mouvement. Pour une telle dimension, on utilise souvent la largeur totale B (envergure) de la surface de glissement et on exprime par celle-ci les paramètres hydrodynamiques, par exemple le coefficient sans dimension du centre de poussée

$$m_D = \frac{l_D}{B} = \frac{l_D}{l} \lambda_B, \qquad \text{(XIV.4)}$$

où $\lambda_B = l/B$.

Actuellement la théorie du glissement est élaborée pour les plaques d'envergure infinie (c'est-à-dire pour $B = \infty$) et est basée sur l'utilisation des méthodes de résolution des problèmes plans de la mécanique des fluides.

Dans les cadres d'un problème plan du glissement, on a élaboré les théories linéaire et non linéaire, basées sur les hypothèses où le fluide est non visqueux et l'écoulement est potentiel. La théorie linéaire considère le glissement des plaques avec de faibles angles d'incidence, lorsque les vitesses induites des particules de fluide peuvent être considérées comme petites. Cette théorie est élaborée compte tenu de l'influence de la houle, c'est-à-dire pour n'importe quels nombres de Froude. La théorie non linéaire permet d'obtenir la solution du problème de glissement pour tout angle d'incidence,

mais dans ce cas il faut négliger la pesanteur du fluide, c'est-à-dire admettre que Fr $= \infty$ et la houle est absente.

Envisageons la théorie linéaire de glissement d'une plaque sur la surface d'un fluide de profondeur infinie. En faisant appel au principe de la similitude, c'est-à-dire en supposant la plaque immobile

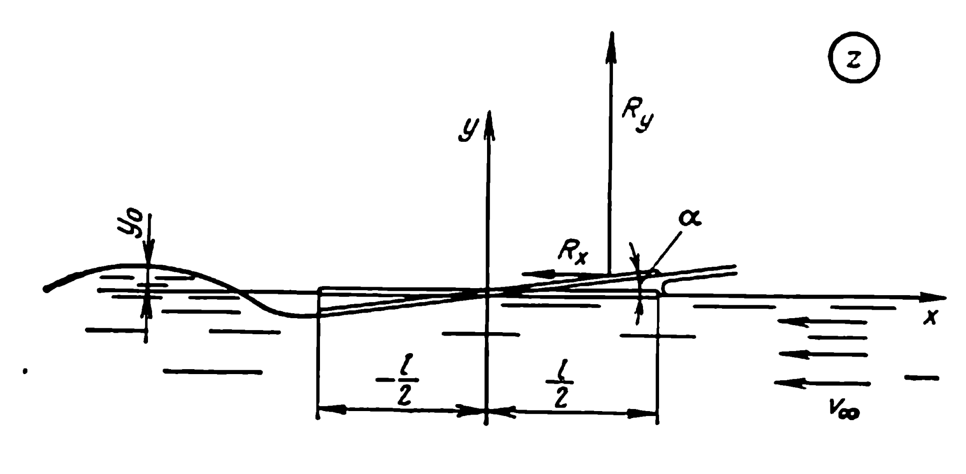


Fig. XIV.2

et l'écoulement plan qui la contourne permanent, nous obtiendrons le schéma montré dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$ sur la fig. XIV.2.

La fonction caractéristique $w(z)$ du mouvement inversé a la forme

$$w = -v_\infty z + w_1(z), \tag{XIV.5}$$

où v_∞ est la vitesse à l'infini et $w_1(z) = \varphi_1(x, y) + i\psi_1(x, y)$ la fonction caractéristique des vitesses induites.

Pour trouver la fonction $w_1(z)$, il faut formuler les conditions aux limites. Pour les points situés sur la surface libre du fluide et à l'infini, ces conditions ne diffèrent en rien de celles utilisées dans la théorie linéaire des ondes planes forcées (§ 96).

A partir de la condition de la constance de pression sur la surface libre, nous obtenons l'équation pour la détermination des ordonnées y_0 de cette surface

$$y_0 = \frac{v_\infty}{g} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad \text{avec} \quad y = 0. \tag{XIV.6}$$

En outre, suivant (XIII.83) et compte tenu des notations adoptées,

$$\operatorname{Im}\left(i \frac{d^2 w_1}{dz^2} - \frac{g}{v_\infty^2} \frac{dw_1}{dz}\right) = 0 \quad \text{avec} \quad y = 0. \tag{XIV.7}$$

Exigeons également qu'avec $y = -\infty$ les vitesses induites soient absentes et avec $x = +\infty$ soient absentes les ondes libres; alors, en

vertu de (XIII.84) et (XIII.85), nous trouverons

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw_1}{dz} &= 0 \quad \text{pour} \quad y = -\infty; \\ \frac{dw_1}{dz} &= 0 \quad \text{pour} \quad x = +\infty. \end{aligned}\right\} \tag{XIV.8}$$

On doit également tenir compte de la condition d'imperméabilité le long de la surface mouillée de la plaque glissante. Soit l'origine de coordonnées située au milieu de la longueur mouillée l de la plaque, comme il est montré sur la figure. En admettant l'angle d'incidence petit on peut considérer la condition d'imperméabilité analogue à la condition d'imperméabilité (XII.128) énoncée au § 81 pour une aile mince cambrée dont les ordonnées par rapport à la corde sont décrites par l'équation $y = F(x)$

$$v_{y1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = v_\infty (F' - \alpha). \tag{XIV.9}$$

De même que dans le cas de l'aile mince, cette condition peut être considérée remplie non sur le côté inférieur de la plaque, mais sur le segment de l'axe réel $-l/2 \leqslant x \leqslant l/2$.

D'autre part, l'écoulement autour du bord arrière de la plaque doit être régulier.

Les conditions (XIV.6)-(XIV.9) permettent de trouver la fonction $w_1(z)$ et de calculer les forces et le moment hydrodynamique apparaissant en glissement d'une plaque faiblement incurvée. La solution de ce problème a été réalisée dans les travaux de L. Sédov et N. Kotchine par la méthode de la théorie des ondes.

Ainsi, par exemple, conformément à une plaque mince en cas de grands nombres $\mathrm{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gl}}$ ($\mathrm{Fr} > 2{,}8$), ils ont obtenu des formules de la force portante et du moment M_0 par rapport à l'origine des coordonnées, c'est-à-dire du centre de la plaque

$$R_y = \frac{\pi\rho l v_\infty^2 \alpha}{2}\left[1 - \frac{1}{2\,\mathrm{Fr}^2}\left(\pi + \frac{4}{\pi}\right)\right]; \quad R_x = R_y\alpha; \tag{XIV.10}$$

$$M_0 = \frac{\pi\rho l^2 v_\infty^2 \alpha}{8}\left[1 - \frac{1}{2\,\mathrm{Fr}^2}\left(\pi + \frac{8}{3\pi}\right)\right]. \tag{XIV.11}$$

Quand on peut négliger l'influence de la pesanteur du fluide en glissement, c'est-à-dire avec $\mathrm{Fr} \to \infty$, il n'est pas difficile d'élaborer la théorie linéaire du glissement en utilisant l'analogie entre une plaque qui glisse et une aile. A cet effet utilisons la condition aux limites (XIV.6) sur la surface libre et réduisons-la à la forme sans dimensions

$$\frac{y_0}{l}\frac{gl}{v_\infty^2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{1}{v_\infty}.$$

En y introduisant le nombre Fr, nous obtenons

$$\frac{y_0}{l}\frac{1}{\mathrm{Fr}^2}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{1}{v_\infty}. \qquad \text{(XIV.12)}$$

Pour Fr → ∞ cette condition prend la forme

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0 \text{ avec } y=0 \text{ et } -l/2\geqslant x\geqslant l/2. \qquad \text{(XIV.13)}$$

Par conséquent, d'après cette condition pour Fr → ∞, le potentiel en des points du plan $y = 0$ en dehors de la plaque est constant. Le choix de la valeur de cette constante n'influe pas sur la valeur de la vitesse, par conséquent, on peut l'admettre égale à zéro, c'est-à-dire considérer que

$$\varphi_1=0 \text{ avec } y=0 \text{ et } -l/2\geqslant x\geqslant l/2. \qquad \text{(XIV.14)}$$

La condition (XIV.13) peut s'écrire également sous la forme

$$\operatorname{Im} i\frac{dw_1}{dz}=0 \text{ avec } y=0 \text{ et } -l/2\geqslant x\geqslant l/2. \qquad \text{(XIV.15)}$$

Elle permet d'appliquer à la fonction

$$i\frac{dw_1}{dz}=i\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=iv_{x_1}+v_{y_1} \qquad \text{(XIV.16)}$$

le principe de la symétrie de Schwartz, déjà utilisé au § 96 pour une fonction plus compliquée (XIII.87). En partant de ce principe, la fonction (XIV.16), qui prend sur l'axe des x des valeurs réelles, peut être prolongée dans le demi-plan supérieur $y > 0$, et en des points correspondants de ce demi-plan elle aura des valeurs complexes conjuguées.

En désignant par les indices moins et plus les valeurs des parties réelle et imaginaire de la fonction idw_1/dz en des points correspondants des demi-plans inférieur et supérieur et en tenant compte du principe de la symétrie et de la forme développée (XIV.16) de cette fonction nous obtenons

$$v_{y_{1+}}=v_{y_{1-}}; \qquad \text{(XIV.17)}$$

$$v_{x_{1+}}=-v_{x_{1-}}. \qquad \text{(XIV.18)}$$

Ces relations, compte tenu de la condition de l'écoulement régulier autour du bord arrière aigu et de la condition aux limites d'imperméabilité (XIV.9), sont caractéristiques pour le champ des vitesses induites de l'aile mince, placée dans un écoulement de fluide illimité [voir les formules (XII.129) et (XII.130)]. Par conséquent, on peut conclure que le champ de la vitesse et donc la distribution de la pression le long de la surface inférieure d'une plaque glissante avec de grands nombres Fr sont les mêmes qu'en écoulement autour

de cette plaque lorsqu'elle est immergée dans un courant continu se déplaçant à la vitesse v_∞.

La propriété notée est une analogie entre la plaque glissante et l'aile. Elle permet d'utiliser les données de la théorie de l'aile pour le calcul des caractéristiques hydrodynamiques des plaques planes et incurvées.

Pour calculer la distribution de la pression p en des points de la surface de la plaque, écrivons l'intégrale d'Euler, tout en tenant compte qu'à l'infini la vitesse est v_∞, et en des points de la plaque $v = \sqrt{(-v_\infty + v_{x_1})^2 + v_{y_1}^2}$, c'est-à-dire

$$\bar{p}_0 + \frac{\rho v_\infty^2}{2} = p + \frac{\rho}{2}(v_\infty^2 - 2v_\infty v_{x_1} + v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2).$$

Si l'on néglige les carrés des vitesses induites v_{x_1} et v_{y_1}, alors suivant cette formule et la relation (XIV.18) les surpressions dynamiques sur les côtés supérieur (+) et inférieur (—) de la plaque dans un fluide illimité seront égales en valeur, mais de signe contraire

$$(p - p_0)_{\mp} = \pm \rho v_\infty v_{x_1}, \qquad \text{(XIV.19)}$$

c'est-à-dire que sur le côté inférieur on observe une surpression et sur le côté supérieur une dépression de même valeur. Leur somme crée la résultante des forces de pression R_n, perpendiculaire à la surface de la plaque.

D'après les données obtenues pour une plaque plane au § 80, on sait que la grandeur de la force R_n rapportée à l'unité d'envergure (XII.93) est égale à

$$R_n = \rho \pi l v_\infty^2 \sin\alpha \cos\alpha, \qquad \text{(XIV.20)}$$

et le point d'application de cette force est situé à une distance $l_D = 3/4\, l$ au bord arrière (ici l'on tient compte que $l = 2a$).

Comme sur une plaque glissante la pression le long de son côté supérieur est constante, alors d'après la formule (XIV.19) la résultante des forces de pression est créée grâce à l'augmentation de la pression sur le côté inférieur, c'est-à-dire elle est égale à la moitié de la grandeur déterminée par la formule (XIV.20) et la position du centre de poussée reste inchangée. En définitive nous obtenons pour une plaque glissante

$$R_y = \frac{R_n}{2}\cos\alpha = \rho\frac{\pi}{2}\, l\cos^2\alpha \sin\alpha v_\infty^2 \approx \rho\frac{\pi}{2}\, l v_\infty^2 \alpha; \qquad \text{(XIV.21)}$$

$$R_x = \frac{R_n}{2}\sin\alpha = \rho\frac{\pi}{2}\, l\sin^2\alpha \cos\alpha v_\infty^2 \approx \rho\frac{\pi}{2}\, l v_\infty^2 \alpha^2; \qquad \text{(XIV.22)}$$

$$m_D = \frac{l_D}{B} = \frac{3}{4}\lambda_B. \qquad \text{(XIV.23)}$$

La formule (XIV.22) fournit la valeur de la résistance des embruns rapportée à l'unité d'envergure de la plaque glissante, car avec des nombres Fr $\to \infty$ la résistance ondulatoire est nulle.

D'après la théorie de l'écoulement autour d'un arc de cercle on sait que la flexion longitudinale de la plaque conduit à la variation de l'angle d'incidence effectif d'une valeur $\alpha_0 = 2f/l$, où f est la flèche de la flexion. Donc, pour tenir compte de l'influence de la flexion, il suffit de remplacer dans les formules (XIV.21) et (XIV.22) l'angle d'incidence α par la valeur $\alpha + 2f/l$.

Il est à noter que l'analogie entre l'écoulement continu autour d'une plaque et l'écoulement au cours d'un glissement est quelque peu infirmée au voisinage du bord avant aigu. Sur une plaque glissante il se forme ici un jet d'embruns (fig. XIV.2) et la surpression est nulle, car dans un mouvement inversé, sans tenir compte des forces de pesanteur, la vitesse dans le jet d'embruns est égale à v_∞. Si la plaque est placée dans un écoulement continu qui contourne son bord aigu, alors sur son bord apparaît une dépression et une force de succion se produit. Cependant cette non-conformité des structures de l'écoulement n'influe pratiquement pas sur la valeur des forces calculées pour de faibles angles d'incidence.

On peut obtenir les formules (XIV.21) et (XIV.22) de la relation (XIV.10) en y posant $1/\mathrm{Fr}^2 = 0$. Ceci témoigne de ce que l'analogie établie est caractéristique pour la théorie linéaire du glissement avec des nombres Fr $\to \infty$.

§ 99. THÉORIE NON LINÉAIRE DU GLISSEMENT

En élaborant la théorie non linéaire du glissement, on suppose que l'influence de la pesanteur du fluide sur les caractéristiques de l'écoulement peut être négligée. En utilisant cette hypothèse, déduisons les formules générales pour la détermination des composantes de la réaction hydrodynamique qui agit sur une plaque plane glissante pour une valeur arbitraire de l'angle d'incidence α. En supposant le mouvement permanent et en utilisant le principe de la transformation, envisageons l'écoulement autour d'une plaque immobile d'un fluide de profondeur H (fig. XIV.3). Derrière cette plaque, les ondes n'apparaissent pas dans un fluide non pesant et il se produit une baisse progressive de son niveau. Devant la plaque il se forme un filet libre d'épaisseur δ_f. Comme la pression sur la surface libre du fluide et dans le jet est constante et égale à p_0 et le fluide est non pesant, la vitesse d'écoulement du fluide dans le jet d'après l'intégrale d'Euler est égale à la vitesse de l'écoulement à l'infini, c'est-à-dire à v_∞.

Isolons une surface de contrôle fermée $ABCDEFKA$, comme il est montré sur la figure, et appliquons la loi des quantités de mouve-

ment au fluide contenu à l'intérieur de cette surface de contrôle

$$\bar{R} = -\rho \oint_S \bar{v} v_n \, dS, \tag{XIV.24}$$

où $\bar{R}$ est la réaction agissant du côté du fluide sur la plaque.

Il est évident que la différence entre les flux des quantités de mouvement passant par les sections AB et CD de la surface de contrôle est égale au flux des quantités de mouvement passant par la section FK du filet libre des embruns.

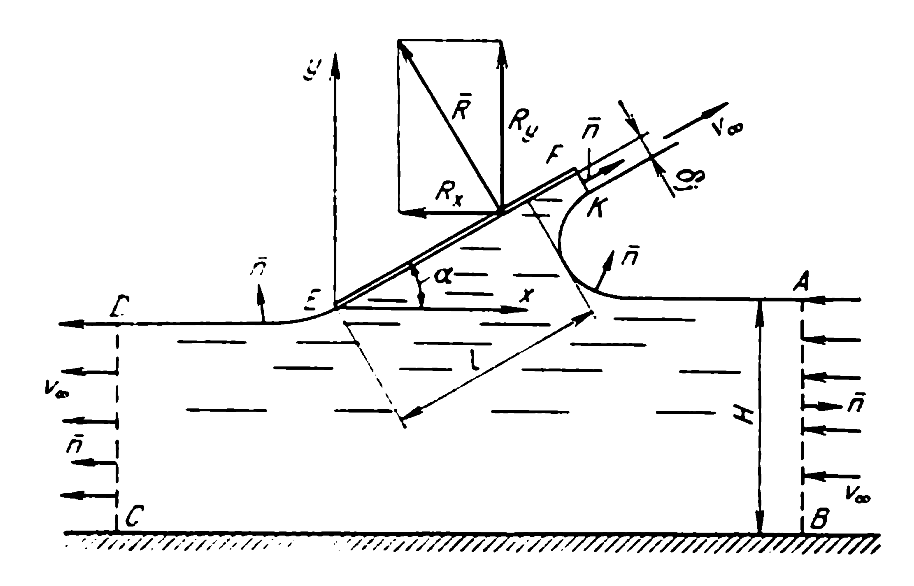


Fig. XIV.3

En choisissant le système de coordonnées x, y (fig. XIV.3), en projetant l'égalité vectorielle (XIV.24) sur l'axe des x et en tenant compte des directions des normales extérieures $\bar{n}$ à la surface de contrôle, nous obtenons

$$R_x = -\rho v_\infty^2 H + \rho v_\infty^2 (H - \delta_f) - \rho v_\infty^2 \delta_f \cos\alpha,$$

c'est-à-dire

$$R_x = -\rho v_\infty^2 \delta_f (1 + \cos\alpha). \tag{XIV.25}$$

Cette force représente dans le cas donné la résistance des embruns de la plaque.

La réaction totale R est la résultante des forces des surpressions qui agissent le long de la longueur mouillée de la plaque et par suite est dirigée suivant la normale à sa surface, c'est-à-dire

$$R = \frac{R_x}{\sin\alpha} = \rho v_\infty^2 \delta_f \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

La force de sustentation R_y de la plaque est

$$R_y = R\cos\alpha = \rho v_\infty^2 \delta_f \frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad \text{(XIV.26)}$$

Les formules obtenues sont valables en cas de glissement sur la surface d'un fluide de profondeur finie ou infinie. Le seul paramètre inconnu dans celles-ci est l'épaisseur du filet δ_f, dépendant de la profondeur d'eau et qui est fonction de l'angle d'incidence. La détermination de la dépendance $\delta_f = f(\alpha)$ permettra par la suite d'utiliser les formules déduites pour le calcul des composantes des forces. La solution de ce problème ainsi que l'étude de la loi de distribution de la pression sur la surface de la plaque sont possibles lorsqu'on utilise les méthodes élaborées dans la théorie des écoulements par filets d'un fluide parfait.

Le problème d'un écoulement irrotationnel plan sera résolu, si l'on parvient à déterminer la fonction caractéristique de cet écoulement $w(z) = \varphi + i\psi$.

Pour cela, on doit satisfaire à la condition aux limites pour l'imperméabilité $v_n = 0$ le long des frontières solides (par exemple, d'une plaque plane, d'un fond). En outre, il faut prendre en compte que le long de la surface libre et la surface du filet la pression est constante et la vitesse est dirigée tangentiellement et, en vertu de l'intégrale d'Euler, est partout constante et égale à v_∞. Cette dernière condition est caractéristique pour les écoulements par filets. Sa complexité consiste en ce qu'elle est observée le long des surfaces libres, dont la forme n'est pas connue à l'avance et doit être trouvée au cours de la solution du problème.

Pour parer à cette difficulté, on peut faire appel au procédé utilisé au § 94 à l'étude de la théorie non linéaire des ondes et explorer, au lieu d'un écoulement réel dans le plan z avec fonction caractéristique $w(z)$, son image dans le plan auxiliaire de la variable complexe $\varphi + i\psi$. Ceci signifie que nous partirons du fait que la fonction $w(z)$ réalise la représentation conforme du plan z sur le plan w. Dans ce cas doit exister également la fonction inverse de celle-ci

$$z = f(w) \qquad \text{(XIV.27)}$$

qui assure la représentation conforme du plan w sur le plan physique z. Il s'avère que dans de nombreux cas il est plus facile de trouver la fonction inverse (XIV.27) que la fonction $w(z)$. En transformant la relation (XIV.27), on peut trouver la fonction $w(z)$. Malgré qu'il ne soit pas toujours possible d'effectuer la transformation indiquée, cela n'empêche pas l'étude des caractéristiques principales de l'écoulement étudié.

Si l'on construit préalablement l'image de l'écoulement étudié dans un plan auxiliaire quelconque de la variable complexe, on peut, pour trouver la relation (XIV.27), se servir des procédés basés sur la

méthode des représentations conformes. Ce mode de résolution est principalement basé sur les méthodes proposées par Kirchhoff, Joukovski et Levy-Civita.

Dans la méthode de Kirchhoff on utilise la fonction auxiliaire de la variable complexe ζ_1 liée à la fonction w par la relation

$$\zeta_1 = \frac{dz}{dw}. \tag{XIV.28}$$

L'image de l'écoulement envisagé peut être représentée dans ce plan ζ_1. Si, ensuite, on parvient à déterminer par la méthode des représentations conformes la liaison entre les images des écoulements dans les plans ζ_1 et w

$$\zeta_1 = f_1(w),$$

alors, en utilisant l'expression (XIV.28) et en l'intégrant par rapport à w, on obtiendra la relation (XIV.27) sous la forme

$$z = \int f_1(w)\,dw. \tag{XIV.29}$$

Dans la méthode de Joukovski on prend pour la fonction auxiliaire de la variable complexe ζ_2 liée à w par la relation

$$\zeta_2 = \ln \frac{v_\infty\, dz}{dw}, \tag{XIV.30}$$

où v_∞ est la vitesse sur la surface libre du jet.

On peut également construire l'image de l'écoulement envisagé dans le plan ζ_2. Si après cela, au moyen des représentations conformes, on arrive à déterminer la liaison

$$\zeta_2 = f_2(w),$$

alors, en tenant compte de ce que d'après (XIV.30)

$$\frac{dz}{dw} = \frac{e^{\zeta_2}}{v_\infty},$$

nous obtiendrons la solution du problème sous la forme

$$z = \frac{1}{v_\infty} \int e^{f_2(w)}\,dw. \tag{XIV.31}$$

Dans la méthode de Levy-Civita on utilise la fonction auxiliaire

$$\zeta_3 = i \ln \frac{dw}{dz\, v_\infty}. \tag{XIV.32}$$

Si la fonction de transformation $\zeta_3 = f_3(w)$ est connue, alors on trouve la solution du problème sous la forme

$$z = \frac{1}{v_\infty} \int e^{i\zeta_3(w)}\,dw. \tag{XIV.33}$$

Le choix de telle ou autre méthode dépend des particularités de l'écoulement envisagé. En particulier, la méthode de Joukovski convient bien pour le cas où les frontières solides de l'écoulement sont des segments de droites; la méthode de Levy-Civita est commode pour l'étude de l'écoulement autour des contours curvilignes avec détachements des filets. Toutes les trois méthodes citées sont largement utilisées dans la théorie des écoulements par filets [7].

Utilisons les méthodes de la théorie des écoulements par filets pour l'élaboration de la théorie du glissement en cas d'un fluide de profondeur infinie. En considérant l'écoulement autour d'une plaque glissante dans le plan de la variable complexe z, supposons l'origine du système des axes des coordonnées x, y, située sur le bord arrière de la plaque (fig. XIV.4.*a*).

Construisons l'image de cet écoulement dans le plan $w = \varphi + i\psi$ montré sur la fig. XIV.4, *b*. En construisant cette image, tenons compte du fait suivant. En comptant la fonction de courant, prenons pour initiale la ligne de courant qui se ramifie au point critique B situé à la surface de la plaque, c'est-à-dire posons $\psi = 0$ le long de ses branches BAD, BC et BD_2. Dans ce cas, le long de la ligne de courant D_1C_1 la valeur de ψ est égale au débit volumétrique du fluide dans le filet plan, c'est-à-dire $\psi = v_\infty\delta_f$. Admettons que le potentiel $\varphi = 0$ au point B. Alors, étant donné que $\overline{v} = \text{grad}\ \varphi$, le potentiel s'accroît dans la direction de la vitesse d'écoulement. Par conséquent, aux lignes de courant BC et BAD correspondent les côtés supérieur et inférieur de la partie positive de l'axe réel φ sur la fig. XIV.4,*b*; à la ligne de courant D_1C_1 correspond la droite parallèle à l'axe réel et distant de cet axe de $\psi = v_\infty\delta_f$ et à la région de l'écoulement le demi-plan disposé au-dessous de cette droite, déduction faite du tronçon passé deux fois du demi-axe positif φ.

Pour résoudre ce problème, servons-nous de la méthode de Joukovski, c'est-à-dire introduisons la fonction auxiliaire de la variable complexe $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$ en vertu de l'expression (XIV.30). En prenant en considération que

$$\frac{dw}{dz} = ve^{-i\theta}.$$

où θ est l'angle formé par le vecteur vitesse v avec l'axe des x dans le plan z, nous obtenons

$$\zeta_2 = \ln\frac{v_\infty}{ve^{-i\theta}} = \ln\frac{v_\infty}{v} + i\theta.$$

D'où il résulte

$$\xi_2 = \ln\frac{v_\infty}{v}; \quad \eta_2 = \theta.$$

Ces relations permettent de construire facilement dans le plan ζ_2 l'image de l'écoulement envisagé. A cet effet remarquons que sur les frontières libres du filet et de la surface libre, c'est-à-dire partout où

$v = v_\infty$, $\xi_2 = 0$. Ceci a lieu sur les lignes AD et C_1D_1. Le long de la ligne de courant BC la vitesse v est dirigée le long de l'axe des x ($\theta = 0$) et varie de 0 jusqu'à v_∞, et ξ_2 de ∞ jusqu'à 0; par conséquent, le segment qui lui correspond dans le plan ζ_2 coïncide avec la partie positive de l'axe réel. Le long de la ligne BA la vitesse est dirigée dans le sens contraire $\theta = \eta_2 = \pi$, et ξ_2 varie de ∞ à 0. On en déduit que dans le plan ζ_2 l'image du courant sera constituée par l'intérieur de la demi-bande $BADCB$ (fig. XIV.4,*c*).

Cherchons maintenant à définir la liaison entre les plans w et ζ_2. Pour cela, introduisons un plan auxiliaire supplémentaire de la variable complexe $t = \tau + i\varepsilon$, dans lequel à la région de l'écoulement correspond le demi-plan supérieur et les points caractéristiques de l'écoulement sont disposés sur l'axe réel (fig. XIV.4, *d*).

Par introduction du plan t nous avons réduit le problème à la représentation des régions polygonales situées dans les plans w et ζ_2 sur le demi-plan supérieur. De la théorie des représentations conformes on sait qu'une telle représentation se détermine univoquement s'il y a conformité de trois points des contours dans les plans envisagés.

En tenant compte de ce fait, choisissons les coordonnées suivantes des points dans le plan t: A $(-1,0)$; B $(b, 0)$; C $(1, 0)$; D $(\infty, 0)$, où b est une constante inconnue.

La représentation de l'intérieur du polygone dans le plan ζ_2 sur le demi-plan supérieur t s'effectue à l'aide de la formule de Schwartz-Christoffel qui, en cas d'un polygone à n angles dans lequel à l'un des sommets dans le plan t correspond un point éloigné à l'infini $\tau_n = \infty$, a la forme

$$\zeta_2 = C^* \int_0^t (t-\tau_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (t-\tau_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (t-\tau_{n-1})^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}} dt + C^{**}, \quad \text{(XIV.34)}$$

où α_i sont des angles intérieurs aux sommets du polygone dans le plan ζ_2; τ_i les abscisses des points qui leur correspondent sur l'axe réel dans la région de la variable complexe t.

En tenant compte du fait que suivant la fig. XIV.4,*c* $\alpha_A = \pi/2$; $\alpha_D = \pi$, $\alpha_C = \pi/2$ et $\alpha_B = 0$ et en employant la formule (XIV.34), nous trouvons

$$\zeta_2 = C^* \int_0^t (t-1)^{-1/2} (t+1)^{-1/2} (t-b)^{-1} dt + C^{**}. \quad \text{(XIV.35)}$$

En intégrant cette expression, il vient

$$\zeta_2 = -\frac{C^*}{\sqrt{b^2-1}} \ln \frac{1-bt+\sqrt{(1-b^2)(1-t^2)}}{t-b} + C^{**}.$$

On détermine la constante C^{**} d'après la condition suivant laquelle au point C dans le plan t correspond $t = 1$ et dans le plan ζ_2 correspond $\zeta_2 = 0$. Pour son observation, il est nécessaire que $C^{**} = 0$. La constante C^* se définit à partir de la condition d'après laquelle lors du passage de AB à CB dans le plan ζ_2 la partie imaginaire de la fonction doit varier de πi. Pour cela il faut que

$$C^* = -i\sqrt{1-b^2}.$$

En définitive

$$\zeta_2 = \ln\frac{1-bt+\sqrt{(1-b^2)(1-t^2)}}{t-b}. \qquad \text{(XIV.36)}$$

Employons maintenant la formule (XIV.34) pour la détermination de la fonction de transformation $w = f(t)$. On doit tenir compte de ce que dans le plan w (fig. XIV.4,b) les angles intérieurs du polygone de la région de l'écoulement $\alpha_A = \pi$, $\alpha_D = 0$, $\alpha_C = 0$ et $\alpha_B = 2\pi$. Alors, en vertu de la formule (XIV.34), il vient

$$w = D^* \int_0^t (t-b)(t-1)^{-1}\,dt + D^{**} \qquad \text{(XIV.37)}$$

ou après intégration

$$w = D^*[t+(1-b)\ln(t-1)] + D^{**}.$$

Déterminons la constante D^{**} d'après la condition suivant laquelle $w = 0$, pour $t = b$,

$$D^{**} = -D^*[b+(1-b)\ln(b-1)],$$

et la constante D^* d'après la condition qu'au passage de BC à D_1C_1 la fonction de courant reçoit un accroissement $v_\infty\delta_f$

$$D^* = -\frac{v_\infty\delta_f}{\pi(1-b)}. \qquad \text{(XIV.38)}$$

Par conséquent,

$$w = -\frac{v_\infty\delta_f}{\pi(1-b)}\left[t-b+(1-b)\ln\frac{t-1}{b-1}\right]. \qquad \text{(XIV.39)}$$

Comme la liaison entre les fonctions ζ_2 et w s'est finalement trouvée exprimée par le paramètre t, l'emploi dans le cas donné de la formule (XIV.31) pour l'obtention de la dépendance $z = f(w)$ s'avère être incommode. Il est plus simple de déterminer la liaison entre z et le paramètre t. Pour cela, tenons compte du fait que d'après les formules (XIV.37) et (XIV.38)

$$\frac{dw}{dt} = \frac{v_\infty\delta_f}{\pi(1-b)}\,\frac{t-b}{t-1}. \qquad \text{(XIV.40)}$$

En même temps, suivant (XIV.36)

$$\zeta_2 = \ln \frac{v_\infty\, dz}{dw} = \ln \frac{1 - bt + \sqrt{(1-b^2)(1-t^2)}}{t-b},$$

c'est-à-dire

$$v_\infty \frac{dz}{dw} = \frac{1 - bt + \sqrt{(1-b^2)(1-t^2)}}{t-b}. \qquad \text{(XIV.41)}$$

Alors, en vertu des formules (XIV.40) et (XIV.41), on trouve

$$\frac{dz}{dt} = \frac{[1 - bt + \sqrt{(1-b^2)(1-t^2)}]\,(t-1)(1-b)\,\pi}{v_\infty^2 \delta_f\,(t-b)^2}. \qquad \text{(XIV.42)}$$

On peut déterminer la valeur de la constante b si l'on tient compte qu'à l'infini, c'est-à-dire au point D_1 sur la fig. XIV.4,*a*,

$$\frac{v_\infty}{\frac{dw}{dz}} = \frac{v_\infty}{v_\infty e^{-i(\pi-\alpha)}} = e^{i(\pi-\alpha)}. \qquad \text{(XIV.43)}$$

Etant donné qu'à ce point sur la fig. XIV.4,*d* correspond $t \to \infty$, alors, en ouvrant l'indétermination pour $t \to \infty$ dans la formule (XIV.40) et en comparant le résultat à (XIV.43), on peut montrer que

$$b = \cos\alpha.$$

En substituant cette valeur de b dans (XIV.42) et en effectuant l'intégration, nous trouvons

$$z = \frac{\delta_f}{\pi(1-\cos\alpha)} \Big[\cos\alpha\,(1+t) - (1-\cos\alpha) \ln \frac{1-t}{2} + \\ + \sin\alpha \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin t - \sqrt{1-t^2} \right) \Big]. \qquad \text{(XIV.44)}$$

La relation liant z et w peut être par la suite établie au moyen de la formule (XIV.39) sous la forme paramétrique.

L'expression (XIV.44) permet de trouver la longueur mouillée l de la plaque. Par la longueur l on entend généralement l'abscisse x de la plaque sur laquelle la perpendiculaire tirée à sa surface touche la base du filet au point E (fig. XIV.4,*a*). La valeur de t correspondant à ce point peut être trouvée à l'aide de la formule (XIV.41) en partant de la condition suivant laquelle dans le système de coordonnées x, y la vitesse complexe au point E est purement imaginaire et son module est égal à v_∞. Cette condition permet d'obtenir l'expression suivante pour l'abscisse $x = l$:

$$l = \frac{\delta_f}{\pi} \left(\frac{1 + \cos\alpha + \pi \sin\alpha}{1 - \cos\alpha} + \ln \frac{2\cos\alpha}{1-\cos\alpha} \right). \qquad \text{(XIV.45)}$$

En substituant l'épaisseur du filet d'embruns δ_f, obtenue au moyen de cette formule dans (XIV.26), nous trouverons les valeurs

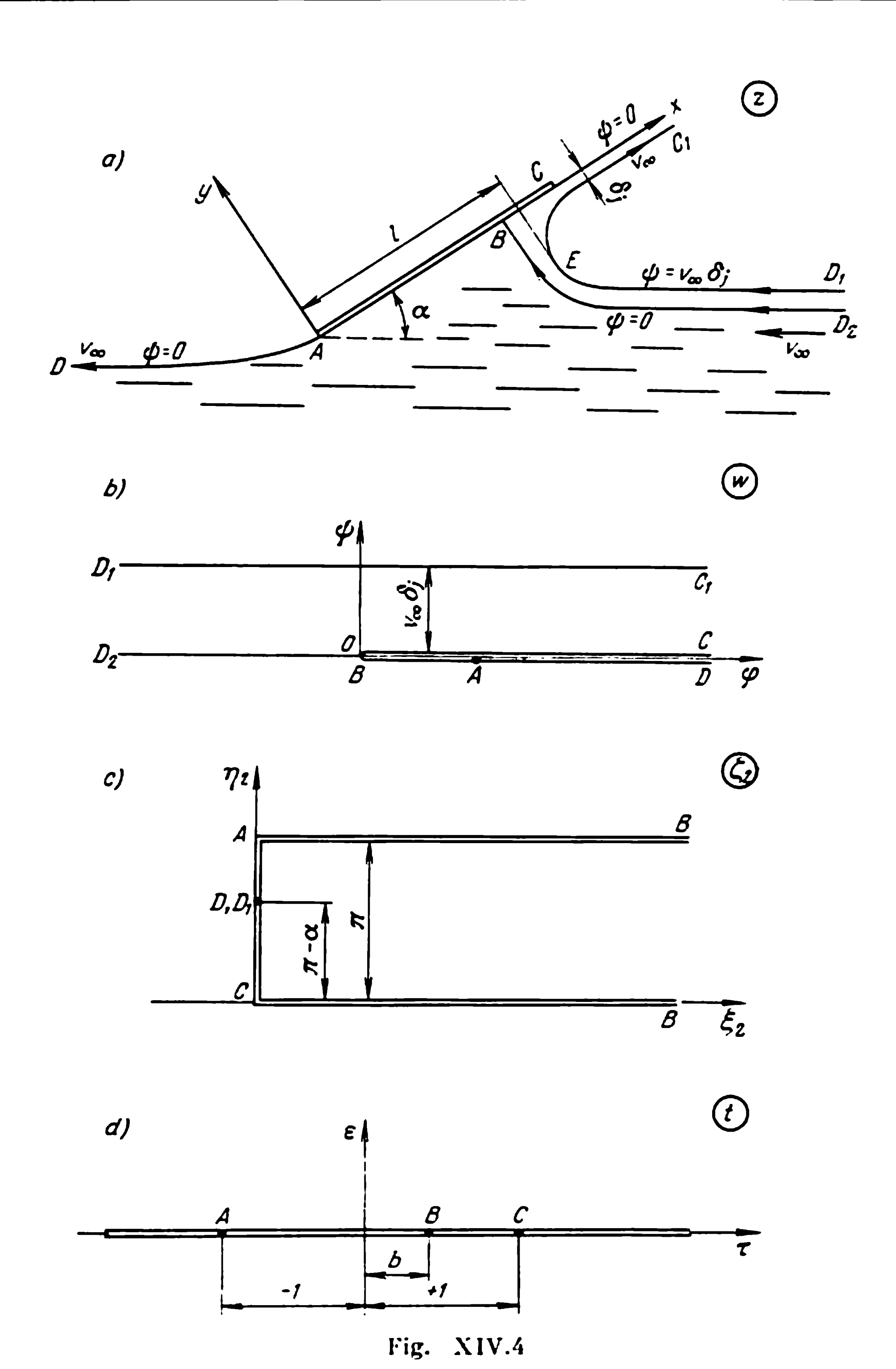

a)
z
y
x
l
C
B
E
A
α
D
C1
D1
D2
v∞
δj
ψ=0
ψ = v∞ δj
b)
w
ψ
D1
C1
D2
O
B
A
C
D
φ
v∞ δj
c)
ζ2
η2
A
B
D,D1
C
B
ξ2
π-α
π
d)
t
ε
A
B
C
τ
b
-1
+1

Fig. XIV.4

de la force de sustentation et de la résistance des embruns selon la théorie non linéaire

$$\left.\begin{aligned} R_y &= \rho v_\infty^2 \frac{l\pi(1+\cos\alpha)}{\left(\frac{1+\cos\alpha+\pi\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\ln\frac{2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\operatorname{tg}\alpha}; \\ R_x &= R_y \operatorname{tg}\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV.46)}$$

En intégrant les moments des forces élémentaires des pressions par rapport au bord arrière, on peut également obtenir l'expression analytique pour la coordonnée relative du centre de poussée

$$\frac{l_D}{l} = \frac{1+\frac{1}{2}\cos\alpha+2(1-\cos\alpha)\ln 2+\frac{\pi}{2}\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)\ln\frac{2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+1+\cos\alpha+\pi\sin\alpha}. \qquad \text{(XIV.47)}$$

La théorie non linéaire du glissement énoncée a été élaborée par S. Tchaplyguine, M. Gourévitch et A. Janpolski. Y. Tchaplyguine et Green ont résolu le problème du glissement d'une plaque plane pour tout angle d'incidence sur la surface d'un fluide de profondeur finie [20].

Pour de faibles angles d'incidence α, on peut obtenir au moyen des formules (XIV.45)-(XIV.47) les corrélations suivantes

$$\delta_f = \frac{l\pi}{4}\alpha^2;$$

$$R_y = \rho v_\infty^2 \frac{l\pi}{2}\alpha;$$

$$\frac{l_D}{l} = \frac{3}{4}.$$

Les valeurs R_y et $\frac{l_D}{l}$ pour de faibles angles d'incidence, obtenues d'après ces relations, correspondent complètement à leurs valeurs (XIV.21) et (XIV.23) obtenues dans la théorie linéaire du glissement pour les nombres $\mathrm{Fr} \to \infty$.

§ 100. CAVITATION

Dans les chapitres précédents nous avons plus d'une fois noté la possibilité de l'apparition dans les différents écoulements de fluide du phénomène de cavitation. La nécessité d'en tenir compte et de l'étudier peut surgir au cours de la résolution des problèmes de la mécanique des fluides externe comme de la mécanique des fluides interne.

La cavitation influe sur les caractéristiques hydrodynamiques des corps et entraîne d'autres phénomènes, y compris l'érosion de la surface du corps sur lequel se développe le phénomène de la cavitation, les bruits et les vibrations. En constructions navales on attache

de l'importance à l'étude de la cavitation, car cette dernière influe sur le fonctionnement des hélices marines, des ailes sous-marines et sur la résistance au mouvement des corps.

Le phénomène de la cavitation se manifeste par l'apparition de discontinuité dans certaines régions de l'écoulement de liquide. Pour de grandes vitesses, ces régions sont généralement les zones de fluide, où les vitesses atteignent leur valeur maximale, c'est-à-dire au voisinage de la surface du corps ou dans la région des noyaux des tourbillons. Par suite de discontinuité, dans le fluide se forment des cavités sous forme de bulles de vapeur ou de vastes cavités remplies de vapeur d'eau et de gaz dégagés par l'eau.

Les observations montrent qu'aux phases initiales de la cavitation le processus de formation des bulles de vapeur a un caractère nettement non stationnaire. Cependant, dans le cas de la cavitation fortement développée et d'une poche d'air formée, on peut considérer la partie principale de l'écoulement, sauf la région où les cavités se résorbent comme un écoulement permanent. L'apparition de discontinuités dans l'écoulement de liquide dépend évidemment de sa capacité de résister aux efforts de traction. Les calculs théoriques, effectués sur la base de la théorie cinétique pour un fluide homogène, montrent que l'eau, par exemple, doit résister à l'effort de traction allant jusqu'à 3200 kgf/cm². Pourtant, ce chiffre ne correspond nullement aux données des expériences. La cause d'une telle non-conformité consiste en ce que la destruction du fluide en traction s'effectue non pas dans tout son volume à la fois. Elle commence beaucoup plus avant aux endroits se prêtant le plus facilement à la destruction, par exemple là où il y a de petites bulles de vapeur, qui pratiquement existent toujours dans un fluide. Les conditions de l'équilibre statique de la bulle, qui dépendent de la pression de la vapeur saturée p_s au sein de celle-ci, de la pression extérieure p et des forces de la tension superficielle, se déterminent de l'équation d'équilibre

$$p_s = p + \frac{2\sigma}{r}, \qquad \text{(XIV.48)}$$

où σ est la constante de capillarité; r le rayon de la bulle.

Cette bulle, étant le noyau ou le germe de la cavitation, commence à croître dans un fluide au repos, si

$$p_s > p + \frac{2\sigma}{r}.$$

Cette inégalité montre que le processus de la croissance des bulles dépend de leur rayon, des propriétés du fluide et de la présence dans celui-ci d'impuretés déterminant la valeur de σ, ainsi que de la valeur de la pression extérieure p. Une influence notable peut également exercer le processus de la diffusion des gaz dissous dans l'eau à l'intérieur de la bulle.

De ce qui a été énoncé il devient clair pourquoi les valeurs calculées de la résistance volumique de l'eau diffèrent si nettement des valeurs théoriques, obtenues sous l'hypothèse de l'homogénéité du liquide, et constituent pour un liquide au repos 20-270 kgf/cm^2.

Dans les conditions d'un écoulement, quand les bulles sont entraînées par le courant, leur stabilité et leur croissance sont soumises à l'influence des forces d'inertie, des forces de la viscosité et de l'hétérogénéité du champ de la pression. Finalement, la condition (XIV.48) n'est pas observée et le processus du développement de la cavitation, considéré comme la croissance des bulles, ne peut pas être décrit par des relations simples. Les données sur la résistance volumique dans un fluide en mouvement dépendent de la vitesse d'écoulement et de la quantité d'air contenue dans l'eau ; les valeurs des efforts de traction dans ce cas sont 0-0,2 kgf/cm^2. Elles augmentent si on soumet préalablement l'eau à une forte pression, en contribuant ainsi à la résorption des bulles, c'est-à-dire à la disparition des noyaux de cavitation.

La présence de fêlures très fines sur les surfaces solides ou les particules solides en suspension dans le liquide contribue à la formation et au développement ultérieur des noyaux de cavitation. De telles fêlures peuvent servir de centres stables de la formation et de la croissance des bulles de cavitation.

Suivant le processus qui est à l'origine de la croissance des bulles, on distingue la cavitation gazeuse et de vaporisation. Lorsque la cavitation est due aux gaz, la croissance de la bulle se détermine par la diffusion du gaz dissous dans l'eau ambiante dans son intérieur. La cavitation ordinairement observée représente un processus conjoint de la croissance de la bulle de vapeur par suite de la perte de stabilité et de la diffusion gazeuse, mais le facteur principal en est la perte de stabilité, c'est-à-dire la cavitation des corps dans un écoulement peut être considérée comme celle due à la vaporisation.

Dans l'écoulement autour d'un corps solide la croissance des bulles de vapeur se produit dans les zones de la pression réduite le long de sa surface à l'intérieur de la couche limite, c'est-à-dire dans la région où l'on observe des pulsations importantes de la vitesse et de la pression. Par la suite, en arrivant dans la zone de l'écoulement où la pression est plus élevée, une telle bulle se résorbe avec bruit.

Dans l'écoulement autour des corps, on distingue deux formes principales de la cavitation : à bulles et pelliculaire. Le début de la cavitation est lié à l'augmentation de la vitesse d'écoulement et à une réduction sensible de la pression dans les régions de la surface du corps, où la surpression est négative. Cette réduction de la pression entraîne le déséquilibre et le commencement de la croissance des noyaux de cavitation, c'est-à-dire des bulles de cavitation qui se forment dans les fêlures microscopiques sur la surface du corps ou sont contenues en amont du courant. Entraînées par le courant, les

bulles de cavitation, toujours en pulsation, croissent, leur nombre augmentant constamment. Cependant, en passant ensuite dans la zone où la pression commence à croître, ces bulles se résorbent en provoquant un bruit et des fluctuations instantanées de la pression

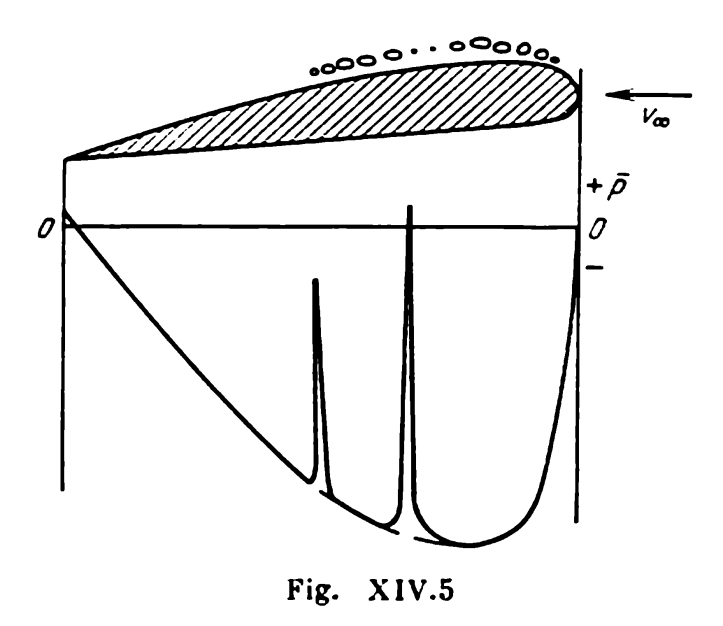


Fig. XIV.5

(fig. XIV.5). Les fluctuations de la pression, dues à la résorption presque instantanée des bulles, provoquent l'érosion du matériau de la surface du corps. Ce phénomène, typique pour une cavitation à bulles, se manifeste dans l'écoulement autour des corps bien profilés avec des points faibles de dépression le long de leur surface. Si la vitesse continue de croître, les bulles, en fusionnant, peuvent former à la surface d'un corps une poche de vapeur. Les observations réalisées au moyen d'une prise du vue accélérée ont permis de déterminer les détails de la formation des poches de vapeur (fig. XIV.6). En réalité la poche est instable. A l'extrémité de la poche formée il apparaît un écoulement inverse de fluide (filet inverse) provoquant le décollement de la poche de la surface du corps avec son déplacement ultérieur en aval de l'écoulement et sa résorption. A l'endroit de sa formation initiale il se forme une nouvelle poche et le cycle recommence.

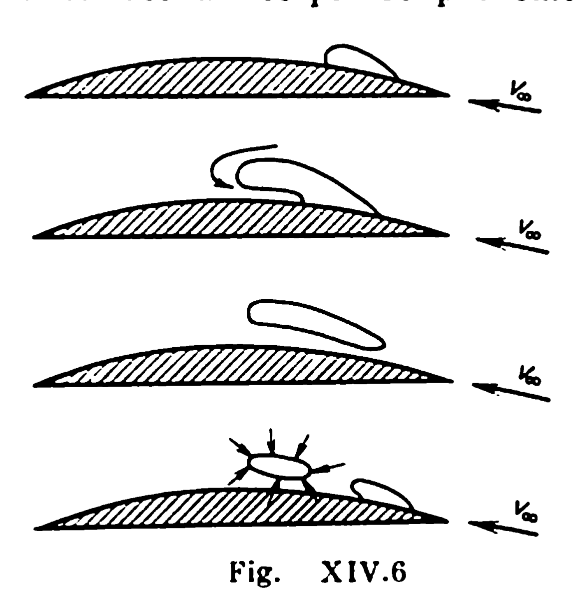


Fig. XIV.6

Pour de grandes vitesses de l'écoulement, l'étendue de la cavitation augmente et on observe la croissance de sa stabilité. La région de la résorption de la cavitation se déplace vers le bord arrière du corps et ensuite sort en dehors des limites de sa surface. La structure globulaire de la cavitation disparaît, elle devient stationnaire et transparente; seulement dans la zone de sa résorption il reste une région de l'écoulement avec un mélange intensif de fluide et une non-stationnarité nettement exprimée. L'érosion de la surface du corps disparaît.

La cavitation pour laquelle on observe la formation d'une poche transparente stationnaire est dite pelliculaire. L'écoulement autour d'un profil, dans lequel la cavitation pelliculaire s'étend sur toute la face dorsale du profil ou la plus grande partie de la surface du

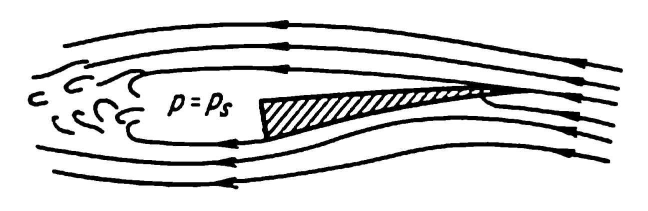


Fig. XIV.7

corps et la résorption de la cavitation se produit derrière celui-ci, s'appelle supercavitation.

L'apparition de telle ou telle forme de cavitation dépend des particularités de la forme du corps et de la loi de distribution de la pression sur sa surface. En créant des corps de forme spéciale, des profils à arêtes vives dits supercavitants, on peut accélérer le processus de développement de la cavitation pelliculaire avec résorption de la cavité derrière le profil (fig. XIV.7).

Dans l'écoulement autour des ailes et des hélices de bateau, la cavitation à bulles se produit également le long des axes des tourbillons qui se détachent de ceux-ci disposés en aval de l'aile.

Les observations montrent que la pression au sein d'une cavité est égale à la pression de la vapeur saturée p_s; avec des pressions proches de cette valeur, la cavitation se produit dans l'eau ordinaire. Ceci conduit à considérer que le processus du développement de la cavitation dépend du nombre d'Euler, inscrit sous la forme

$$\varkappa = \frac{p_\infty - p_s}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} . \qquad \text{(XIV.49)}$$

De la théorie de similitude on sait que $\varkappa$ est dit nombre de cavitation et sert de critère principal à son modelage.

Le nombre de cavitation pour lequel apparaît la cavitation du corps de forme donnée s'appelle critique $\varkappa_{cr}$. Outre la forme du corps,

les valeurs des nombres critiques de cavitation dépendent d'un certain nombre de paramètres qui influent sur les particularités de la croissance des bulles et la structure de l'écoulement. A de tels critères se rapportent les nombres de Reynolds Re, de Strouhal Sh, de Weber We, ainsi que la quantité de gaz dissous dans l'eau.

Pour les évaluations approximatives de la vitesse $v_{\infty c}$, après laquelle commence la cavitation dans l'écoulement autour d'un corps de forme donnée, on peut poser, sans tenir compte des facteurs cités, que la cavitation (indépendamment de sa forme) commencera pour un nombre de cavitation égal à la valeur minimale du coefficient de pression sur la surface du corps, c'est-à-dire

$$\varkappa_{cr} = \bar{p}_{min}. \qquad \text{(XIV.50)}$$

Il est évident que cette condition est équivalente à l'hypothèse que la pression minimale à la surface d'un corps est égale à la pression des vapeurs saturées

$$p_{min} = p_s.$$

En utilisant cette condition et en écrivant l'équation de Bernoulli pour les points disposés loin en amont du corps et sur sa surface, où $p = p_{min}$ et $v = v_{max}$, nous obtenons

$$p_\infty + \frac{\rho v_{\infty c}^2}{2} = p_s + \frac{\rho v_{max}^2}{2}.$$

c'est-à-dire

$$v_{\infty c} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{p_s - p_\infty}{1 - \frac{v_{max}^2}{v_\infty^2}}}. \qquad \text{(XIV.51)}$$

En tenant compte que

$$p_\infty = p_0 + \gamma h,$$

où p_0 est la pression sur la surface libre du fluide ; h la profondeur d'immersion du corps et $1 - \frac{v_{max}^2}{v_\infty^2} = \bar{p}_{min}$, nous obtiendrons la formule suivante pour la détermination approximative de la vitesse du début de la cavitation

$$v_{\infty c} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{p_s - p_0 - \gamma h}{\bar{p}_{min}}}. \qquad \text{(XIV.52)}$$

Cette formule montre que l'augmentation de la profondeur d'immersion h du corps favorise à l'élimination de la cavitation. Pour une profondeur d'immersion invariable, la vitesse d'écoulement sans cavitation augmente si l'on utilise des formes de corps telles pour lesquelles les valeurs $\bar{p}_{min}$ sont faibles, par exemple, des profils

minces avec une épure régulière de la distribution de la pression sur le côté supérieur, contournés pour de faibles angles d'attaque.

Comme le processus du passage à la cavitation étendue et surtout à la cavitation pelliculaire s'observe pour de faibles valeurs de $\varkappa$, il devient nécessaire d'élaborer les méthodes de diminution des valeurs des nombres de cavitation. Il résulte de la relation (XIV.49) qu'on peut l'atteindre en diminuant p_∞, c'est-à-dire par réglage (diminution), par exemple, de la pression p_0 sur la surface du fluide. Cette méthode est usitée pour l'étude de la cavitation dans les conduites.

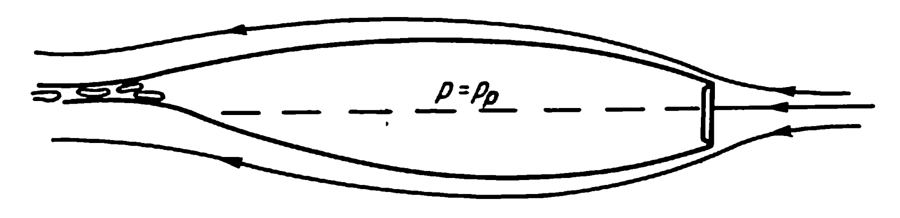


Fig. XIV.8

L'autre méthode consiste à varier la pression dans la cavité, c'est-à-dire à atteindre les conditions pour lesquelles la pression dans la cavité est $p_c > p_s$. On l'emploie pour la création de ce que l'on appelle la cavitation artificielle au moyen de l'insufflation de l'air ou d'autre gaz dans l'écoulement du fluide par un ajutage ou à travers des trous pratiqués à la surface du corps, disposés au début de la poche. En cas de grandes pressions p_c de l'air à l'intérieur de la cavité, on peut ainsi obtenir de très faibles nombres de cavitation, même pour des vitesses de mouvement relativement faibles

$$\varkappa = \frac{p_\infty - p_c}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} .$$

La fig. XIV.8 montre le schéma d'une poche de vapeur obtenue par insufflation de l'air dans l'écoulement au moyen d'un ajutage en forme de disque. La poche de vapeur, formée après insufflation de l'air ou lors d'une supercavitation, a une forme asymétrique; ceci témoigne de l'influence de la force de pesanteur, et par conséquent du nombre Fr sur le processus de la cavitation et sur la structure de l'écoulement autour de la poche de vapeur.

Le développement de la cavitation exerce une influence notable sur les forces hydrodynamiques apparaissant en mouvement des corps. Sur la fig. XIV.9 sont représentées les courbes des valeurs des coefficients C et C_y, ainsi que de la longueur de la région de cavitation l_c en parties de la corde l_c/b pour une aile avec un angle d'attaque constant en fonction du nombre de cavitation. L'augmentation des valeurs de C_y, signalée au début du développement de la

cavitation, est due à la croissance de la zone de pression basse, c'est-à-dire de la dépression sur l'extrados du profil au fur et à mesure de la propagation de la cavitation. Cependant, lorsque la cavitation se répand sur toute la partie supérieure du profil, la pression y devient

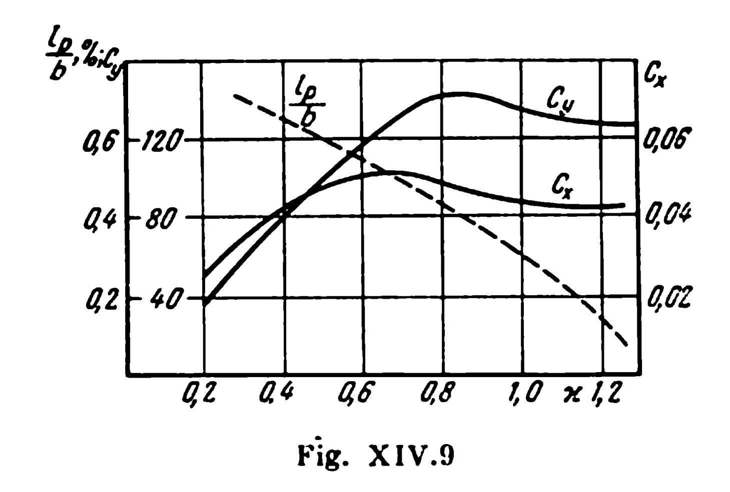


Fig. XIV.9

partout égale à p_s et, avec la croissance de la vitesse, ne diminue plus. Ceci conduit à la diminution des valeurs de C_y et C_x au fur et à mesure de la diminution ultérieure des nombres de cavitation.

§ 101. THÉORIE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR DES CORPS AVEC CAVITATION

Actuellement on arrive à effectuer le calcul théorique des écoulements avec cavitation non pas pour toutes les formes connues de la cavitation. La théorie de l'écoulement autour des corps avec cavitation n'existe que pour l'écoulement avec cavitation pelliculaire, c'est-à-dire pour l'écoulement autour d'un corps tel où il existe une poche de vapeur due à la cavitation, la pression à l'intérieur de laquelle peut être considérée constante, minimale dans l'écoulement et égale à p_s. On trouve possible de négliger l'influence de l'écoulement non stationnaire, toujours observé à la fin de la poche de vapeur, c'est-à-dire dans la zone de sa fermeture, sur les caractéristiques de l'écoulement et de considérer l'écoulement autour du corps avec cavitation comme permanent. En négligeant l'influence de la viscosité du fluide, et dans de nombreux cas de sa pesanteur, on peut considérer l'écoulement comme potentiel. En supposant la pression dans la poche de vapeur minimale et constante, on est amené à conclure que la vitesse sur sa frontière v_c est également constante, qu'elle a une valeur maximale et suivant l'équation de Bernoulli

$$p_\infty+\frac{\rho v_\infty^2}{2}=p_s+\frac{\rho v_c^2}{2}$$

elle est égale à

$$v_c = v_\infty \sqrt{1 + \frac{p_\infty - p_s}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}}} = v_\infty \sqrt{1+\varkappa}. \qquad \text{(XIV.53)}$$

La pression lors du passage suivant une normale de la poche par sa frontière à l'intérieur du fluide ne subit pas de discontinuité, et dans l'écoulement en dehors de la poche elle remonte. Etant donné que suivant l'équation d'Euler (IV.1) dans un fluide non pesant

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

alors la projection de l'accélération des particules sur la direction de la normale n à la surface de la poche

$$\frac{dv_n}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}.$$

En tenant compte qu'en mouvement permanent

$$\frac{dv_n}{dt} = -\frac{v^2}{R},$$

où R est le rayon de courbure des lignes de courant, et en dehors de la poche $\partial p/\partial n > 0$, nous arrivons à la conclusion que $R > 0$, c'est-à-dire les lignes de courant et, par conséquent, les frontières de la poche sont dirigées la convexité vers l'extérieur de la poche de vapeur.

Ces propriétés des poches de vapeur sont très importantes et doivent être prises en compte lorsqu'on élabore des schémas théoriques de l'écoulement avec cavitation; elles permettent à un certain degré de juger de la longueur possible de la poche de vapeur. A la fin de la poche il doit se produire la jonction des lignes de courant convexes, correspondant à ses frontières. Cependant, à l'endroit de la jonction de ces lignes, où la vitesse a une valeur finie, il doit apparaître un point critique en lequel $v_c = 0$. Cette condition est en contradiction avec la formule (XIV.53) déterminant la vitesse le long de la frontière de la poche. Pour cette raison, l'unique possibilité d'éliminer cette contradiction est de considérer la poche de vapeur comme étant ouverte ou comme se fermant à l'infini. Comme il suit des données des expériences que la longueur de la poche augmente avec la diminution du nombre de cavitation, on peut rapporter la poche ouverte au cas de l'écoulement avec cavitation pour $\varkappa = 0$. Pour $\varkappa > 0$, quand suivant les résultats des expériences la poche a une longueur finie, il est indispensable d'utiliser différents schémas artificiels des écoulements avec cavitation, permettant d'éliminer les difficultés notées lors de sa fermeture.

La résolution des problèmes de l'écoulement avec cavitation nécessite la connaissance de la position des points de décollement de

la poche sur la surface du corps. En écoulement autour d'un corps à bords aigus on admet généralement que le décollement, c'est-à-dire le commencement de la poche de vapeur, est disposé sur ces bords. En ce qui concerne la position de ces points en écoulement autour des corps à bords arrondis, sa détermination est liée à des difficultés. On peut démontrer [3] que l'endroit des points de décollement sera déterminé si l'on part de la condition que les frontières de la poche de vapeur aux points de son décollement de la surface curviligne ont une courbure finie.

Les recherches théoriques ont permis de déterminer qu'avec de faibles valeurs des nombres de cavitation on peut utiliser pour le calcul du coefficient de résistance des corps la relation suivante

$$C_x = C_{x0}(1+\varkappa), \qquad \text{(XIV.54)}$$

où C_{x0} est le coefficient de résistance du corps pour un nombre $\varkappa = 0$, c'est-à-dire lors de l'écoulement autour de ce corps avec une poche de vapeur de longueur infinie.

Comme il est relativement plus facile de résoudre le problème de l'écoulement autour des corps avec cavitation si $\varkappa = 0$, la formule (XIV.54) devient très importante.

Actuellement, la théorie la plus élaborée est celle des écoulements plans avec cavitation qui peut être divisée en théorie linéaire et non linéaire de la cavitation.

Envisageons la théorie linéaire de la cavitation pour $\varkappa = 0$, quand la poche de vapeur derrière le corps a une longueur infinie. Nous admettons que la poche de vapeur se forme à l'arrière d'un profil mince ayant la forme d'un arc aux bords avant et arrière aigus, situé dans le plan de la variable complexe z (fig. XIV.10,*a*). L'équation des ordonnées de ce profil dans le système de coordonnées adopté $y = f(x)$ est supposée connue. Supposons que le commencement de la poche se trouve dans les bords avant et arrière aigus du profil. En posant l'angle d'attaque du profil petit, on peut considérer la poche formée comme mince.

La fonction caractéristique de cet écoulement peut être inscrite sous la forme

$$w(z) = v_\infty z + w_1(z).$$

Ici $w_1(z)$ est la fonction des vitesses induites v_{x_1} et v_{y_1}. Avec de faibles valeurs des ordonnées du profil ce qui correspond à sa faible courbure et aux petits angles d'attaque, ces vitesses peuvent également être supposées petites. Déterminons les conditions aux limites du problème. Le long des frontières supérieure et inférieure de la poche, d'après la formule (XIV.53), $v_c = v_\infty$. En admettant les angles d'inclinaison de la surface de la poche sur l'axe des x petits, cette condition peut s'écrire sous la forme $v_x = v_\infty$, c'est-à-dire

$$v_{x_1} = 0. \qquad \text{(XIV.55)}$$

Sur le côté inférieur du profil, qui est une ligne de courant, en tenant compte de l'équation des lignes de courant (III.6)

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y},$$

c'est-à-dire étant donné que $v_x = v_\infty + v_{x_1}$ et $v_y = v_{y_1}$, alors

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v_{y_1}}{v_\infty+v_{x_1}}.$$

En négligeant le rapport v_{x_1}/v_∞, comme d'une petite grandeur,

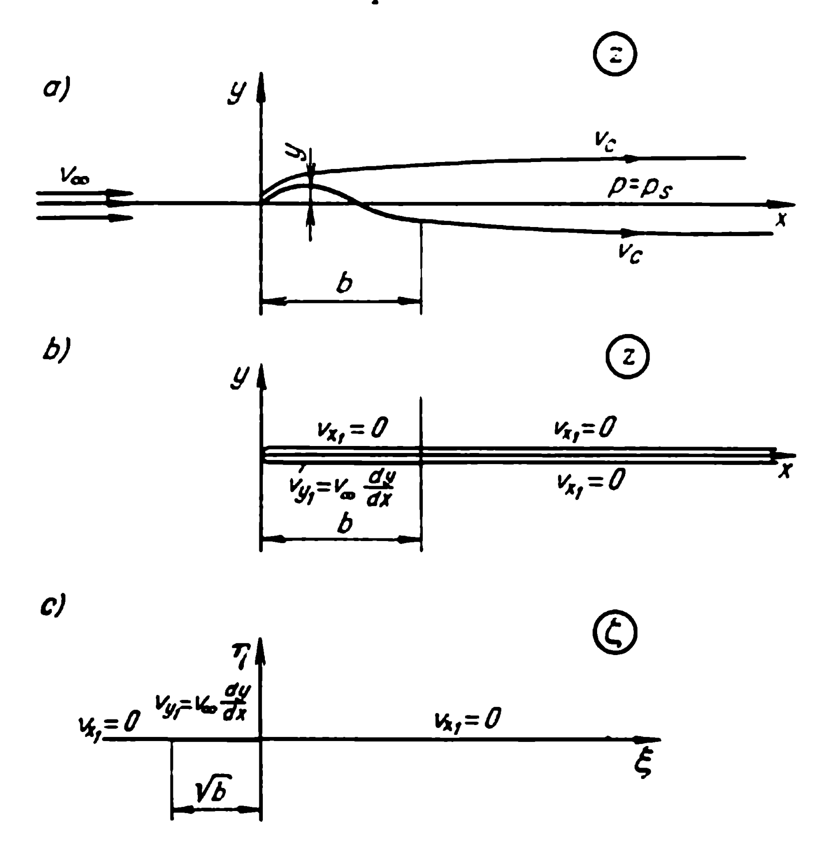


Fig. XIV.10

écrivons la condition aux limites simplifiée

$$v_{y_1}=v_\infty\frac{dy}{dx}, \qquad \text{(XIV.56)}$$

qui correspond complètement à la relation (XII.128) de la théorie de l'aile mince, puisque dans le système de coordonnées adopté $dy/dx = \alpha - F'$.

Reportons maintenant toutes les conditions aux limites de la surface de la poche de vapeur et du côté inférieur du profil sur les côtés supérieur et inférieur de l'axe réel des x (fig. XIV.10,b), après

quoi, en désignant la corde du profil par b, nous aurons

$$v_{x_1}=0 \text{ avec } y=+0 \text{ et } 0<x<\infty;$$

$$v_{y_1}=v_\infty \frac{dy}{dx} \text{ avec } y=-0 \text{ et } 0<x<b;$$

$$v_{x_1}=0 \text{ avec } y=-0 \text{ et } b<x<\infty.$$

A la région de l'écoulement correspond tout le plan z, sauf la section le long de la partie positive de l'axe réel des x.

Faisons appel maintenant à la méthode des représentations conformes. Représentons le plan z sur le plan auxiliaire ζ au moyen de la fonction de transformation

$$\zeta=\sqrt{z}=r^{1/2}e^{-\frac{i\theta}{2}}. \qquad \text{(XIV.57)}$$

Il est aisé de déterminer qu'après une telle transformation à tout le plan z, c'est-à-dire à la région de l'écoulement, correspondra le demi-plan inférieur dans la région de la variable ζ (fig. XIV.10,c). Les conditions $v_{x_1}=0$ seront observées sur l'axe réel en dehors de son segment $0 \div -\sqrt{b}$ le long duquel $v_{y_1}=v_\infty\, dy/dx$. Un problème analogue a été examiné dans la théorie linéaire du glissement (§ 98). La différence consiste seulement dans la longueur du segment le long duquel est observée la condition d'imperméabilité. Donc, le problème de l'écoulement autour d'un arc avec cavitation peut être réduit au problème du glissement (pour $\mathrm{Fr}\to\infty$) du profil sur le fluide, mais dont la forme est autre que celle initiale.

L'équation des ordonnées de ce nouveau profil $\eta=f(\xi)$ ayant une corde $\sqrt{b}$ peut être trouvée si l'on part du fait que la forme de la condition aux limites (XII.56) sur l'axe réel reste la même et que dans la dérivée des ordonnées du profil on doit seulement tenir compte du changement de la variable $x=\xi^2$, c'est-à-dire

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f'(\xi^2). \qquad \text{(XIV.58)}$$

La présence de l'analogie avec une plaque glissante permet pour pas suivant d'utiliser l'analogie avec une aile mince, établie dans la théorie linéaire du glissement.

Maintenant pour le calcul de la force portante du profil on peut employer la formule de la pression (XIV.19) obtenue dans la théorie linéaire du glissement

$$(p-p_0)_\pm=\mp\rho v_\infty v_{x_1}.$$

En tenant compte que, suivant la fig. XIV.10,b, le long du côté supérieur du segment b de l'axe des x $v_{x_1}=0$ et le long du côté infé-

rieur v_{x_1} est négative, et en intégrant les pressions, nous obtenons

$$R_y = \int_0^b (p_- - p_+)\, dx = \rho v_\infty \int_0^b v_{x_1}\, dx.$$

Dans le plan ζ, où sur l'axe réel $\xi^2 = x$ et $dx = 2\xi d\xi$,

$$R_y = 2\rho v_\infty \int_0^{\sqrt{b}} \xi v_{\xi_1}(\xi)\, d\xi. \qquad \text{(XIV.59)}$$

Le moment par rapport à l'origine des coordonnées du profil mince transformé dans le plan ζ contourné par un courant continu est

$$M = \int_0^{\sqrt{b}} (p_- - p_+)\, \xi\, d\xi = 2\rho v_\infty \int_0^{\sqrt{b}} v_{x_1}(\xi)\, \xi\, d\xi.$$

La comparaison de cette expression avec (XIV.59) montre qu'elles coïncident. Ceci montre que le coefficient de la force portante du profil de cavitation dans le plan z

$$C_{y(z)} = C_{m(\zeta)}, \qquad \text{(XIV.60)}$$

c'est-à-dire est égal au coefficient du moment du profil mince sans cavitation transformé, contourné par un courant continu avec une vitesse v_∞ dans le plan ζ. D'une façon analogue, on peut démontrer que

$$C_{x(z)} = \frac{1}{8\pi} C^2_{y(\zeta)}. \qquad \text{(XIV.61)}$$

En cas d'une plaque plane produisant la cavitation avec de faibles angles d'attaque $dy/dx = \alpha = \text{const}$, par conséquent, suivant (XIV.58) son image dans le plan ζ sera aussi une plaque plane, mais de plus petite longueur. Pour une plaque plane sans cavitation suivant les formules (XII.94) et (XII.96) avec de faibles angles d'attaque

$$C_{y(\zeta)} = 2\pi\alpha\,;$$

$$C_{m(\zeta)} = \frac{\pi}{2}\alpha.$$

Alors en nous servant des équations (XIV.60) et (XIV.61), nous trouvons immédiatement que pour une plaque plane avec $\varkappa = 0$ et avec de faibles angles d'attaque

$$\left.\begin{aligned} C_{x0} &= \frac{\pi\alpha^2}{2}\,; \\ C_{y0} &= \frac{\pi\alpha}{2}\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV.62)}$$

La théorie linéaire énoncée a été proposée par Touline. La théorie linéaire de l'écoulement autour des profils pour les nombres de cavitation $\varkappa > 0$ et avec fermeture de la poche de vapeur aussi bien derrière le profil que sur sa surface a été construite par A. Ivanov et Gurst [19].

La théorie non linéaire de la cavitation pour les nombres $\varkappa = 0$ peut être élaborée en se basant sur les schémas de résolution des problèmes de l'écoulement par filets autour des corps. Cependant leur utilisation, quand les nombres de cavitation $\varkappa > 0$, se heurte à des difficultés liées au choix du mode de fermeture de la poche, sans perturber ses principales propriétés décrites au commencement du paragraphe. Divers auteurs ont proposé des schémas permettant de satisfaire aux conditions de l'écoulement et aux propriétés de la poche de vapeur dans la région du corps. Pourtant tous ces schémas déforment considérablement la structure de l'écoulement à la fin de la poche de vapeur.

De tous ces schémas le plus simple est celui proposé par Riabouchinsky. Expliquons-le sur l'exemple de l'étude de l'écoulement avec cavitation autour d'une plaque plane normale à la vitesse à l'infini (fig. XIV.11,*a*). Sur ce schéma, à l'endroit où la poche se ferme on place une plaque fictive, analogue et symétrique à celle qu'on étudie, les frontières de la poche se joignant sur ses bords aigus. La longueur de la poche l_p est égale à la distance entre les plaques étudiée et fictive; on détermine cette longueur, la forme des frontières de la poche et la force agissant sur la plaque étudiée comme une fonction du nombre de cavitation au cours de la résolution du problème.

D. Efros a proposé un autre schéma de l'écoulement autour des corps avec une poche de vapeur de longueur finie. Suivant ce schéma, illustré par la fig. XIV.11,*b* sur l'exemple de l'écoulement autour d'une plaque, à la fin de la poche de vapeur il apparaît un filet inverse qui entraîne une certaine partie du fluide de l'écoulement. Les frontières de la poche sont partout dirigées la convexité vers l'extérieur et le point critique K n'apparaît pas sur la surface de la poche étant disposé à l'intérieur de l'écoulement. Pour éviter l'interaction du filet avec le côté opposé de la plaque, ainsi que le remplissage de la poche par de l'eau, on suppose que le filet passe sur la seconde feuille du plan multiforme de la variable complexe. L'emploi de ce procédé mathématique permet de résoudre le problème de l'écoulement avec cavitation non seulement autour d'une plaque, mais aussi autour d'un cylindre circulaire et d'autres contours.

N. Joukovski a proposé le schéma de résolution des problèmes, utilisé à présent par Rochko et autres chercheurs pour l'étude de l'écoulement avec cavitation autour des corps pour des nombres de cavitation $\varkappa > 0$. Il est illustré sur la fig. XIV.11, *c* pour le cas de l'écoulement autour d'une plaque. On suppose que les frontières

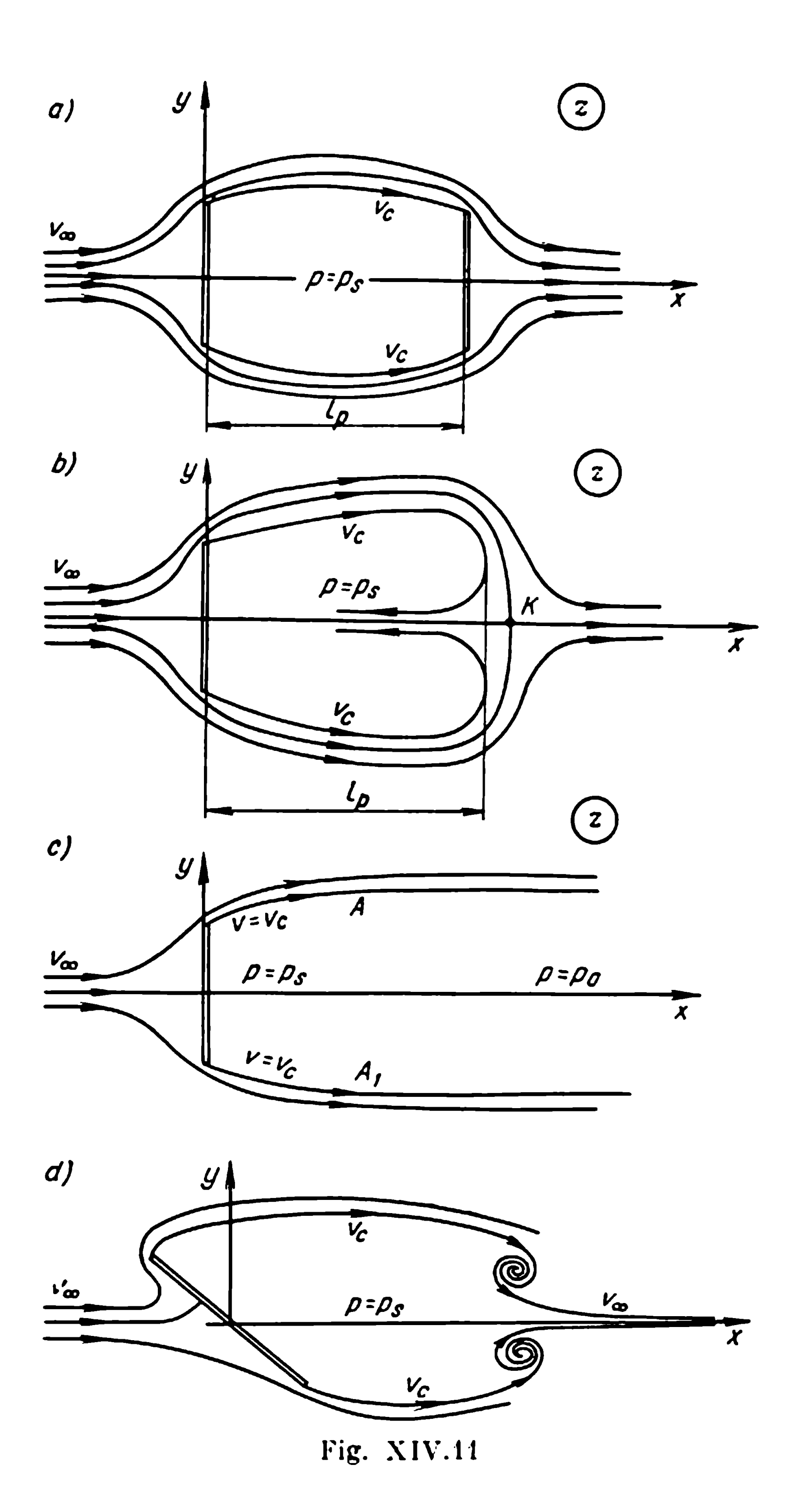

a)
y
z
v_∞
v_c
$p=p_s$
x
v_c
l_p
b)
y
z
v_∞
v_c
$p=p_s$
K
x
v_c
l_p
c)
z
y
$v=v_c$
A
v_∞
$p=p_s$
$p=p_0$
x
$v=v_c$
A_1
d)
y
v_c
v_∞
$p=p_s$
v_∞
x
v_c

Fig. XIV.11

de la poche de vapeur, formée derrière le corps, à une certaine distance derrière celui-ci passent en deux lignes de courant parallèles (« parois solides »). Jusqu'aux points A, A_1 où ces frontières passent en parois solides parallèles, la vitesse le long des frontières de la poche est déterminée par la formule (XIV.53). Derrière ces points elle varie et à l'infini derrière le corps devient égale à la vitesse de l'écoulement amont. La pression à partir des points A, A_1 le long des lignes de courant parallèles augmente de la valeur p_s jusqu'à p_0 à l'infini. Ce schéma permet de calculer les forces agissant sur un corps pour n'importe quelles valeurs de $\varkappa$. Pourtant, des difficultés apparaissent en ce qui concerne la détermination des dimensions de la poche de vapeur.

Le schéma permettant d'assurer le passage de la vitesse v_p le long de la frontière intérieure de la poche à la vitesse v_∞ à son extrémité et dans son sillage a été proposé par Touline (fig. XIV.11,*d*). D'après ce schéma, à la fin de la poche de vapeur se trouvent deux tourbillons marginaux avec des sens de rotation inverses. Le tourbillon marginal permet de joindre mathématiquement en son centre deux lignes de courant spirales avec des vitesses différentes, dans le cas donné v_c et v_∞. Les lignes de courant avec des vitesses v_∞ prenant leur origine au centre des tourbillons se joignent à l'infini et forment derrière la poche un sillage qui peut être considéré comme analogue à un sillage tourbillonnaire observé réellement dans la région se trouvant à l'arrière de la poche. Au centre des tourbillons les caractéristiques de l'écoulement, y compris de la pression, sont des grandeurs indéterminées. Cependant, cela n'empêche pas de calculer les paramètres de la poche de vapeur et du champ de la vitesse de l'écoulement potentiel le long de la surface du corps produisant la cavitation.

On doit noter que tous les schémas non linéaires de l'écoulement avec cavitation autour des corps assurent l'obtention des valeurs proches des forces hydrodynamiques agissant sur le corps. Pour cela, en résolvant les problèmes, on les choisit de façon que les calculs soient les plus simples.

Examinons l'écoulement avec cavitation autour d'une plaque plane avec $\varkappa = 0$, c'est-à-dire avec une poche de vapeur infinie, en utilisant à cet effet la méthode de Kirchhoff. Supposons que la plaque de hauteur h est normale à la vitesse v_∞ (fig. XIV.12,*a*) et est contournée pour $\varkappa = 0$ avec formation derrière elle d'une poche de vapeur infinie sur les frontières de laquelle la vitesse, d'après la formule (XIV.53), est égale à v_∞ et la pression constante et égale à p_s. En prenant le point critique A, disposé au centre de la plaque, pour le commencement du compte des valeurs de φ et de ψ de l'écoulement plan potentiel examiné avec une fonction caractéristique

$$w(z) = \varphi + i\psi,$$

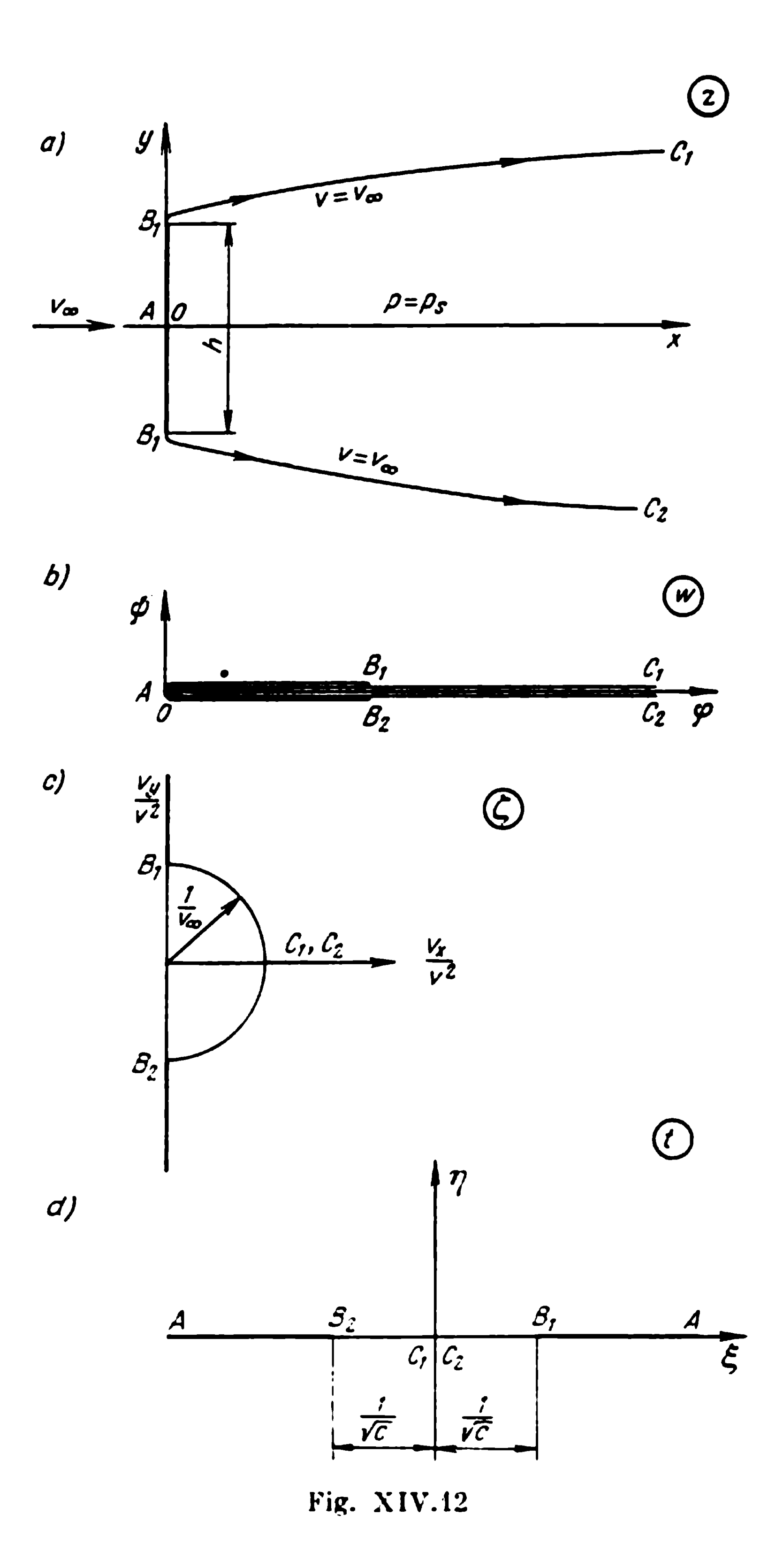

a)
z
y
C_1
$v=v_\infty$
B_1
v_∞
A
O
$p=p_s$
x
h
B_1
$v=v_\infty$
C_2
b)
w
ψ
B_1
C_1
A
O
B_2
C_2
φ
c)
$\frac{v_y}{v^2}$
ζ
B_1
$\frac{1}{v_\infty}$
C_1, C_2
$\frac{v_x}{v^2}$
B_2
t
η
d)
A
B_2
B_1
A
C_1
C_2
ξ
$\frac{1}{\sqrt{C}}$
$\frac{1}{\sqrt{C}}$

Fig. XIV.12

nous obtenons qu'au point A $\varphi = \psi = 0$. Ceci permet de construire facilement l'image de l'écoulement examiné dans le plan auxiliaire de la complexe variable w (fig. XIV.12,*b*). Pour cela, il suffit de tenir compte que le long des lignes de courant AB_1C_1 et AB_2C_2 nous aurons $\psi = 0$ et le potentiel φ augmentera de 0 à ∞. Dans le plan w, à la ligne de courant AB_1C_1 correspondra la partie supérieure de l'axe réel et à la ligne de courant AB_2C_2 la partie inférieure de ce même axe. Ainsi, à la région de l'écoulement correspond tout le plan w, à l'exception de la section le long de la partie positive de l'axe des φ. Les points B_1 et B_2 correspondant aux bords aigus de la plaque, se trouvent sur les côtés opposés de cette section. Supposons que la valeur du potentiel de la vitesse en ces points $\varphi = c$. Pour la détermination de la liaison $z = f(w)$, servons-nous de la fonction auxiliaire (XIV.28) proposée par Kirchhoff

$$\zeta_1 = \frac{dz}{dw}$$

et construisons l'image de l'écoulement étudié dans le plan de la variable complexe ζ_1. Si l'on tient compte que

$$\frac{dw}{dz} = ve^{-i\theta},$$

où θ est l'angle formé par le vecteur vitesse v au point donné de l'écoulement dans le plan z avec l'axe des x, alors

$$\zeta_1 = \frac{e^{i\theta}}{v} = \frac{v_x}{v^2} + i\,\frac{v_y}{v^2}\,. \qquad \text{(XIV.63)}$$

En considérant selon cette expression les tronçons isolés des frontières de l'écoulement dans le plan z, il est facile de déterminer qu'à la région de l'écoulement correspond dans le plan ζ_1 le demi-plan disposé à droite de l'axe imaginaire v_y/v^2 et limité au voisinage de l'origine des coordonnées par un demi-cercle de rayon $1/v_\infty$. Aux frontières de la poche correspondent les arcs de ce demi-cercle, et au point éloigné à l'infini le point d'intersection du demi-cercle avec l'axe réel (fig. XIV.12,*c*).

Pour établir la liaison entre les plans w et ζ_1, c'est-à-dire

$$\zeta_1 = f_1(w), \qquad \text{(XIV.64)}$$

introduisons encore un plan intermédiaire auxiliaire de la variable complexe $t = \xi + i\eta$, dans lequel à la région de l'écoulement dans le plan w correspond le demi-plan inférieur. La condition indiquée est observée lorsqu'on utilise la fonction de transformation

$$t = \frac{1}{\sqrt{w}}\,. \qquad \text{(XIV.65)}$$

Finalement, aux bords de la plaque dans le plan t correspondent les points B_1 ($\xi = \frac{1}{\sqrt{c}}$) et B_2 ($\xi = -\frac{1}{\sqrt{c}}$), disposés sur l'axe réel, et aux frontières de la poche de vapeur les segments de l'axe réel à partir de ces points jusqu'à l'origine des coordonnées. A un point éloigné à l'infini du plan w correspond l'origine des coordonnées dans le plan t (fig. XIV.12,*d*).

Maintenant, pour déterminer la liaison (XIV.64), il suffit de trouver la fonction représentant la région de l'écoulement dans le plan ζ_1 sur le demi-plan inférieur t. Pour cela on peut se servir de la fonction de transformation de Joukovski (XII.79) qui suivant les notations adoptées a la forme

$$t = C\left(\zeta_1 e^{-\frac{i\pi}{2}} + \frac{l_1^2}{\zeta_1 e^{-\frac{i\pi}{2}}}\right), \qquad \text{(XIV.66)}$$

où C est le multiplicateur constant, l_1 le rayon du cercle dans le plan ζ_1, $l_1 = 1/v_\infty$. Le multiplicateur $e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$ tient compte de la rotation de la région de l'écoulement d'un angle $\pi/2$ lors du passage du plan ζ_1 dans le plan t. La constante C se détermine de la condition suivant laquelle $\zeta_1 = i/v_\infty$ au point B_1 du plan ζ_1, et dans le plan t à ce point correspond $t = 1/\sqrt{c}$. Finalement, en substituant ces valeurs dans (XIV.66), il vient

$$C = \frac{v_\infty}{2\sqrt{c}},$$

c'est-à-dire

$$t = -\frac{iv_\infty}{2\sqrt{c}}\left(\zeta_1 - \frac{1}{v_\infty^2 \zeta_1}\right). \qquad \text{(XIV.67)}$$

D'où nous trouvons la fonction inverse

$$\zeta_1 = \frac{i\sqrt{c}}{v_\infty} t \pm \frac{\sqrt{1-c^2t^2}}{v_\infty}. \qquad \text{(XIV.68)}$$

La condition suivant laquelle $t = -i\infty$ pour $\zeta_1 = +\infty$ permet d'établir que, dans cette formule, la racine doit être précédée de signe plus. En remplaçant dans (XIV.68) t suivant l'expression (XIV.65), nous obtenons la relation cherchée (XIV.64) sous la forme

$$\zeta_1 = \frac{i\sqrt{c-w} + \sqrt{c}}{v_\infty \sqrt{w}} = \frac{dz}{dw}. \qquad \text{(XIV.69)}$$

Maintenant pour résoudre le problème il suffit d'employer la formule (XIV.29) d'après laquelle

$$z = \frac{i}{v_\infty} \int_0^w \frac{\sqrt{c-w} + \sqrt{c}}{\sqrt{w}}\, dw. \qquad \text{(XIV.70)}$$

Le choix de la limite inférieure d'intégration $w = 0$ correspond à l'observation de la condition $\varphi = \psi = 0$ au point A du plan z et rend inutile l'introduction de la constante d'intégration. Après l'intégration, on obtient

$$z = \frac{i}{v_\infty}\left[\sqrt{w(c-w)} + \frac{c}{2}\arccos\frac{c-2w}{c} + 2\sqrt{cw}\right]. \quad \text{(XIV.71)}$$

Maintenant on peut trouver la valeur de c; pour cela il suffit de poser qu'au point B_1 $z = ih/2$ et $w = \varphi = c$. Alors, d'après la relation (XIV.71), nous trouvons que

$$c = \frac{hv_\infty}{\pi+4}. \quad \text{(XIV.72)}$$

Le résultat de la solution du problème est la dépendance $z = f(w)$. Il est impossible d'obtenir la dépendance $w = f(z)$. Cependant, cela n'empêche pas de calculer la force qui est la résultante des pressions et est dirigée le long de l'axe des x, c'est-à-dire la résistance de la plaque. Pour son calcul, intégrons la différence des pressions agissant sur les deux côtés de la plaque, le long de toute sa hauteur

$$R_x = \int_{-h/2}^{h/2} (p - p_s)\, dy.$$

En utilisant l'intégrale d'Euler, nous trouvons que dans le cas donné

$$p - p_s = \frac{\rho}{2}(v_\infty^2 - v^2).$$

Sur la surface de la plaque $x = 0$, $\psi = 0$, $w = \varphi$ et $v = v_y = \partial\varphi/\partial y$; pour cela d'après (XIV.69), on trouve

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{v_\infty\sqrt{\varphi}}{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}}.$$

En tenant compte de la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe des x on peut écrire

$$R_x = \rho\int_0^{h/2} (v_\infty^2 - v^2)\, dy = \rho\int_0^{h/2}\left[v_\infty^2 - \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right] dy =$$

$$= \rho\int_0^c \left(v_\infty^2\frac{dy}{d\varphi} - \frac{d\varphi}{dy}\right) d\varphi.$$

En y substituant la valeur $\frac{d\varphi}{dy}$, nous trouvons

$$R_x = \rho v_\infty \int_0^c \left(\frac{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}}{\sqrt{\varphi}} - \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}} \right) d\varphi =$$

$$= 2\rho v_\infty \int_0^c \frac{\sqrt{c-\varphi}}{\sqrt{\varphi}} \, d\varphi.$$

Après intégration en tenant compte de la valeur de la constante c, on peut écrire

$$R_x = \pi c \rho v_\infty = \frac{\pi}{\pi + 4} h \rho v_\infty^2. \qquad \text{(XIV.73)}$$

Comme on le voit, dans l'écoulement de cavitation examiné le paradoxe d'Euler-d'Alembert relatif à la nullité de la force de résistance du corps dans un fluide non visqueux n'est pas justifié. Le coefficient de résistance de la plaque pour le nombre de cavitation égal à zéro est

$$C_{x0} = \frac{R_x}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} h} = \frac{2\pi}{\pi + 4}. \qquad \text{(XIV.74)}$$

La poche de vapeur correspondant à cette solution s'étend infiniment au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la plaque.

La méthode décrite permet de résoudre le problème de l'écoulement avec cavitation pour $\varkappa = 0$ autour d'une plaque plane inclinée sur la vitesse v_∞ sous l'angle d'attaque. Dans ce cas

$$C_{x0} = \frac{2\pi \sin^2 \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}; \qquad \text{(XIV.75)}$$

$$C_{y0} = \frac{2\pi \sin \alpha \cos \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}. \qquad \text{(XIV.76)}$$

Pour de faibles angles d'attaque $\sin \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 1$. Alors, en décomposant en série binomiale la grandeur $(1 + \pi\alpha/4)^{-1}$ et en se limitant au premier terme de cette décomposition nous trouvons des formules (XIV.75) et (XIV.76) les relations correspondantes (XIV.62) obtenues pour $\varkappa = 0$ au moyen de la théorie linéaire de la cavitation.

Parmi les problèmes de l'écoulement autour des corps avec des nombres de cavitation $\varkappa > 0$, envisageons l'étude de l'écoulement autour d'un arc réalisée par Iao-Tsé-Wu en utilisant le schéma proposé par Joukovski.

L'image de l'écoulement étudié dans le plan z est montrée sur la fig. XIV.13,*a*. Sur les tronçons des frontières libres de la poche de vapeur la vitesse v_c se détermine par la relation (XIV.53), et le long

des droites parallèles, qui servent de prolongement de la poche, $v \to v_\infty$. L'image de cet écoulement dans le plan w est montrée sur la fig. XIV.13,*b*. A cette image correspond tout le plan à l'exception de la coupure le long de l'axe réel positif. Au point critique C, où

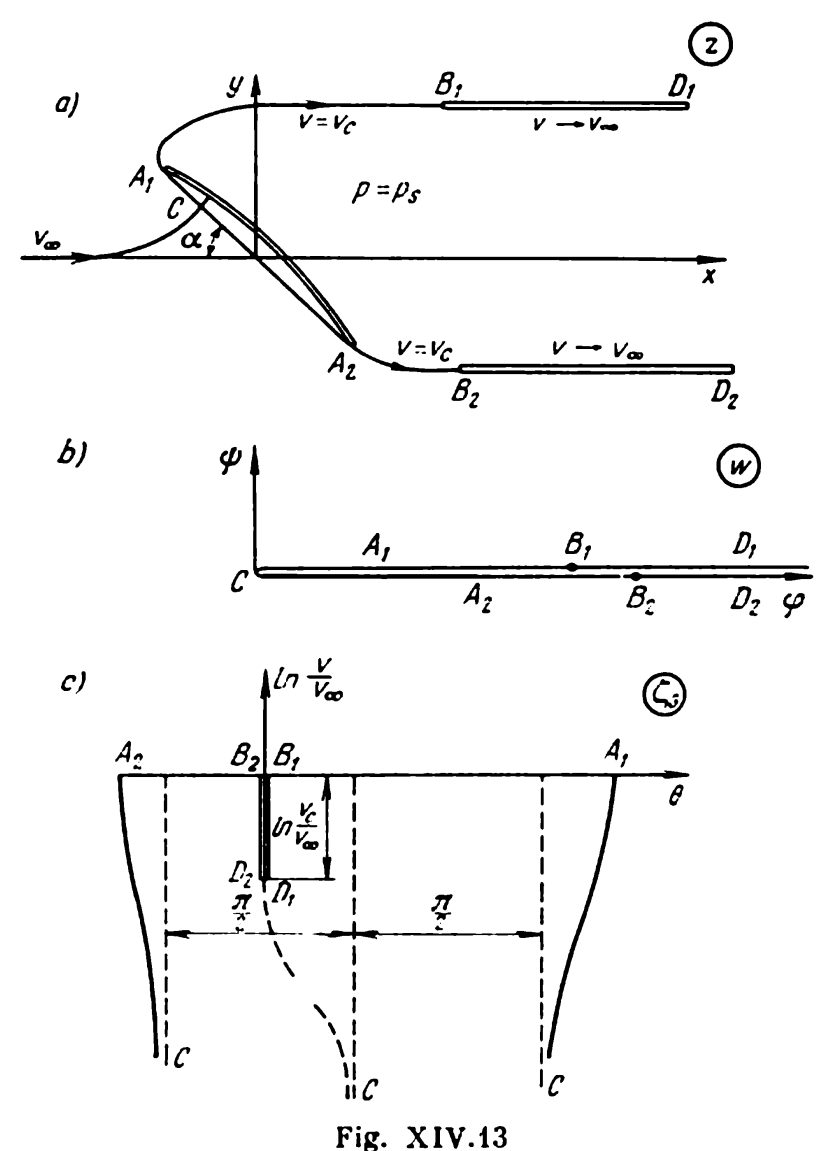


Fig. XIV.13

$\varphi = \psi = 0$, correspond l'origine des coordonnées, aux filets libres, les tronçons A_1B_1 et A_2B_2. Pour la détermination de la dépendance $z = f(w)$, on peut utiliser la méthode de Levi-Civita suivant laquelle on introduit une fonction auxiliaire de la variable complexe (XIV.32)

$$\zeta_3 = i \ln \frac{dw}{dz} \frac{1}{v_c} = i \ln \frac{v}{v_c} + \theta,$$

où θ est l'angle du vecteur de la vitesse de l'écoulement par rapport à l'axe des x.

L'image de l'écoulement dans le plan ζ_3 (fig. XIV.13,*c*) est située à l'intérieur de la région $CA_2B_2D_1B_1A_1C$. La résolution ultérieure du problème consiste à déterminer la liaison $\zeta_3 = f(w)$ qui nous fournira la solution, d'après la relation (XIV.32). A cet effet on introduit des plans intermédiaires auxiliaires, permettant de simplifier la construction de la fonction de transformation cherchée. Au moyen d'une telle méthode, on a effectué les calculs des caractéristiques hydrodynamiques des plaques planes et des arcs de cercle pour les différents nombres $\varkappa$ [19]. Pour le cas de l'écoulement autour d'une plaque normale à la vitesse v_∞ on a obtenu par cette méthode l'expression

$$C_x = \frac{2\pi}{\pi+4}(1+\varkappa)\left[1+\frac{\varkappa^2}{6\pi+24}-\frac{7\varkappa^3}{24(6\pi+4)}+\ldots\right], \quad \text{(XIV.77)}$$

qui pour $\varkappa = 0$ correspond à la formule (XIV.74) trouvée par la méthode de Kirchhoff et pour de faibles valeurs de $\varkappa$, quand on peut négliger les termes contenant $\varkappa$ en puissance supérieure à la première, correspond à la relation (XIV.54) et confirme sa validité.

La théorie des écoulements symétriques à l'axe avec cavitation et décollement est jusqu'à présent insuffisamment élaborée. Cependant on a établi que dans ce cas aussi pour le calcul du coefficient $\varkappa$ on peut utiliser la relation (XIV.54) et la poche de vapeur qui se forme derrière le corps pour $\varkappa > 0$ a une forme ellipsoïdale.

§ 102. CHOC SUR UN FLUIDE

Lorsqu'on étudie l'interaction des corps et d'un fluide, dans de nombreux cas il est indispensable de tenir compte des forces hydrodynamiques qui apparaissent subitement. L'apparition de telles forces est possible, par exemple, lors de la chute des corps sur la surface de l'eau ou de l'application soudaine des forces extérieures à un corps immobile flottant dans un liquide. A de tels processus se rapportent les chocs produits par les tronçons du fond des navires sur l'eau lors de leur mouvement pendant une forte houle (slamming) ou lors du lancement par le travers, etc. On peut les considérer comme le choc d'un corps solide sur un fluide. L'intervalle de temps pendant lequel se produit le phénomène du choc est petit, mais la valeur des forces hydrodynamiques et des impulsions de ces forces qui apparaissent dans ce cas est très grande. Ceci permet à l'étude du choc de négliger les impulsions des forces d'autre nature agissant sur le fluide et le corps solide et de considérer le mouvement du fluide provoqué par le choc comme ne dépendant pas de l'action de ces forces supplémentaires et en particulier de la force de pesanteur.

L'analyse détaillée des facteurs influant sur le développement du choc contre le fluide, effectuée sur la base des recherches théoriques et expérimentales, atteste de la complexité des phénomènes

qui s'y produisent. Etant donné que le choc provoque l'apparition subite des pressions de grande valeur, le mouvement du fluide doit subir l'influence de la compressibilité. Ceci montre que le processus de transmission des pressions dans un fluide ne peut être considéré comme instantané, comme cela a été déjà noté lors de l'étude du coup de bélier dans le problème interne. Les paramètres du mouvement du fluide qui apparaissent en choc dépendent également de la déformation du corps dont le choc sur l'eau est examiné.

Le développement du choc lors de la chute d'un corps sur la surface d'un fluide est sensiblement influencé par l'air qui les sépare. Par exemple, dans le cas de la chute d'une plaque à plat sur la surface de l'eau, cet air forme au moment initial sur sa surface inférieure une poche d'air, qui empêche l'interaction de la plaque avec l'eau [8].

La prise en compte de l'influence de tous les facteurs énumérés sur le processus du choc est très difficile et n'est possible que dans les expériences.

Considérons les méthodes théoriques de la détermination des caractéristiques hydrodynamiques du corps lors d'un choc en admettant le corps indéformable, le fluide non visqueux et incompressible et sans tenir compte de l'influence de la force de pesanteur sur les phénomènes qui s'y produisent. Vu l'instantanéité de l'action du choc, on peut négliger les déplacements des particules de fluide pendant cet intervalle de temps τ_{ch}. En partant des hypothèses énoncées on peut utiliser pour le calcul des pressions apparaissant dans le fluide lors d'un choc p_{ch} la formule (XIII.11) sans y tenir compte de la pression hydrostatique et de la pression p_0

$$p_{ch} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} .$$

En négligeant la variation de la position des particules dans l'espace, on peut conformément à cette expression écrire

$$\varphi = -\frac{1}{\rho} \int_0^{\tau_{ch}} p_{ch}\, dt = -\frac{1}{\rho} p^*, \qquad \text{(XIV.78)}$$

où $p^* = \int_0^{\tau_{ch}} p_{ch} dt$ est l'impulsion de la pression pendant le choc.

La formule (XIV.78) permet en même temps de déterminer le sens physique du potentiel de la vitesse φ. Suivant cette formule, le potentiel de la vitesse de n'importe quel écoulement peut être considéré comme une grandeur proportionnelle à l'impulsion des forces de pressions que l'on doit appliquer à un fluide pour qu'il y apparaisse un écoulement potentiel avec une loi de la distribution des vitesses correspondant au potentiel φ. On en déduit que tout mou-

vement d'un fluide non visqueux, dû à l'impulsion des forces superficielles qu'il subit, peut être considéré comme potentiel, c'est-à-dire irrotationnel.

De ce qui a été dit ci-dessus, il devient clair que l'écoulement d'un fluide conditionné par un choc peut être étudié si l'on trouve le potentiel φ de sa vitesse induite satisfaisant à l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$. Pour sa détermination, il faut également formuler les conditions aux limites.

Sur la surface libre d'un fluide, c'est-à-dire en dehors de la région de son contact avec la surface du corps, du côté de laquelle sur le fluide agissent des pressions p_{ch}, la pression est constante, c'est-à-dire $p_{ch} = 0$. Alors d'après la formule (XIV.78), en tous les points de la surface libre du fluide

$$\varphi = 0. \qquad \text{(XIV.79)}$$

Sur la surface S du corps la condition d'imperméabilité (V.8) est observée, suivant laquelle

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = v_{0n},$$

où v_{0n} est la composante normale de la vitesse v_0 des points de la surface du corps.

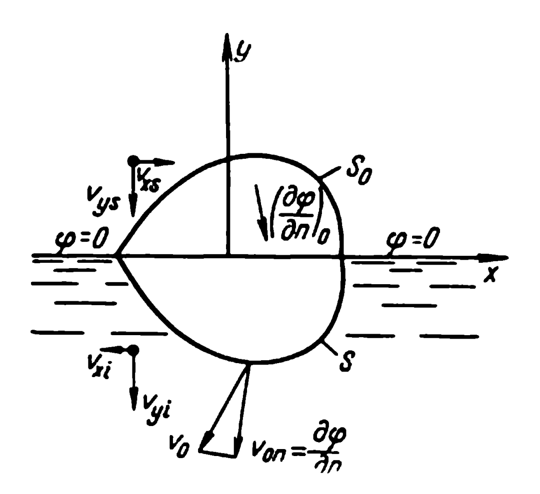


Fig. XIV.14

Dans le cas de l'observation de cette condition il faut prendre en considération qu'en des points correspondants de la surface solide S la pression de choc et, par conséquent, son impulsion p^* aussi doivent être supérieures à zéro, ou pour être plus précis, supérieures à la tension de vapeur saturante du fluide. Dans le cas contraire, on doit s'attendre à la rupture de la continuité, c'est-à-dire au décollement du fluide de la surface du corps.

La condition (XIV.79) se rapporte aux points de la surface libre, la nature de la déformation de laquelle au moment du choc est inconnue. Cependant, si l'on néglige le déplacement des particules du fluide pendant le choc, on peut supposer que cette condition est observée en des points du plan coïncidant avec la surface du fluide au repos, par exemple dans le cas du problème plan, sur l'axe des x (fig. XIV.14). Mais alors en vertu du principe connu de la symétrie, utilisé auparavant au § 98, on peut prolonger l'écoulement dans la région disposée au-dessus de la surface libre de l'eau et en des points correspondants

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_s = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_i,$$

c'est-à-dire

$$v_{ys} = v_{yi}, \tag{XIV.80}$$

ainsi que

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_s = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_i,$$

c'est-à-dire

$$v_{xs} = -v_{xi}. \tag{XIV.81}$$

Des égalités (XIV.80) et (XIV.81), il suit qu'en des points de la surface S_0, qui est l'image reflétée de la partie immergée du corps solide par rapport au plan $y = 0$ (fig. XIV.14)

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}. \tag{XIV.82}$$

Considérons les cas particuliers de différentes directions du mouvement du corps au moment du choc.

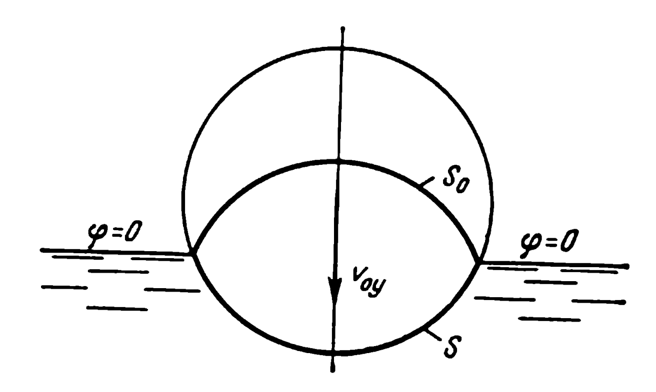


Fig. XIV.15

Si la vitesse du corps v_0 au moment du choc est normale à la surface de l'eau, quand $v_0 = v_{0y}$, alors d'après (XIV.80)-(XIV.82) dans la région située au-dessus de la surface libre le champ de la vitesse sera le même qu'en mouvement d'un corps limité par la surface $S + S_0$ mais s'effectuant dans un fluide continu le long de l'axe des y à la vitesse v_{0y}. Donc on peut prendre le potentiel φ pour la région disposée au-dessous du plan $y = 0$ à partir de la solution du problème du champ des vitesses induites lorsque le corps correspondant se déplace dans un fluide illimité. Ainsi, par exemple, pour les sphères à moitié immergées, les ellipsoïdes ou une plaque plane, disposés sur la surface de l'eau, on prend ce potentiel directement à partir de la solution des problèmes des mouvements de ces corps dans un fluide continu, et pour le cylindre partiellement immergé (fig. XIV.15) à partir du problème du mouvement transversal d'un dièdre dont la surface est $S + S_0$. La condition analogue est égale-

ment observée, lorsqu'on étudie le choc qui produit la rotation du corps autour de l'axe horizontal situé sur la surface libre du fluide.

Si la vitesse du corps au moment du choc est dirigée le long de la surface libre $v_0 = v_{0x}$, alors, comme il suit des formules (XIV.80)-(XIV.82), le champ des vitesses induites dans la région du prolongement de l'écoulement au-dessus de la surface libre correspond au cas où la partie reflétée de la surface immergée S_0 du corps se déplace dans le sens inverse le long de l'axe des x à la vitesse $-v_{0x}$ (fig. XIV.16), c'est-à-dire à un glissement des deux corps symétriques dans un fluide illimité. Mais au cours de la résolution de ce problème des difficultés supplémentaires peuvent surgir, liées au fait

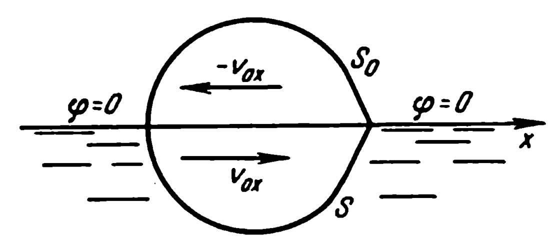


Fig. XIV.16

que sur la partie immergée de la surface S, disposée du côté opposé au sens de son mouvement (sur la fig. XIV.16, du côté de la direction négative de l'axe des x) il est possible la formation d'une zone où $p^* < 0$ et il y a décollement du fluide de la surface du corps. Dans ce cas la condition aux limites $\partial\varphi/\partial n = v_{0n}$ depuis le point de décollement jusqu'à la surface libre doit être remplacée par la condition $p^* = 0$, c'est-à-dire $\varphi = 0$. Ceci nous amène à résoudre le problème de l'écoulement autour d'un corps avec décollement en déterminant de la position du point de décollement du fluide.

L'énergie cinétique d'un fluide en écoulement potentiel se détermine, comme on le sait, par la formule (VI.33) et s'exprime par les masses virtuelles λ_{ic}

$$\lambda_{ic} = -\rho \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

où S est la surface du corps.

Dans le cas d'un choc vertical, lié à un mouvement de translation, on doit prendre le potentiel φ figurant dans cette formule le même qu'en mouvement d'un corps avec une surface $S + S_0$, mais dans un milieu continu. Alors la valeur de la masse virtuelle (en cas d'un problème plan λ_{22}) au cours du choc $\lambda_{22\,\text{ch}}$ sera deux fois moindre qu'en mouvement d'un corps avec une surface $S + S_0$ dans un milieu continu

$$\lambda_{22\,\text{ch}} = \frac{\lambda_{22}}{2}, \qquad \text{(XIV.83)}$$

puisque pour les mêmes valeurs du potentiel, la région d'intégration paraît être diminuée de moitié

$$\lambda_{22\,\mathrm{ch}} = -\rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -\frac{\rho}{2} \oint_{S+S_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

La grandeur de l'énergie cinétique du fluide sera

$$T_{\mathrm{fl\,ch}} = \frac{\lambda_{22\,\mathrm{ch}} v_{0y}^2}{2}, \qquad \text{(XIV.84)}$$

et la quantité de mouvement du fluide après le choc

$$Q_{\mathrm{fl\,ch}} = \lambda_{22\,\mathrm{ch}} v_{0y}. \qquad \text{(XIV.85)}$$

Ainsi, par exemple, pour un cylindre à moitié immergé de rayon r_0, flottant sur la surface d'un fluide et acquérant instantanément à la suite d'un choc une vitesse verticale v_{0y}, compte tenu de (VI.73), nous obtenons

$$\lambda_{22\,\mathrm{ch}} = \frac{\lambda_{22}}{2} = \frac{1}{2} \rho \pi r_0^2.$$

La relation analogue à (XIV.83) est applicable également au calcul du moment d'inertie virtuel du fluide $\lambda_{33\mathrm{ch}}$ dans le cas d'un choc

$$\lambda_{33\,\mathrm{ch}} = \frac{\lambda_{33}}{2}, \qquad \text{(XIV.86)}$$

et de plus

$$T_{\mathrm{fl\,ch}} = \frac{\lambda_{33\,\mathrm{ch}} \omega^2}{2}$$

où ω est la vitesse angulaire de rotation du corps au moment du choc.

Si au cours d'un choc le corps se déplace le long de la surface libre

$$T_{\mathrm{fl\,ch}} = \frac{\lambda_{11\,\mathrm{ch}} v_{0x}^2}{2},$$

pourtant les relations analogues à (XIV.83) ne sont plus utilisables pour la détermination de la valeur $\lambda_{11\mathrm{ch}}$. On peut l'obtenir seulement en résolvant le problème suivant le schéma montré sur la fig. XIV.16 et compte tenu du décollement possible lors du choc. Ce problème a été étudié en détail par L. Sédov [20] pour le choc horizontal d'une plaque mince disposée verticalement dans un fluide. La loi de la distribution de l'impulsion de la pression p^*, qui prend naissance lors d'un choc dirigé le long de l'axe des x, sur la surface d'une plaque de hauteur a, est montrée sur la figure XIV.17. Sur le côté opposé de la plaque au-dessus du point o, situé à une distance 0,08 a du bord inférieur de la plaque, $p^* = 0$; ceci montre que dans cette zone, lors d'un choc a lieu un décollement du fluide.

La valeur de la masse virtuelle λ_{11ch} dans le cas examiné est

$$\lambda_{11\,ch} = k\rho\frac{2a^2}{\pi},$$

où le coefficient $k = 0{,}66$; si on résout ce problème sans tenir compte de l'influence du décollement du fluide, alors $k = 1$; cependant une telle solution ne correspond pas à l'image physique des phénomènes observés.

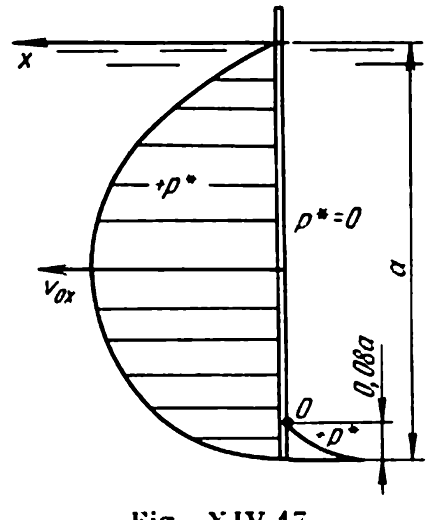


Fig. XIV.17

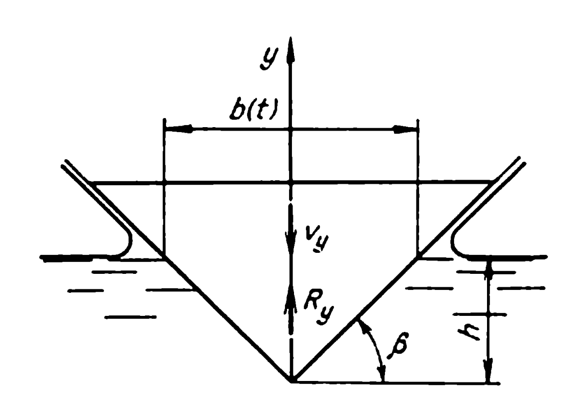


Fig. XIV.18

En cas d'un choc vertical sur la surface de l'eau d'un corps de masse m et de vitesse v_{0y}, suivant la loi des quantités de mouvement

$$v_{0y}m = (m + \lambda_{22\,ch})\,v_{ch},$$

c'est-à-dire la vitesse du corps après le choc v_{ch}

$$v_{ch} = \frac{m}{m + \lambda_{22\,ch}}\,v_{0y}. \qquad \text{(XIV.87)}$$

La valeur de la masse virtuelle λ_{22ch} doit être prise dans cette formule conformément aux recommandations énoncées ci-dessus.

Le cas particulier est l'entrée du corps dans l'eau. Accompagné de déformations de la surface du fluide, de formation de filets d'embruns, il ne peut plus être considéré comme un processus instantané.

Parmi les exemples d'écoulement de ce type le plus important et le plus étudié est l'entrée verticale dans l'eau d'un coin symétrique ou d'un cône de demi-angle extérieur β (fig. XIV.18). Si l'on ne tient pas compte de l'influence des forces de la pesanteur du fluide, l'écoulement qui apparaît lors de l'immersion du coin ou du cône dans le liquide peut être considéré comme automodelé, c'est-à-dire pour les différentes profondeurs d'immersion h du sommet du coin les vitesses du fluide en des points respectivement disposés par rapport

à son sommet ont une même valeur. De ce fait, on peut admettre que le coefficient de la force de résistance, apparaissant au moment de l'entrée du coin ou du cône dans l'eau, ne dépend pas de la vitesse d'immersion du corps.

Lors de l'élaboration des méthodes théoriques du calcul de la masse virtuelle et de la force de la résistance en cas de l'entrée du corps dans l'eau, on utilise des hypothèses simplifiées. Suivant l'hypothèse proposée par Wagner, la force hydrodynamique verticale R_y apparaissant au cours de l'immersion du coin ou du cône et, par conséquent, le processus lui-même de cette immersion peuvent être considérés comme le résultat de chocs élémentaires successifs continus du corps sur le fluide. Et de plus, on propose de considérer l'écoulement de fluide apparaissant à chaque instant, comme résultant du choc sur la surface du fluide d'une plaque plane dont la surface et la forme en plan correspondent à la ligne de flottaison instantanée du corps et la vitesse est égale à la vitesse d'immersion du corps. En cas d'un coin, la plaque plane aura la forme d'un rectangle et en cas d'un cône, la forme d'un cercle avec des valeurs instantanées des masses virtuelles au cours du choc, déterminées par la relation (XIV.83), c'est-à-dire pour une plaque

$$\lambda_{22\,\mathrm{ch}} = \frac{\pi\rho b^2(t)}{2}, \qquad \text{(XIV.88)}$$

pour un cercle

$$\lambda_{22\,\mathrm{ch}} = \frac{4\rho r^3(t)}{3}. \qquad \text{(XIV.89)}$$

Comme il résulte de ces formules, les valeurs instantanées $\lambda_{22\mathrm{ch}}$ sont des fonctions du temps, puisque les dimensions caractéristiques telles que la demi-largeur $b\,(t)$ de la ligne de flottaison instantanée du coin et le rayon de la ligne de flottaison instantanée du cercle $r\,(t)$ sont fonctions du temps. Pour déterminer la force hydrodynamique verticale R_y agissant sur ces corps lors de leur immersion, il faut faire appel à la loi des quantités de mouvement (VI.57) suivant laquelle

$$R_y = -\frac{dQ_{\mathrm{fl\,ch}}}{dt}. \qquad \text{(XIV.90)}$$

Si l'on tient compte que dans le cas considéré $\lambda_{22} = \lambda_{22\mathrm{ch}}$, et $v_{0y} = v_y$ et on emploie la formule respective de (VI.61), alors la quantité de mouvement du fluide en choc $Q_{\mathrm{fl\,ch}}$ se déterminera par la relation

$$Q_{\mathrm{fl\,ch}} = \lambda_{22\,\mathrm{ch}} v_y.$$

En la substituant dans (XIV.90) et en effectuant la dérivation, nous obtenons

$$R_y = -\frac{d}{dt}(\lambda_{22\,\mathrm{ch}} v_y) = -\frac{d\lambda_{22\,\mathrm{ch}}}{dt} v_y - \lambda_{22\,\mathrm{ch}} \frac{dv_y}{dt}. \qquad \text{(XIV.91)}$$

Si l'on considère l'immersion du corps comme s'effectuant à la vitesse constante v_y, on peut négliger le second terme de cette formule et le premier représentera la force de la résistance à l'entrée dans l'eau du coin ou du cône

$$R_y = -\frac{d\lambda_{22\,\mathrm{ch}}}{dt} v_y.$$

Les valeurs du facteur $d\lambda_{22\mathrm{ch}}/dt$ dans cette formule peuvent être déterminées d'après l'hypothèse de Wagner énoncée ci-dessus: pour le coin

$$\frac{d\lambda_{22\,\mathrm{ch}}}{dt} = \pi\rho h \left(\frac{\pi}{2\beta} - 1\right)^2 v_y \quad \text{avec} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

pour le cône

$$\frac{d\lambda_{22\,\mathrm{ch}}}{dt} = 4\rho h^2 \left(\frac{4}{\pi \operatorname{tg} \beta}\right)^3 \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{4} \left(\frac{4+\pi^2}{8} + \ln \frac{4}{\operatorname{tg} \beta}\right)\right] v_y$$

pour $0 < \beta < 30°$.

Déterminons maintenant le coefficient $C_y = \frac{R_y}{\frac{\rho v_y^2}{2} S}$ de la force de la résistance à l'immersion du coin, en le rapportant à la surface de la ligne de flottaison instantanée $S = 2h \operatorname{ctg} \beta$,

$$C_y = \frac{\pi\rho h \left(\frac{\pi}{2\beta} - 1\right)^2 v_y^2}{\frac{\rho v_y^2}{2} 2h \operatorname{ctg} \beta} = \frac{\pi}{\operatorname{ctg} \beta} \left(\frac{\pi}{2\beta} - 1\right)^2.$$

Ce coefficient, comme il a été indiqué plus haut, ne dépend pas de la vitesse d'immersion du coin.

En cas d'immersion d'un corps avec une vitesse verticale variable dans le temps, on doit, en calculant la force R_y d'après la formule (XIV.91), tenir compte du second terme, en y considérant $\lambda_{22\mathrm{ch}}$ comme fonction du temps, c'est-à-dire en fin de compte comme fonction de la profondeur d'immersion h de l'extrémité du corps.

BIBLIOGRAPHIE

1. АГРОСКИН И. И., ДМИТРИЕВ Г. Т., ПИКАЛОВ Ф. И. *Гидравлика.* Госэнергоиздат, 1950. (I. Agroskine, G. Dmitriev, F. Pikalov. *Hydraulique.* Ed. russe, 1950)
2. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ С. М. *Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа.* Изд-во «Наука», 1965. (S. Biélotserkovski. *Surface portante mince dans un écoulement de gaz subsonique.* Ed. russe, 1965)
3. BIRKHOFF G. and ZARANTONELLO E. *Jets, wakes and cavities.* New York, Acad. presse, 1957.
4. ВОЙТКУНСКИЙ Я. И. *Сопротивление воды движению судов.* Изд-во «Судостроение», 1964. (I. Voïtkounski. *La résistance de l'eau au mouvement des navires.* Ed. russe, 1964)
5. ВОЙТКУНСКИЙ Я. И. *Теория волн и волнового сопротивления.* Изд-во ЛКИ, 1959. (I. Voïtkounski. *La théorie des ondes et de la résistance d'onde.* Ed. russe, 1959)
6. ГОЛУБЕВ В. В. *Лекции по теории крыла.* ГИТТЛ, 1949. (V. Goloubev. *Leçons sur la théorie de l'aile.* Ed. russe, 1949)
7. ГУРЕВИЧ М. И. *Теория струй идеальной жидкости.* ГИФМЛ, 1961. (M. Gourévitch. *La théorie des jets d'un fluide parfait.* Ed. russe, 1961)
8. ЕГОРОВ И. Т., СОКОЛОВ В. Т. *Гидродинамика быстроходных судов.* Изд-во «Судостроение», 1965. (I. Egorov, V. Sokolov. *Hydrodynamique des navires rapides.* Ed. russe, 1965)
9. ЖУКОВСКИЙ Н. Е. *Собрание сочинений*, т. IV. Аэродинамика, 1943. (N. Joukovski. *Œuvres complètes*, t. IV. Aérodynamique, Ed. russe, 1943)
10. ИДЕЛЬЧИК И. Е. *Гидравлические сопротивления.* Госэнергоиздат, 1954. (I. Idéltchik. *Les résistances hydrauliques.* Ed. russe, 1954)
11. E. CARAFOLI. *Aérodynamique des ailes d'avion.* Paris, Chiron, 1928.
12. КОСТЮКОВ А. А. *Теория корабельных волн и волнового сопротивления.* Судпромгиз, 1959. (A. Kostukov. *La théorie des ondes dues au navire et de la résistance d'onde.* Ed. russe, 1959)
13. КОЧИН Н. Е. *Собрание сочинений*, т. II. АН СССР, 1949. (N. Kotchine. *Œuvres complètes*, t. II, Académie des sciences de l'U.R.S.S., Ed. russe, 1949).
14. КОЧИН Н. Е., КИБЕЛЬ И. А., РОЗЕ Н. В. *Теоретическая гидромеханика*, ч. I и II, ГИТТЛ, 1949. (N. Kotchine, I. Kibel, N. Rozé. *Mécanique des fluides théorique*, I et II parties. Ed. russe. 1949)
15. ЛОЙЦЯНСКИЙ Л. Г. *Механика жидкости и газа.* ГИТТЛ, 1957. (L. Loïtsianski. *Mécanique des liquides et des gaz.* Ed. russe, 1957)
16. ЛОЙЦЯНСКИЙ Л. Г. *Ламинарный пограничный слой.* ГИФМЛ, 1962. (L. Loïtsianski. *Couche limite laminaire.* Ed. russe, 1962)
17. МАРТЫНОВ А. К. *Экспериментальная аэродинамика.* Оборонгиз, 1958. (A. Martynov. *Aérodynamique expérimentale.* Ed. russe, 1958)

18. МОНИН А. С., ЯГЛОМ А. М. *Статистическая гидромеханика*, ч. I и II. Изд-во «Наука», 1965 и 1967. (A. Monine, A. Iaglom. *Mécanique des fluides statistique*, I et II parties. Ed. russe, 1965 et 1967)
19. ПЕРНИК А. Д. *Проблемы кавитации*. Изд-во «Судостроение», 1966. (A. Pernik. *Les problèmes de la cavitation*. Ed. russe, 1966)
20. СЕДОВ Л. И. *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*. Изд-во «Наука», 1966. (L. Sédov. *Les problèmes plans de la dynamique des fluides et de l'aérodynamique*. Ed. russe, 1966)
21. ТИХОНОВ А. Н., САМАРСКИЙ А. А. *Уравнения математической физики*. Изд-во «Наука», 1966. (A. Tikhonov, A. Samarski. *Equations de la physique mathématique*. Ed. russe, 1966)
22. J. J. STOKER. *Water waves*. New York. London, Interscience publ., 1957.
23. ФЕДЯЕВСКИЙ К. К., СОБОЛЕВ Г. В. *Управляемость корабля*. Судпромгиз, 1963. (C. Fédiaevski, G. Sobolev. *Manœuvrabilité des navires*. Ed. russe, 1963)
24. ЧАПЛЫГИН С. А. *Избранные работы по теории крыла*. «Гостехтеоретиздат», 1949. (S. Tchaplyguine. *Œuvres choisies sur la théorie de l'aile*. Ed. russe, 1949)
25. H. SCHLICHTING. *Entstehung der turbulenz*, Berlin u.a., 1959.

INDEX ALPHABÉTIQUES DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES

